26.22 Determine o termo que envolve x^2 na expansão de

$$\left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^{10}.$$

SOLUÇÃO

De $(x^3)^{10-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^2$, obtemos $3(10 - r + 1) - 1(r - 1) = 2$ ou $r = 8$.

Para o oitavo termo: $n = 10$, $r = 8$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 7$, $n - r + 1 = 3$.

$$\text{oitavo termo} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}(x^3)^3\left(\frac{a}{x}\right)^7 = 120a^7x^2$$

26.23 Determine o termo independente de x na expansão de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9.$$

SOLUÇÃO

De $(x^2)^{9-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^0$, obtemos $2(9 - r + 1) - 1(r - 1) = 0$ ou $r = 7$.

Para o sétimo termo: $n = 9$, $r = 7$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 6$, $n - r + 1 = 3$.

$$\text{sétimo termo} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(x^2)^3(-x^{-1})^6 = 84$$

26.24 Calcule $(1{,}03)^{10}$ para cinco casas significativas.

SOLUÇÃO

$$(1{,}03)^{10} = (1 + 0{,}03)^{10} = 1 + 10(0{,}03) + \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}(0{,}03)^2 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}(0{,}03)^3 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(0{,}03)^4 + \cdots$$
$$= 1 + 0{,}3 + 0{,}0405 + 0{,}003\,24 + 0{,}000\,17 + \cdots = 1{,}3439$$

Observe que todos os 11 termos da expansão de $(0{,}03 + 1)^{10}$ seriam necessários para calcular $(1{,}03)^{10}$.

26.25 Calcule $(0{,}99)^{15}$ para quatro casas decimais.

SOLUÇÃO

$$(0{,}99)^{15} = (1 - 0{,}01)^{15} = 1 + 15(-0{,}01) + \frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}(-0{,}01)^2 + \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}(-0{,}01)^3$$
$$+ \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-0{,}01)^4 + \cdots$$
$$= 1 - 0{,}15 + 0{,}0105 - 0{,}000\,455 + 0{,}000\,014 - \cdots = 0{,}8601$$

26.26 Determine a soma dos coeficientes na expansão de (*a*) $(1 + x)^{10}$ e (*b*) $(1 - x)^{10}$.

SOLUÇÃO

(*a*) Se $1, c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ são os coeficientes, temos a identidade

$$(1 + x)^{10} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{10}x^{10}. \text{ Denotemos } x = 1.$$

Então, $(1 + 1)^{10} = 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{10}$ = soma dos coeficientes $= 2^{10} = 1024$.

(*b*) Denotemos $x = 1$. Então, $(1 - x)^{10} = (1 - 1)^{10} = 0$ = soma dos coeficientes.

Problemas Complementares

26.27 Expanda pela fórmula binomial.

(*a*) $(x + \frac{1}{2})^6$ (*b*) $(x - 2)^5$ (*c*) $(y + 3)^4$ (*d*) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$ (*e*) $(x^2 - y^3)^4$ (*f*) $(a - 2b)^6$ (*g*) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y}\right)^4$ (*h*) $(y^{1/2} + y^{-1/2})^6$

By Possuidão

26.28 Determine o termo indicado nas expansões a seguir.

(*a*) 5º termo de $(a-b)^7$

(*b*) 7º termo de $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^9$

(*c*) Termo médio de $\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^8$

(*d*) 8º termo de $\left(\dfrac{x^2}{2}-2y\right)^{16}$

(*e*) 7º termo de $\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10}$

(*f*) 16º termo de $(2-1/x)^{18}$

(*g*) 6º termo de $(x^2-2y)^{11}$

(*h*) 11º termo de $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

26.29 Determine o termo independente de x na expansão de $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{3x^2}\right)^{10}$.

26.30 Determine o termo envolvendo x^3 na expansão de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

26.31 Calcule $(0{,}98)^6$ para cinco casas decimais.

26.32 Calcule $(1{,}1)^{10}$ com precisão de centésimos.

Respostas dos Problemas Complementares

26.27 (*a*) $x^6+3x^5+\dfrac{15}{4}x^4+\dfrac{5}{2}x^3+\dfrac{15}{16}x^2+\dfrac{3}{16}x+\dfrac{1}{64}$

(*b*) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

(*c*) $y^4+12y^3+54y^2+108y+81$

(*d*) $x^5+5x^3+10x+\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}$

(*e*) $x^8-4x^6y^3+6x^4y^6-4x^2y^9+y^{12}$

(*f*) $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$

(*g*) $\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{3x^3}{2y}+\dfrac{27x^2}{2y^2}+\dfrac{54x}{y^3}+\dfrac{81}{y^4}$

(*h*) $y^3+6y^2+15y+20+15y^{-1}+6y^{-2}+y^{-3}$

26.28 (*a*) $35a^3b^4$ (*b*) 84 (*c*) 70 (*d*) $-2860x^{18}y^7$ (*e*) $210a$ (*f*) $-\dfrac{6528}{x^{15}}$ (*g*) $-14\,784x^{12}y^5$ (*h*) $\dfrac{1001}{x}$

26.29 5

26.30 $792x^3$

26.31 0,885 84

26.32 2,59

By Possuidão

Capítulo 27

Probabilidade

27.1 PROBABILIDADE SIMPLES

Suponhamos que um evento possa ocorrer em h casos e não ocorrer em f casos, sendo todos estes $h+f$ casos igualmente prováveis. Então, a probabilidade de ocorrer tal evento (chamado seu sucesso) é

$$p = \frac{h}{h+f} = \frac{h}{n}$$

e a probabilidade de não ocorrer tal evento (chamado seu insucesso) é

$$q = \frac{f}{h+f} = \frac{f}{n},$$

onde $n = h+f$.

Segue-se que $p+q=1$, $p=1-q$ e $q=1-p$.

As chances de o evento ocorrer são $h:f$ ou h/f; as chances de o evento não ocorrer são $f:h$ ou f/h.

Se p é a probabilidade de um evento ocorrer, as chances a favor são $p:q = p:(1-p)$ ou $p/(1-p)$; as chances de o evento não ocorrer são $q:p-(1-p):p$ ou $(1-p)/p$.

27.2 PROBABILIDADE COMPOSTA

Dois ou mais eventos são considerados independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afetar as probabilidades de ocorrência dos demais.

Assim, se uma moeda é jogada quatro vezes e ocorre cara todas as vezes, o quinto arremesso pode ser cara ou coroa, sem ser influenciado pelos arremessos anteriores.

A probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem é igual ao produto das probabilidades individuais. Portanto, a probabilidade de obter cara em todos os cinco arremessos é de $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Dois ou mais eventos são considerados dependentes se a ocorrência ou não ocorrência de um deles afetar as probabilidades de ocorrência dos demais.

Suponhamos que dois ou mais eventos sejam dependentes. Se p_1 é a probabilidade do primeiro evento, p_2 é a probabilidade de o segundo ocorrer após o primeiro, p_3 é a probabilidade de, após o primeiro e o segundo eventos, o terceiro ocorrer, etc. Então, a probabilidade que todos os eventos ocorram é dada pelo produto $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots$.

Por exemplo, uma caixa contém três bolas brancas e duas pretas. Se uma bola é retirada ao acaso, a probabilidade de que seja preta é $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$. Se esta bola não for recolocada na caixa e uma segunda bola for retirada, a

By Possuidão

probabilidade de que esta também seja preta é $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$. Portanto, a probabilidade de ambas serem pretas é $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{10}$.

Diz-se que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles excluir a ocorrência dos demais.

A probabilidade de ocorrer um entre dois ou mais eventos mutuamente exclusivos é a *soma* das probabilidades dos eventos individuais.

Exemplo 27.1 Se um dado é jogado, qual é a probabilidade de obtermos cinco ou seis? Obter cinco e obter seis são eventos mutuamente exclusivos, de modo que

$$P(5 \text{ ou } 6) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Diz-se que dois ou mais eventos são não mutuamente exclusivos se tiverem pelo menos um resultado em comum e, portanto, puderem ocorrer ao mesmo tempo.

A probabilidade de ocorrer um entre dois ou mais eventos não mutuamente exclusivos é a soma das probabilidades dos eventos individuais menos a probabilidade de seus resultados em comum.

Exemplo 27.2 Se um dado é jogado, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 4 ou um número par?

Os números menores do que 4 são 1, 2 e 3. Os números pares em um dado são 2, 4 e 6. Como estes dois eventos têm um resultado em comum, 2, são não exclusivos.

$$\begin{aligned} P(\text{menor do que 4 ou par}) &= P(\text{menor do que 4}) + P(\text{par}) - P\,(\text{menor do que 4 e par}) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

27.3 ESPERANÇA MATEMÁTICA

Se p é a probabilidade de uma pessoa receber uma soma de dinheiro m, o valor de sua esperança é $p \cdot m$. Portanto, se a probabilidade de você ganhar um prêmio de \$ 10 é 1/5, sua esperança é $\frac{1}{5}$ (\$ 10) = \$ 2.

27.4 PROBABILIDADE BINOMIAL

Se p é a probabilidade de um evento ocorrer em qualquer tentativa e $q = 1 - p$ é a probabilidade de este evento não ocorrer, então a probabilidade de ele ocorrer exatamente r vezes em n tentativas é ${}_nC_r p^r q^{n-r}$. (Veja Problemas 27.22 e 27.23.)

A probabilidade de um evento ocorrer pelo menos r vezes em n tentativas é

$$p^n + {}_nC_1 p^{n-1} q + {}_nC_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + {}_nC_r p^r q^{n-r}.$$

Esta expressão é a soma dos primeiros $n - r + 1$ termos da expansão binomial de $(p + q)^n$. (Veja os Problemas 27.24 – 27.26.)

27.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade de um segundo evento ocorrer dado que o primeiro evento ocorreu é chamada de probabilidade condicional. Para encontrar esta probabilidade, divida a probabilidade de os dois eventos ocorrerem pela probabilidade do primeiro evento. A probabilidade de ocorrer um evento B dado que o evento A ocorreu é representada por $P(B|A)$.

Exemplo 27.3 Uma caixa contém fichas pretas e vermelhas. Uma pessoa retira da caixa duas fichas sem recolocá-las na caixa. Se a probabilidade de pegar uma ficha preta e uma vermelha é 15/56 e a probabilidade de retirar uma ficha preta na primeira vez é 3/4, qual é a probabilidade de retirarmos uma ficha vermelha na segunda vez, se já sabemos que a primeira ficha retirada era preta?

By Possuidão

Se B é o evento "retirar uma ficha preta" e R é o evento "retirar uma ficha vermelha" então $P(R|B)$ é a probabilidade de retirar uma ficha vermelha na segunda vez depois de ter retirado uma preta na primeira.

$$\begin{aligned} P(R|B) &= \frac{P(R \text{ e } B)}{P(B)} \\ &= \frac{15/56}{3/4} \\ &= \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de retirar uma ficha vermelha na segunda vez depois de ter retirado uma preta na primeira é 5/14.

Problemas Resolvidos

27.1 Uma bola é retirada ao acaso de uma caixa que contém 3 bolas vermelhas, 2 bolas brancas e 4 bolas azuis. Determine a probabilidade p de que ela seja (a) vermelha, (b) não vermelha, (c) branca, (d) vermelha ou azul.

SOLUÇÃO

(a) $p = \dfrac{\text{maneiras de retirar 1 das 3 bolas vermelhas}}{\text{maneiras de retirar 1 das } (3+2+4) \text{ bolas}} = \dfrac{3}{3+2+4} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

(b) $p = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ (c) $p = \dfrac{2}{9}$ (d) $p = \dfrac{3+4}{9} = \dfrac{7}{9}$

27.2 Uma bolsa contém 4 bolas brancas e 2 bolas pretas; outra bolsa contém 3 bolas brancas e 5 bolas pretas. Se retirarmos uma bola de cada bolsa, qual a probabilidade p de que (a) ambas sejam brancas, (b) ambas sejam pretas, (c) uma seja branca e a outra preta?

SOLUÇÃO

(a) $p = \left(\dfrac{4}{4+2}\right)\left(\dfrac{3}{3+5}\right) = \dfrac{1}{4}$ (b) $p = \left(\dfrac{2}{4+2}\right)\left(\dfrac{5}{3+5}\right) = \dfrac{5}{24}$

(c) Probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda preta $= \dfrac{4}{6}\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{5}{12}$.

Probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda branca $= \dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Estes eventos são mutuamente excludentes; portanto a probabilidade solicitada é

$$p = \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$$

Outro método.

$$p = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

27.3 Determine a probabilidade de obtermos o total 8 ao jogarmos dois dados de faces numeradas de 1 a 6 uma única vez.

SOLUÇÃO

Cada face de um dado pode ser combinada com qualquer face do outro dado; assim, o total de casos possíveis é $= 6 \cdot 6 = 36$ casos.

Existem cinco maneiras de obtermos 8: 2, 6; 3, 5; 4, 4; 5, 3; 6, 2.

$$\text{Probabilidade solicitada} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{5}{36}$$

By Possuidão

27.4 Qual é a probabilidade de se obter pelo menos um 1 ao jogarmos duas vezes um dado?

SOLUÇÃO

A probabilidade de não obter 1 em um lançamento do dado = 1 − 1/6 = 5/6.

A probabilidade de não obter 1 em dois lançamentos = (5/6)(5/6) = 25/36.

Portanto, a probabilidade de obter pelo menos um 1 em dois lançamentos = 1− 25/36 = 11/36.

27.5 A probabilidade de A ganhar um jogo de xadrez contra B é 1/3. Qual é a probabilidade de A ganhar ao menos uma partida em três jogos?

SOLUÇÃO

A probabilidade de A perder uma partida em um jogo é 1 − 1/3 = 2/3, e a de A perder todos os três jogos é $(2/3)^3 = 8/27$.

Portanto, a probabilidade de A ganhar pelo menos uma partida = 1 − 8/27 = 19/27.

27.6 Três cartas são retiradas de um baralho de 52, cada uma sendo recolocada no baralho antes de a outra ser retirada. Calcule a probabilidade p de que todas sejam (*a*) espadas, (*b*) ases, (*c*) vermelhas.

SOLUÇÃO

Um baralho de 52 cartas inclui 13 espadas, quatro ases e 26 cartas vermelhas.

$$(a)\quad p = \left(\frac{13}{52}\right)^3 = \frac{1}{64} \qquad (b)\quad p = \left(\frac{4}{52}\right)^3 = \frac{1}{2197} \qquad (c)\quad p = \left(\frac{26}{52}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

27.7 As chances de uma pessoa ganhar um prêmio de \$500 são de 23 a 2. Qual é sua esperança matemática?

SOLUÇÃO

$$\text{Esperança} = \text{probabilidade de ganhar} \times \text{soma em dinheiro} = \left(\frac{2}{23+2}\right)(\$\,500) = \$\,40$$

27.8 Nove ingressos, numerados de 1 a 9, estão dentro de uma caixa. Se dois deles são retirados ao acaso, determine a probabilidade p de:

(*a*) ambos serem ímpares.

(*b*) ambos serem pares.

(*c*) um ser par e o outro, ímpar.

(*d*) serem os de números 2 e 5.

SOLUÇÃO

Existem cinco ingressos ímpares e quatro pares.

$$(a)\quad p = \frac{\text{número de seleções de 2 entre 5 ingressos ímpares}}{\text{número de seleções de 2 entre 9 ingressos}} = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{18}$$

$$(b)\quad p = \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{6} \qquad (c)\quad p = \frac{{}_5C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{5\cdot 4}{36} = \frac{5}{9} \qquad (d)\quad p = \frac{{}_2C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{36}$$

27.9 Uma bolsa contém 6 bolas vermelhas, 4 brancas e 8 azuis. Se 3 bolas devem ser retiradas ao acaso, determine a probabilidade p de que:

(*a*) sejam todas vermelhas.

(*b*) sejam todas azuis.

(*c*) sejam 2 brancas e 1 vermelha.

(*d*) pelo menos uma seja vermelha.

(*e*) obtenhamos uma de cada cor.

(*f*) as bolas sejam retiradas na ordem: vermelha, branca, azul.

SOLUÇÃO

$$(a)\quad p = \frac{\text{número de seleções de 3 entre 6 bolas vermelhas}}{\text{número de seleções de 3 entre 18 bolas}} = \frac{{}_6C_3}{{}_{18}C_3} = \frac{5}{204}$$

$$(b)\quad p = \frac{{}_8C_3}{{}_{18}C_3} = \frac{7}{102}$$

$$(c)\quad p = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{18}C_3} = \frac{3}{68}$$

By Possuidão

(*d*) Probabilidade de que nenhuma seja vermelha $= \dfrac{(4+8)C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{{}_{12}C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{55}{204}$.

Portanto, a probabilidade de que pelo menos uma bola seja vermelha $= 1 - \dfrac{55}{204} = \dfrac{149}{204}$.

(*e*) $p = \dfrac{6\cdot 4\cdot 8}{{}_{18}C_3} = \dfrac{6\cdot 4\cdot 8}{18\cdot 17\cdot 16/6} = \dfrac{4}{17}$

(*f*) $p = \dfrac{4}{17}\cdot\dfrac{1}{3!} = \dfrac{4}{17}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{51}$ ou $p = \dfrac{6\cdot 4\cdot 8}{{}_{18}P_3} = \dfrac{6\cdot 4\cdot 8}{18\cdot 17\cdot 16} = \dfrac{2}{51}$

27.10 Três cartas são retiradas de um baralho de 52. Determine a probabilidade p de que:

(*a*) todas sejam ases.
(*b*) sejam todas ases e retiradas na ordem: espada, copas, ouros.
(*c*) todas sejam espadas.
(*d*) todas sejam do mesmo naipe.
(*e*) não haja duas de mesmo naipe.

SOLUÇÃO

(*a*) Existem ${}_{52}C_3$ seleções de três entre 52 cartas e ${}_4C_3$ seleções de três entre quatro ases.

Portanto, $$p = \frac{{}_4C_3}{{}_{52}C_3} = \frac{{}_4C_1}{{}_{52}C_3} = \frac{1}{5525}$$

(*b*) Existem ${}_{52}P_3$ ordens de retirar três de 52 cartas, sendo uma delas a ordem dada.

Portanto, $$p = \frac{1}{{}_{52}P_3} = \frac{1}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{1}{132\,600}$$

(*c*) Existem ${}_{13}C_3$ seleções de três entre 13 cartas de espadas.

Portanto, $$p = \frac{{}_{13}C_3}{{}_{52}C_3} = \frac{11}{850}$$

(*d*) Existem quatro naipes, cada um composto de 13 cartas. Portanto, existem quatro maneiras de selecionar um naipe e ${}_{13}C_3$ maneiras de selecionar três cartas de um dado naipe.

Portanto, $$p = \frac{4\cdot {}_{13}C_3}{{}_{52}C_3} = \frac{22}{425}$$

(*e*) Existem ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ maneiras de selecionar três entre quatro naipes, e $13\cdot 13\cdot 13$ maneiras de selecionar uma carta de cada um dos 3 naipes dados.

Portanto, $$p = \frac{4\cdot 13\cdot 13\cdot 13}{{}_{52}C_3} = \frac{169}{425}$$

27.11 Qual é a probabilidade de duas cartas diferentes de um baralho de 52 cartas bem embaralhadas estarem juntas, se não considerarmos seus naipes?

SOLUÇÃO

Considere a probabilidade de, por exemplo, um ás e um rei estarem juntos. Existem quatro ases e quatro reis em um baralho. Portanto, um ás pode ser escolhido de quatro maneiras e, depois disso, um rei pode ser escolhido de quatro maneiras. Portanto, um ás e depois um rei podem ser selecionados de $4\cdot 4$ maneiras. Da mesma forma, um rei e depois um ás podem ser escolhidos de 16 maneiras. Assim, um ás e um rei podem estar juntos de $2\cdot 16 = 32$ maneiras.

Para cada maneira (ás, rei), as demais 50 cartas e a combinação (rei, ás) podem ser permutadas de 51! maneiras. O número de arranjos favoráveis é, portanto, 32(51!). Como o número total de permutações de todas as cartas do baralho é 52!, a probabilidade solicitada é

$$\frac{32(51!)}{52!} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$$

27.12 Um homem possui dois bilhetes de loteria de um total de 20. Se existem dois bilhetes premiados, determine a probabilidade de que este homem tenha (*a*) ambos, (*b*) nenhum, (*c*) exatamente um deles.

By Possuidão

SOLUÇÃO

(*a*) Existem ${}_{20}C_2$ maneiras de selecionar dois bilhetes entre 20.

Portanto, a probabilidade de ganhar os prêmios é de $= \dfrac{1}{{}_{20}C_2} = \dfrac{1}{190}$.

Outro método. A probabilidade de ganhar o primeiro prêmio é 2/20 = 1/10. Após ganhar o primeiro prêmio (ele ainda tem um bilhete e sobram 19 bilhetes, dos quais será sorteado o segundo), a probabilidade de ganhar o segundo prêmio é de 1/19.

Portanto, a probabilidade de ganhar os prêmios é de $= \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{19}\right) = \dfrac{1}{190}$.

(*b*) Existem 20 bilhetes, 18 dos quais são não sorteados.

Portanto, a probabilidade de não ganhar qualquer prêmio é $= \dfrac{{}_{18}C_2}{{}_{20}C_2} = \dfrac{153}{190}$.

Outro método. A probabilidade de não ganhar o primeiro prêmio é 1 – 2/20 = 9/10. Se ele não ganhar o primeiro prêmio (ele ainda tem dois bilhetes), a probabilidade de não ganhar o segundo é de 1 – 2/19 = 17/19.

Portanto, a probabilidade de não ganhar qualquer prêmio é $= \dfrac{9}{10}\left(\dfrac{17}{19}\right) = \dfrac{153}{190}$.

(*c*) Probabilidade de ganhar exatamente um prêmio

= 1 – probabilidade de não ganhar prêmio algum – probabilidade de ganhar ambos

$$= 1 - \frac{153}{190} - \frac{1}{190} = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}.$$

Outro método.

Probabilidade de ganhar o primeiro prêmio mas não o segundo $= \dfrac{2}{20}\left(\dfrac{18}{19}\right) = \dfrac{9}{95}$

Probabilidade de não ganhar o primeiro prêmio mas ganhar o segundo $= \dfrac{18}{20}\left(\dfrac{2}{19}\right) = \dfrac{9}{95}$

Portanto, a probabilidade de ganhar exatamente um prêmio $= \dfrac{9}{95} + \dfrac{9}{95} = \dfrac{18}{95}$

27.13 Uma caixa contém sete bilhetes, numerados de 1 a 7. Se três bilhetes são retirados da caixa, um por vez, determine a probabilidade de eles serem alternadamente ímpar, par, ímpar ou par, ímpar, par.

SOLUÇÃO

A probabilidade de o primeiro bilhete retirado ser ímpar (4/7), o segundo ser par (3/6) e o terceiro ser ímpar (3/5) é $\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{3}{6}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{6}{35}$.

A probabilidade de o primeiro bilhete retirado ser par (3/7), o segundo ser par (4/6) e o terceiro ser ímpar (2/5) é $\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{4}{6}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4}{35}$.

Portanto, a probabilidade é $= \dfrac{6}{35} + \dfrac{4}{35} = \dfrac{2}{7}$.

Outro método. As ordens possíveis de sete números tomados três por vez são ${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
Ordens nas quais os números são alternadamente ímpar, par, ímpar $= 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Ordens nas quais os números são alternadamente par, ímpar, par $= 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

Portanto, a probabilidade solicitada $= \dfrac{36 + 24}{210} = \dfrac{60}{210} = \dfrac{2}{7}$.

By Possuidão

27.14 A probabilidade de A poder resolver um dado problema é 4/5, a de B é 2/3 e a de C é 3/7. Se os três tentarem, calcule a probabilidade de o problema ser resolvido.

SOLUÇÃO

A probabilidade de A não resolver o problema é $1 - 4/5 = 1/5$ enquanto a de B é $1 - 2/3 = 1/3$ e a de C é $1 - 3/7 = 4/7$.

A probabilidade de nenhum deles resolver é $= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right)$.

Portanto, a probabilidade de os três não falharem, isto é, de pelo menos um deles resolver o problema, é

$$1 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = 1 - \frac{4}{105} = \frac{101}{105}$$

27.15 A probabilidade de que um certo homem esteja vivo daqui a 25 anos é 3/7, e a probabilidade de que sua mulher esteja viva daqui a 25 anos é 4/5. Determine a probabilidade de, daqui a 25 anos (*a*) ambos estarem vivos, (*b*) pelo menos um deles estar vivo, (*c*) apenas o homem estar vivo.

SOLUÇÃO

(*a*) Probabilidade de que ambos estejam vivos $= \frac{3}{7}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{35}$

(*b*) Probabilidade de que ambos estejam mortos em 25 anos $= \left(1 - \frac{3}{7}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{35}$

Portanto, a probabilidade de pelo menos um estar vivo $= 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$

(*c*) A probabilidade de que o homem esteja vivo = 3/7, e a probabilidade de que sua esposa não esteja = 1 – 4/5 = 1/5.

Portanto, a probabilidade de que apenas o homem esteja vivo $= \frac{3}{7}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{35}$

27.16 Existem três candidatos, A, B e C, para um cargo. As chances de A ganhar são de 7 para 5, e as de B ganhar são de 1 para 3. (*a*) Qual é a probabilidade de A ou B ganhar? (*b*) Quais são as chances a favor de C?

SOLUÇÃO

(*a*) Probabilidade de A ganhar: $\frac{7}{7+5} = \frac{7}{12}$

Probabilidade de B ganhar: $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$

Probabilidade de A ou B ganhar $= \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$

(*b*) Probabilidade de C ganhar: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Portanto, as chances a favor de C são de 1 para 5.

27.17 Uma bolsa contém cinco *dimes* e dois quartos, e uma segunda bolsa contém um *dime* e três quartos. Se uma moeda é retirada de uma das bolsas, qual é a probabilidade de que ela seja um quarto?

SOLUÇÃO

A probabilidade de selecionar a primeira bolsa (1/2) e de selecionar uma moeda de quarto (2/7) é (1/2)(2/7) = 1/7. A probabilidade de selecionar a segunda bolsa (1/2) e de selecionar uma moeda de quarto (3/4) é (1/2)(3/4) = 3/8.

Portanto, a probabilidade solicitada $= \frac{1}{7} + \frac{3}{8} = \frac{29}{56}$.

By Possuidão

27.18 Uma bolsa contém duas bolas brancas e três pretas. Quatro pessoas, *A, B, C, D,* nesta ordem, retiram da bolsa uma bola cada uma e não as recolocam. A primeira a retirar uma bola branca ganha \$ 10. Determine suas esperanças.

SOLUÇÃO

Probabilidade de *A* ganhar $= \frac{2}{5}$, e sua esperança $= \frac{2}{5}(\$10) = \$4$.

Para encontrar a esperança de *B:* probabilidade de *A* falhar = 1 − 2/5 = 3/5. Se *A* falhar, a bolsa conterá duas bolas brancas e duas pretas. Portanto, a probabilidade de *B* ganhar é de 2/4 = 1/2. Portanto, a probabilidade de *B* ganhar é de (3/5)(1/2) = 3/10, e sua esperança é \$ 3.

Para encontrar a esperança de *C:* a probabilidade de *A* falhar = 3/5, e a probabilidade de *B* também falhar é de 1 − 1/2 = 1/2. Se *A* e *B* falharem, a bolsa conterá duas bolas brancas e uma preta. Portanto, a probabilidade de *C* ganhar é de 2/3. Assim, a probabilidade de *C* ganhar é de $= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$, e sua esperança é $\frac{1}{5}(\$10) = \$2$.

Se *A, B* e *C* falharem, sobrarão apenas bolas brancas e *D* ganhará. Portanto, a probabilidade de *D* ganhar é $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{10}$, e a sua esperança é $\frac{1}{10}(\$10) = \$1$.

Verificação: $\$4 + \$3 + \$2 + \$1 = \$10$ e $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$

27.19 Onze livros, sendo cinco de Engenharia, quatro de Matemática e dois de Química, são colocados ao acaso em uma estante. Qual é a probabilidade *p* de os livros de uma mesma área ficarem todos juntos?

SOLUÇÃO

Quando os livros de uma mesma área estão todos juntos, os de Engenharia podem ser arranjados entre si de 5! maneiras, os de matemática de 4! maneiras, os de química de 2! maneiras, e os três grupos de 3! maneiras.

$$p = \frac{\text{maneiras de livros de cada área ficarem juntos}}{\text{maneiras de organizar 11 livros}} = \frac{5!4!2!3!}{11!} = \frac{1}{1155}$$

27.20 Cinco blocos vermelhos e quatro brancos são colocados em fila ao acaso. Qual a probabilidade *p* de os blocos dos extremos serem vermelhos?

SOLUÇÃO

Número total de maneiras de organizar cinco vermelhos e quatro brancos $= \frac{(5+4)!}{5!4!} = \frac{9!}{5!4!} = 126$

Número de maneiras de organizá-los com dois vermelhos nas extremidades $= \frac{(9-2)!}{(5-2)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$

Portanto, a probabilidade solicitada é $p = \frac{35}{126} = \frac{5}{18}$.

27.21 Uma bolsa contém seis moedas de cobre e uma de prata; uma segunda bolsa contém quatro moedas de cobre. Cinco moedas são retiradas da primeira bolsa e colocadas na segunda, e depois duas são retiradas da segunda e colocadas na primeira. Determine a probabilidade de a moeda de prata estar

(*a*) na segunda bolsa,

(*b*) na primeira bolsa.

SOLUÇÃO

Inicialmente, a primeira bolsa contém sete moedas. Quando cinco são retiradas dela e colocadas na segunda, a probabilidade de que a moeda de prata seja colocada na segunda bolsa é 5/7, e a probabilidade de que prata permaneça na primeira bolsa é 2/7.

A segunda bolsa agora contém 5 + 4 = 9 moedas. Finalmente, depois de duas destas nove moedas terem sido colocadas na primeira bolsa, a probabilidade de que a moeda de prata esteja na segunda é $\frac{5}{7}\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{5}{9}$ e a probabilidade de que esteja na primeira $= \frac{2}{7} + \frac{5}{7}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}\left(\text{ou } 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}\right)$.

27.22 Calcule a probabilidade de que um único lançamento de nove dados resulte 1 em exatamente dois deles.

By Possuidão

SOLUÇÃO

A probabilidade de que em um certo par dos nove dados apareça 1 é $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. A probabilidade de que não apareça 1 nos outros sete dados é $\left(1-\frac{1}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$. Como podem ser formados ${}_9C_2$ pares diferentes com os nove dados, a probabilidade de termos exatamente um par de 1 é ${}_9C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{78\,125}{279\,936}$.

Ou, pela fórmula: probabilidade $= {}_nC_r\, p^r q^{n-r} = {}_9C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{78\,125}{279\,936}$.

27.23 Qual é a probabilidade de obtermos 9 na soma das duas faces de um par de dados, exatamente uma vez, em três lançamentos?

SOLUÇÃO

Um 9 pode ocorrer de quatro maneiras: 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3.

Em qualquer lançamento de um par de dados, a probabilidade de obter $9 = 4/(6\cdot 6) = \frac{1}{9}$, e a probabilidade de não obter $9 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. A probabilidade de um lançamento qualquer de um par de dados seja um 9 e que os outros dois não sejam é de $\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Como existem ${}_3C_1 = 3$ maneiras distintas de obtermos exatamente um 9 em três lançamentos, a probabilidade é ${}_3C_1\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$.

Ou, pela fórmula: probabilidade ${}_3C_1\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$.

27.24 Se a probabilidade de um estudante de nível médio não completar o curso em quatro anos é 1/3, qual é a probabilidade p de, entre quatro estudantes de nível médio, pelo menos três completarem quatro anos escolares?

SOLUÇÃO

Probabilidade de três completarem e um não $= {}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$.

Probabilidade de os quatro completarem $= \left(\frac{2}{3}\right)^4$. Portanto, $p = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$.

Ou, pela fórmula: $p =$ primeiros 2 $(n - r + 1 = 4 - 3 + 1)$ termos da expansão de

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{81}+\frac{32}{81} = \frac{16}{27}$$

27.25 Uma moeda é lançada seis vezes. Qual é a probabilidade p de obter pelo menos três vezes cara? Quais são as chances de obter pelo menos três vezes cara?

SOLUÇÃO

Em cada lançamento, a probabilidade de obter cara é igual à de obter coroa, que é 1/2.

A probabilidade de obtermos cara em três determinados lançamentos dos seis é $(1/2)^3$. A probabilidade de não obtermos cara nos outros lançamentos é $(1/2)^3$. Como há ${}_6C_3$ maneiras distintas de escolhermos três lançamentos em seis, a probabilidade de obtermos exatamente três caras é

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

By Possuidão

Da mesma forma,

probabilidade de obtermos exatamente quatro caras $= {}_6C_4(1/2)^6 = {}_6C_2(1/2)^6$.
probabilidade de obtermos exatamente cinco caras $= {}_6C_5(1/2)^6 = {}_6C_1(1/2)^6$.
probabilidade de obtermos exatamente seis caras $= (1/2)^6$.

$$\text{Portanto, } p = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 (1 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 (1 + 6 + 15 + 20) = \frac{21}{32}.$$

As chances de obtermos pelo menos três caras são 21:11 ou 21/11.

Ou, pela fórmula: p = primeiros 4 $(n - r + 1 = 6 - 3 + 1)$ termos da expansão de

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32}$$

27.26 Determine a probabilidade p de, em uma família com cinco filhos, existirem pelo menos dois meninos e uma menina. Considere a probabilidade de nascer homem igual a 1/2.

SOLUÇÃO

Os três casos favoráveis são: 2 meninos, 3 meninas; 3 meninos, 2 meninas; 4 meninos, 1 menina.

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^5 ({}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4) = \frac{1}{32}(10 + 10 + 5) = \frac{25}{32}$$

27.27 A probabilidade de um estudante escolher química e estar na lista dos melhores alunos é 0,042. A probabilidade de um aluno estar na lista dos melhores é 0,21. Qual é a probabilidade de o aluno escolher química, sabendo-se que está na lista dos melhores?

SOLUÇÃO

$$P\text{ (escolher química | estar na lista dos melhores)} = \frac{P\text{ (escolher química e estar na lista dos melhores)}}{P\text{ (estar na lista dos melhores)}}$$
$$= \frac{0{,}042}{0{,}21}$$
$$= 0{,}2$$

27.28 No Country Club, 32% dos membros jogam golfe e são mulheres. Além disso, 80% dos membros jogam golfe. Se um membro do clube é selecionado ao acaso, encontre a probabilidade de este membro ser mulher, dado que joga golfe.

SOLUÇÃO

$$P\text{ (ser mulher | jogar golfe)} = \frac{P\text{ (mulher e jogar golfe)}}{P\text{ (jogar golfe)}}$$
$$= \frac{0{,}32}{0{,}8}$$
$$= 0{,}4$$

Problemas Complementares

27.29 Determine a probabilidade de um dígito, escolhido ao acaso entre os dígitos 1, 2, 3, ..., 9, ser (*a*) ímpar, (*b*) par, (*c*) um múltiplo de 3.

27.30 Uma moeda é lançada três vezes. Se H = cara e T = coroa, qual é a probabilidade de os lançamentos resultarem na seguinte lista: (*a*) HTH, (*b*) THH, (*c*) HHH?

By Possuidão

27.31 Se três moedas são lançadas, qual é a probabilidade de obter
(*a*) três caras, (*b*) duas caras e uma coroa?

27.32 Determine a probabilidade de obter soma igual a 7 em um único lançamento de dois dados.

27.33 Qual é a probabilidade de obter soma igual a 8 ou 11 em um único lançamento de dois dados?

27.34 Um dado é lançado duas vezes. Qual é a probabilidade de obter 4 ou 5 no primeiro lançamento e 2 ou 3 no segundo? Qual é a probabilidade de não obter 1 em lançamento algum?

27.35 Qual é a probabilidade de obtermos cara pelo menos uma vez em seis lançamentos de uma moeda?

27.36 Cinco discos em uma sacola estão numerados de 1 a 5. Qual é a probabilidade de a soma dos números de três discos escolhidos ao acaso ser maior do que 10?

27.37 Três bolas são retiradas ao acaso de uma caixa que contém 5 bolas vermelhas, 8 pretas e 4 brancas. Determine a probabilidade de (*a*) as três serem brancas, (*b*) duas serem pretas e uma ser vermelha, (*c*) serem uma de cada cor.

27.38 Quatro cartas são retiradas de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de (*a*) todas serem reis, (*b*) duas serem reis e duas serem ases, (*c*) serem do mesmo naipe, (*d*) serem de copas.

27.39 Uma mulher ganhará \$ 3,20 se, em cinco lançamentos de uma moeda, ela obtiver as seqüências HTHTH ou THTHT, onde H = cara e T = coroa. Determine sua esperança.

27.40 Em um acidente de avião, foi anunciado que três pessoas em um total de 20 passageiros ficaram feridas. Três repórteres estavam neste avião. Qual é a probabilidade de as três pessoas feridas serem os três repórteres?

27.41 Uma comissão de três pessoas deve ser escolhida de um grupo de 5 homens e 4 mulheres. Se a seleção é feita ao acaso, encontre a probabilidade de (*a*) as três pessoas serem mulheres, (*b*) duas pessoas serem homens

27.42 Seis pessoas sentam-se ao redor de uma mesa circular. Qual é a probabilidade de duas pessoas específicas se sentarem lado a lado?

27.43 *A* e *B* lançam alternadamente uma moeda. O primeiro a obter cara ganha o jogo. Se nenhum puder fazer mais do que cinco lançamentos, determine a probabilidade de a primeira pessoa a lançar a moeda ganhar o jogo. Quais são as chances de quem começa perder o jogo?

27.44 Seis blocos vermelhos e 4 blocos brancos são dispostos em fila ao acaso. Determine a probabilidade de os dois blocos do meio serem da mesma cor.

27.45 Determine a probabilidade de, em 8 lançamentos de uma moeda, obtermos (*a*) exatamente quatro caras, (*b*) pelo menos 2 coroas, (*c*) no máximo 5 caras, (*d*) exatamente 3 coroas.

27.46 Em dois lançamentos de um par de dados, determine a probabilidade de obtermos soma igual a (*a*) 11 exatamente uma vez, (*b*) 10 duas vezes.

27.47 Qual é a probabilidade de obtermos 11 em pelo menos três lançamentos de um par de dados?

27.48 Em dez lançamentos de uma moeda, qual é a probabilidade de obtermos não menos de três caras e não mais de seis caras?

By Possuidão

27.49 A probabilidade de um automóvel ser roubado e encontrado dentro de uma semana é 0,0006 e a de ser roubado é 0,0015. Qual é a probabilidade de um automóvel roubado ser encontrado em uma semana?

27.50 No Palácio das Pizzas, 95% dos clientes encomendam pizza. Se 65% dos clientes que encomendam pizza também encomendarem pão, determine a probabilidade de um cliente que encomenda pizza também encomendar pão.

27.51 Em um *shopping*, uma agência de publicidade realizou uma enquete com 100 pessoas sobre a existência de uma área para fumante no *shopping*. Dos 60 não-fumantes entrevistados, 48 eram favoráveis à existência de área para fumantes. Dos 40 fumantes entrevistados, 32 eram favoráveis. Qual é a probabilidade de uma pessoa selecionada ao acaso ser favorável à área para fumantes, sabendo-se que ela é não-fumante?

27.52 Em uma nova subdivisão dos cômodos de residências, 35% das casas têm estar íntimo e lareira, 70% têm apenas estar íntimo. Qual é a probabilidade de uma casa selecionada ao acaso nesta nova subdivisão ter lareira, sabendo-se que ela tem estar íntimo?

Respostas dos Problemas Complementares

27.29 (*a*) 5/9 (*b*) 4/9 (*c*) 1/3

27.30 (*a*) 1/8 (*b*) 1/8 (*c*) 1/8

27.31 (*a*) 1/8 (*b*) 3/8

27.32 1/6

27.33 7/36

27.34 1/9, 25/36

27.35 63/64

27.36 1/5

27.37 (*a*) $\frac{1}{170}$ (*b*) $\frac{7}{34}$ (*c*) $\frac{4}{17}$

27.38 (*a*) $\frac{1}{270\,725}$ (*b*) $\frac{36}{270\,725}$ (*c*) $\frac{44}{4165}$ (*d*) $\frac{11}{4165}$

27.39 20 centavos

27.40 1/1140

27.41 (*a*) 1/21 (*b*) 10/21

27.42 2/5

27.43 $\frac{21}{32}$, 21:11

27.44 $\frac{7}{15}$

27.45 (*a*) $\frac{35}{128}$ (*b*) $\frac{247}{256}$ (*c*) $\frac{219}{256}$ (*d*) $\frac{7}{32}$

27.46 (*a*) $\frac{17}{162}$ (*b*) $\frac{1}{144}$

By Possuidão

27.47 $\frac{919}{5832}$

27.48 $\frac{99}{128}$

27.49 0,4

27.50 $\frac{13}{19}$ (aproximadamente 68%)

27.51 0,8

27.52 0,5

By Possuidão

Capítulo 28

Determinantes e Sistemas de Equações Lineares

28.1 DETERMINANTES DE SEGUNDA ORDEM

O símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

composto de quatro números a_1, b_1, a_2, b_2 arranjados em duas linhas e duas colunas, é denominado *determinante de segunda ordem* ou *determinante de ordem dois*. Os quatro números são denominados *elementos* do determinante. Por definição,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Então,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (3)(-1) = -4 + 3 = -1$$

Aqui, os elementos 2 e 3 estão na primeira linha e os elementos –1 e –2, na segunda. Os elementos 2 e –1 estão na primeira coluna e os elementos 3 e –2, na segunda. Um determinante é um número.

Um determinante de ordem um é o próprio número.

28.2 REGRA DE CRAMER

Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas podem ser resolvidos pelo emprego de determinantes de segunda ordem. Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

é possível, por qualquer método do Capítulo 15, obter

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \qquad (a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0)$$

Esses valores para x e y podem ser escritos em termos de determinantes de segunda ordem como segue:

By Possuidão

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2}$$

É fácil lembrar a fórmula envolvendo determinantes quando se tem em mente o seguinte:

(*a*) Os denominadores em (2) são dados pelo determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

no qual os elementos são os coeficientes de x e y arranjados na forma em que aparecem nas equações (1). Esse determinante, geralmente representado por D, chama-se *determinante dos coeficientes.*

(b) O numerador na solução para qualquer das incógnitas é o mesmo determinante dos coeficientes D, exceto que a coluna de coeficientes da incógnita a ser determinada é substituída pela coluna de constantes no lado direito das equações (1). Quando a coluna de coeficientes para a variável x no determinante D for substituída pela coluna de constantes, chamamos o novo determinante D_x. Quando a coluna dos coeficientes de y no determinante D for substituída pela coluna de constantes, chamamos o novo determinante D_y.

Exemplo 28.1 Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

O denominador para x e y é $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3(1) = -7.$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 3(-3) = -7, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 8(1) = -14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Assim, a solução do sistema é (1, 2).

O método de solução de equações lineares por determinantes é chamado de *Regra de Cramer*. Se o determinante D for igual a zero, então esta regra não poderá ser utilizada para resolver o sistema.

28.3 DETERMINANTES DE TERCEIRA ORDEM

O símbolo

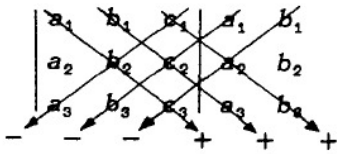
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

composto de nove números arranjados em três linhas e três colunas, é chamado de *determinante de terceira ordem.* Por definição, o valor desse determinante é dado por

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

e é chamado de expansão do determinante.

Para lembrar essa definição, apresentamos o seguinte esquema. Reescreva as duas primeiras colunas à direita do determinante como mostrado:



(*a*) Forme os produtos dos elementos em cada uma das três diagonais mostradas que correm da esquerda para a direita e de cima para baixo, precedendo cada um desses termos do sinal positivo.

By Possuidão

(*b*) Forme os produtos dos elementos em cada uma das três diagonais mostradas que correm da direita para a esquerda e de cima para baixo, precedendo cada um desses termos do sinal negativo.

(*c*) A soma algébrica dos seis produtos de (*a*) e (*b*) é a expansão do determinante.

Exemplo 28.2

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Reescrevendo,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

O valor do determinante é

$$(3)(1)(2) + (-2)(-1)(-2) + (2)(6)(-3) - (2)(1)(-2) - (3)(-1)(-3) - (-2)(6)(2) = -15.$$

A Regra de Cramer para equações lineares a três incógnitas é um método de resolução das seguintes equações para x, y e z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{3}$$

por determinantes. É uma extensão da Regra de Cramer para equações lineares a duas incógnitas. Se resolvermos as equações (3) pelos métodos do Capítulo 12, obtermos

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + c_1d_2b_3 + b_1c_2d_3 - c_1b_2d_3 - b_1d_2c_3 - d_1c_2b_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 + c_1a_2d_3 + d_1c_2a_3 - c_1d_2a_3 - d_1a_2c_3 - a_1c_2d_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + d_1a_2b_3 + b_1d_2a_3 - d_1b_2a_3 - b_1a_2d_3 - a_1d_2b_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

Essas equações podem ser escritas em termos de determinantes como:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D} \tag{4}$$

D é o determinante dos coeficientes de x, y e z nas equações (3) e pressupõe-se que seja não-nulo. Se D for igual a zero, a Regra de Cramer não poderá ser utilizada para resolver o sistema de equações.

É fácil lembrar a fórmula envolvendo determinantes se tivermos em mente que:

(*a*) Os denominadores em (4) são dados pelo determinante D, no qual os elementos são os coeficientes de x, y e z arranjados da forma em que aparecem nas equações dadas (3).

(*b*) O numerador na solução de qualquer incógnita é o mesmo do determinante dos coeficientes D, exceto em que a coluna de coeficientes da incógnita a ser determinada é substituída pela coluna de constantes no lado direito das equações (3).

(*c*) A solução do sistema é (x, y, z), onde $x = \dfrac{D_x}{D}$, $\quad y = \dfrac{D_y}{D}$ $\quad$ e $\quad z = \dfrac{D_z}{D}$.

By Possuidão

Exemplo 28.3 Resolva o sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 3x+y+z=4 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2+2+3+1+1-12=-3$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6+12+4+6-3-16=-3$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}=8-3-18+4-6+18=3$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}=6+8+9+3+4-36=-6$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-3}{-3}=1, \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3}{-3}=-1, \qquad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-6}{-3}=2$$

A solução do sistema é $(1, -1, 3)$.

Problemas Resolvidos

28.1 Calcule os determinantes.

(*a*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=(3)(4)-(2)(1)=12-2=10$

(*b*) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=(3)(-2)-(-1)(6)=-6+6=0$

(*c*) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=(0)(-5)-(3)(2)=0-6=-6$

(*d*) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{vmatrix}=xy^2-x^2y$

(*e*) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+5 \\ 3x-1 & x-3 \end{vmatrix}=(x+2)(x-3)-(2x+5)(3x-1)=-5x^2-14x-1$

28.2 (*a*) Demonstre que se as linhas e as colunas de um determinante de ordem dois forem trocadas entre si, o valor do determinante permanecerá inalterado.

(*b*) Demonstre que se os elementos de uma linha (ou coluna) forem respectivamente proporcionais aos elementos da outra linha (ou coluna), o determinante será igual a zero.

SOLUÇÃO

(*a*) Suponhamos que o determinante seja $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$.

O determinante com linhas e colunas trocadas de forma que a primeira linha torna-se a primeira coluna e a segunda linha torna-se a segunda coluna é $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$.

(*b*) O determinante com linhas proporcionais é $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix}=a_1kb_1-b_1ka_1=0$.

By Possuidão

28.3 Determine os valores de x para os quais $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0.$

SOLUÇÃO

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (2x+1)(x+1) = 6x^2 - 3x - 3 = 0$$

Então, $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1) = 0$, de forma que $x = 1, -1/2$.

28.4 Solucione os seguintes sistemas, utilizando determinantes.

(*a*) $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -22, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -22, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-22} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{-22} = \frac{1}{2}$$

A solução do sistema é (1, 1/2).

(*b*) $\begin{cases} 3u + 2v = 18 \\ -5u - v = 12 \end{cases}$

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -7, \qquad D_u = \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = -42, \qquad D_v = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = 126$$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{-42}{7} = -6, \qquad v = \frac{D_v}{D} = \frac{126}{7} = 18$$

A solução do sistema é (–6, 18).

(*c*) $\begin{cases} 5x - 2y - 14 = 0 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

SOLUÇÃO

Reescrevamos como $\begin{cases} 5x - 2y = 14 \\ 2x + 3y = -3. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 19, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 36, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -43$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{36}{19}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-43}{19}$$

A solução do sistema é (36/19, – 43/19).

28.5 Resolva para x e y.

(*a*) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{5} + \dfrac{7y+1}{10} = 10 \quad (1) & \text{Multiplicando (1) por 10: } 6x + 7y = 103. \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{2y-5}{3} = 3 \quad (2) & \text{Multiplicando (2) por 6: } 3x - 4y = -1. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -45, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 103 & 7 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -405, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 6 & 103 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -315$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-405}{-45} = 9, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-315}{-45} = 7$$

A solução do sistema é (9, 7).

By Possuidão

(*b*) $\begin{cases} \dfrac{2}{y+1} - \dfrac{3}{x+1} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{2}{x-7} + \dfrac{3}{2y-3} = 0 \quad (2) \end{cases}$ Multiplicando (1) por $(x+1)(y+1)$: $2x - 3y = 1$.
Multiplicando (2) por $(x-7)(2y-3)$: $3x + 4y = 27$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 27 & 4 \end{vmatrix} = 85, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} = 51$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{85}{17} = 5, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{51}{17} = 3$$

A solução do sistema é (5, 3).

28.6 Resolva o seguinte sistema de equações.

(*a*) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Essas são equações lineares em $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{y}$.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 21, \qquad D_{1/x} = \begin{vmatrix} 1/6 & -6 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}, \qquad D_{1/y} = \begin{vmatrix} 3 & 1/6 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{D_{1/x}}{D} = \frac{7/2}{21} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{y} = \frac{D_{1/y}}{D} = \frac{7/6}{21} = \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{1/6} = 6, \qquad y = \frac{1}{1/y} = \frac{1}{1/18} = 18$$

A solução do sistema é (6, 18).

(*b*) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x} + \dfrac{8}{5y} = 3 \\ \dfrac{4}{3y} - \dfrac{1}{x} = 1 \end{cases}$ podem ser escritas $\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 3 \\ -\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3/2 & 8/5 \\ -1 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{18}{5}, \qquad D_{1/x} = \begin{vmatrix} 3 & 8/5 \\ 1 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{12}{5}, \qquad D_{1/y} = \begin{vmatrix} 3/2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{D_{1/x}}{D} = \frac{12/5}{18/5} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{y} = \frac{D_{1/y}}{D} = \frac{9/2}{18/5} = \frac{5}{4}$$

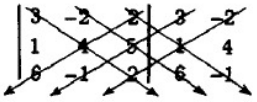
$$x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{1}{1/y} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$$

A solução do sistema é (3/2, 4/5).

28.7 Calcule os determinantes.

(*a*) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Repetindo as primeiras duas colunas:



$$(3)(4)(2) + (-2)(5)(6) + (2)(1)(-1) - (2)(4)(6) - (3)(5)(-1) - (-2)(1)(2) = -67$$

By Possuidão

(*b*) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 29$

(*c*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -15$

(*d*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(*e*) $\begin{vmatrix} (x-2) & (y+3) & (z-2) \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11x + 6y + z - 6$

28.8 (*a*) Demonstre que se duas linhas (ou duas colunas) de um determinante de terceira ordem tiverem seus elementos correspondentes proporcionais, então o valor do determinante será zero.

(*b*) Demonstre que se os elementos de qualquer linha (ou coluna) forem multiplicados por qualquer constante e adicionados aos elementos correspondentes de qualquer outra linha (ou coluna), o valor do determinante permanecerá inalterado.

SOLUÇÃO

(*a*) Devemos provar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

onde os elementos da primeira e da segunda linha são proporcionais. Isso é demonstrado pela expansão do determinante.

(*b*) Suponhamos que o determinante considerado seja

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Devemos demonstrar que, se k é qualquer constante,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + ka_2 & b_3 + kb_2 & c_3 + kc_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

onde multiplicamos cada elemento da segunda linha do determinante considerado por k e o adicionamos ao elemento correspondente da terceira linha. O resultado é provado pela expansão dos determinantes, demonstrando que eles são iguais.

28.9 Solucione os sistemas de equações.

(*a*) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -3 \\ x - 3y - 3z = -2 \end{cases}$

Aqui $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 42$ e

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 42 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 84 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

By Possuidão

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{42}{42} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{84}{42} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-42}{42} = -1$$

A solução do sistema é (1, 2, –1).

(*b*) $\begin{cases} x + 2z = 7 \\ 3x + y = 5 \\ 2y - 3z \ -5 \end{cases}$

Escrevamos como $\begin{cases} x + 0y + 2z = 7 \\ 3x + y + 0z = 5 \\ 0x + 2y - 3z = -5 \end{cases}$

Então, $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9$ e

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 18 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 27$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{9} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{9} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{27}{9} = 3$$

A solução do sistema é (1, 2, 3).

28.10 As equações para as correntes i_1, i_2, i_3 em um dado circuito elétrico são

$$\begin{cases} 3i_1 - 2i_2 + 4i_3 = 2 \\ i_1 + 3i_2 - 6i_3 = 8 \\ 2i_1 - i_2 - 2i_3 = 0 \end{cases}$$

Determine i_3.

SOLUÇÃO

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2}$$

Problemas Complementares

28.11 Calcule os determinantes:

(*a*) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (*b*) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ (*c*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

(*d*) $\begin{vmatrix} -2x & -3y \\ 4x & -y \end{vmatrix}$ (*e*) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a & -b \end{vmatrix}$ (*f*) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix}$

28.12 Demonstre que, se os elementos de uma linha (ou coluna) de um determinante de segunda ordem forem multiplicados por um mesmo número, o determinante resultará multiplicado pelo mesmo número.

By Possuidão

28.13 Resolva as incógnitas nos sistemas abaixo.

(a) $\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3r-5s=-6 \\ 4r+2s=5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 28+4x+5y=0 \\ -3x+4y+10=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 5x-4y=16 \\ 2x+3y=-10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3}+\dfrac{y+4}{5}=7 \\ \dfrac{x+2}{7}-\dfrac{y-6}{2}=-3 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dfrac{3x+2y+1}{x+y}=4 \\ \dfrac{5x+6y-7}{x+y}=2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=-\dfrac{1}{12} \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dfrac{4}{3u}-\dfrac{3}{5v}=1 \\ \dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

28.14 Calcule os determinantes.

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

28.15 Para qual valor de k

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -k & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0?$$

28.16 Demonstre que, se os elementos de uma linha (ou coluna) de um determinante de terceira ordem forem multiplicados pelo mesmo número, o determinante resultará multiplicado pelo mesmo número.

28.17 Resolva as incógnitas nos sistemas abaixo.

(a) $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ 2x+3y-z=2 \\ x-2y+2z=-10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u+2v-3w=-7 \\ 2u-v+w=5 \\ 3u-v+2w=8 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 5y-2z=4 \\ 3z+4x=-7 \end{cases}$

28.18 Resolva a incógnita indicada nos sistemas abaixo.

(a) $\begin{cases} 3i_1+i_2+2i_3=0 \\ i_1+2i_2-3i_3=5 \\ 2i_1-i_2+i_3=-1 \end{cases}$ para i_2 (b) $\begin{cases} 1/x+2/y+1/z=1/2 \\ 4/x+2/y-3/z=2/3 \\ 3/x-4/y+4/z=1/3 \end{cases}$ para x

Respostas dos Problemas Complementares

28.11 (a) 5 (b) -2 (c) 4 (d) $14xy$ (e) $-a^2-b^2$ (f) x^2-8x

28.13 (a) $x=2,\ y=-3;\ (2,-3)$
(b) $r=1/2,\ s=3/2;\ (1/2,3/2)$
(c) $x=-2,\ y=-4;\ (-2,-4)$
(d) $x=8/23,\ y=-82/23;\ (8/23,-82/23)$
(e) $x=12,\ y=16;\ (12,16)$
(f) $x=5y=-2;\ (5,-2)$
(g) $x=12,\ y=15;\ (12,15)$
(h) $u=2/3,\ v=3/5;\ (2/3,3/5)$

By Possuidão

28.14 (*a*) 43 (*b*) 19 (*c*) 0 (*d*) $5x + 8y - 14z$ (*e*) $bc^2 - cb^2 + a^2c - ac^2 + ab^2 - ba^2$

28.15 Todos os valores de k.

28.17 (*a*) $x = -2,\ y = 1,\ z = -3;\ (-2, 1, -3)$
(*b*) $u = 1,\ v = -1,\ w = 2;\ (1, -1, 2)$
(*c*) $x = -4,\ y = 2,\ z = 3;\ (-4, 2, 3)$

28.18 (*a*) $i_2 = 0{,}8$ (*b*) $x = 6$

By Possuidão

Capítulo 29

Determinantes de Ordem n

29.1 INVERSÃO

Uma inversão no arranjo dos inteiros positivos ocorre sempre que um inteiro precede outro inteiro menor.

Por exemplo, em 4, 3, 1, 5, 2, o inteiro 4 precede 3, 1 e 2; o inteiro 3 precede 1 e 2, e 5 precede 2; assim há seis inversões.

Da mesma forma, uma inversão do arranjo de letras em ordem alfabética ocorre sempre que uma letra precede outra que lhe é precedente no alfabeto. Assim, *bdca* tem *b* precedendo *a*; *d* precedendo *c* e *a*; e *c* precedendo *a*; conseqüentemente, há quatro inversões.

29.2 DETERMINANTES DE ORDEM n

O símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & k_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & k_n \end{vmatrix}$$

composto de n^2 números (chamados elementos) arranjados em n linhas e n colunas, é denominado *determinante de ordem n*. Esse símbolo é uma abreviação para a soma algébrica de todos os produtos possíveis, cada um composto de n fatores, onde:

(1) Cada produto tem como fatores um e somente um elemento de cada linha e de cada coluna. Haverá $n!$ destes produtos.

(2) Cada produto tem associado a si um sinal positivo ou negativo conforme a quantidade de inversões dos índices for par ou ímpar, após as letras no produto terem sido escritas na ordem de aparecimento na primeira linha do determinante.

A soma algébrica assim obtida é chamada de *expansão* ou *valor* do determinante. Cada produto na expansão com seu sinal associado é denominado *termo* da expansão do determinante.

By Possuidão

Às vezes, um determinante de n-ésima ordem é escrito como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nessa notação, cada elemento é caracterizado por dois índices, o primeiro indicando a *linha* na qual o elemento aparece e o segundo indicando a *coluna* na qual ele aparece. Assim, a_{23} é o elemento da segunda linha e terceira coluna e a_{32} é o elemento da terceira linha e segunda coluna.

A *diagonal principal* de um determinante consiste nos elementos do determinante que se encontram sobre a reta que liga o canto superior esquerdo ao inferior direito do determinante.

29.3 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

I. A troca de todas as linhas com todas as colunas correspondentes de um determinante não altera o valor do mesmo. Conseqüentemente, qualquer teorema demonstrado para linhas vale para colunas e vice-versa.

Exemplo 29.1

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

II. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) forem zero, o valor do determinante será zero.

Exemplo 29.2

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

III. A troca de quaisquer duas linhas (ou colunas) troca o sinal do determinante.

Exemplo 29.3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

IV. Se duas linhas (ou colunas) de um determinante forem idênticas, o valor do determinante será zero.

Exemplo 29.4

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

V. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de um determinante forem multiplicados por um mesmo número p, o valor do determinante será multiplicado por p.

Exemplo 29.5

$$\begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

By Possuidão

VI. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de um determinante forem expressos como uma soma de dois (ou mais) termos, o determinante poderá ser expresso como a soma de dois (ou mais) determinantes.

Exemplo 29.6

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

VII. Se a cada elemento de uma linha (ou coluna) de um determinante o elemento correspondente de qualquer outra linha (ou coluna) for adicionado m vezes, o valor do determinante não será alterado.

Exemplo 29.7

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Essas propriedades podem ser demonstradas para os casos especiais de segunda e terceira ordens pelo emprego dos métodos de expansão do Capítulo 28. Para demonstrações de casos gerais, veja os problemas resolvidos mais adiante neste capítulo.

29.4 MENORES COMPLEMENTARES

O menor complementar (ou simplesmente menor) de um elemento em um determinante de ordem n é o determinante de ordem $n-1$ obtido pela remoção da linha e da coluna que contêm o elemento considerado.

Por exemplo, o menor complementar de b_3 no determinante de quarta ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

é obtido excluindo a linha e a coluna que contêm b_3, como mostrado, e escrevendo o determinante resultante de ordem 3,

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

O menor complementar de um elemento é representado por letras maiúsculas. Assim, o menor complementar correspondente ao elemento b_3 é representado por B_3.

29.5 VALOR DE UM DETERMINANTE

O valor de um determinante pode ser obtido em função de menores complementares como segue:

(1) Escolha qualquer linha (ou coluna).

(2) Multiplique cada elemento de uma linha (ou coluna) por seu correspondente menor complementar precedido de sinal *positivo* ou *negativo* se a soma da colunas e da linha que identificam este elemento for *par* ou *ímpar*, respectivamente. O menor complementar de um elemento com seu sinal é chamado de *co-fator* do elemento.

(3) Adicione algebricamente os produtos obtidos em (2).

Por exemplo, desenvolvamos o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

By Possuidão

pelos elementos da terceira linha. Os menores complementares de a_3, b_3, c_3, d_3 são A_3, B_3, C_3 e D_3, respectivamente. O sinal correspondente ao elemento a_3 é + pois ele aparece na primeira coluna e terceira linha e $1 + 3 = 4$ é par. Da mesma forma, os sinais associados com os elementos b_3, c_3 e d_3 são –, + e –, respectivamente. Assim, o valor do determinante é

$$a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3 - d_3D_3$$

A Propriedade VII é útil para a produção de zeros em determinada linha ou coluna. Essa propriedade, combinada com a expansão em função dos menores complementares, facilita o cálculo do valor de um determinante.

29.6 REGRA DE CRAMER

A Regra de Cramer para a solução de n equações lineares a n incógnitas é exatamente análoga à regra mostrada no Capítulo 28 para $n = 2$ e $n = 3$.

Dadas n equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = r_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = r_n \end{array} \tag{1}$$

Denotemos D o determinante dos coeficientes de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, isto é,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Representemos por D_k o determinante D com a k-ésima coluna (que corresponde aos coeficientes da incógnita x_k) substituída pela coluna dos coeficientes no lado direito de (1). Então,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}, \ldots \qquad \text{desde que } D \neq 0.$$

Se $D \neq 0$, há uma e somente uma solução.

Se $D = 0$, o sistema de equações pode ter soluções ou não.

Equações sem solução são denominadas *inconsistentes*; de outra forma, são consistentes.

Se $D = 0$ e no mínimo um dos determinantes $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$, o sistema considerado é inconsistente.

Se $D = D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$, o sistema pode ser consistente ou não.

Equações com uma quantidade infinita de soluções são chamadas de *dependentes*. Se um sistema de equações for dependente, então $D = 0$ e todos os determinantes $D_1, D_2, \ldots, D_n = 0$. O inverso, entretanto, nem sempre é verdadeiro.

29.7 EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

Se $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nas equações (1) são todos zero, o sistema é denominado *homogêneo*. Nesse caso, $D_1 = D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0$, e o seguinte teorema é verdadeiro.

> **Teorema:** Uma condição necessária e suficiente para que n equações lineares homogêneas a n incógnitas tenham soluções além da solução trivial (na qual todas as incógnitas são iguais a zero) é que o determinante dos coeficientes, D, seja zero.

Um sistema de m equações a n incógnitas pode ter soluções simultâneas ou não.

(1) Se $m > n$, as incógnitas em n das equações podem ser determinadas. Se esses valores satisfazem as equações m e n restantes, o sistema é consistente; de outra forma, é inconsistente.

(2) Se $m < n$, então m das incógnitas podem ser determinadas em função das $n - m$ incógnitas restantes.

By Possuidão

Problemas Resolvidos

29.1 Determine a quantidade de inversões nos seguintes agrupamentos.

(*a*) 3, 1, 2 — O 3 precede 1 e 2. Há duas inversões.

(*b*) 4, 2, 3, 1 — O 4 precede 2, 3 e 1; 2 precede 1; 3 precede 1. Há cinco inversões.

(*c*) 5, 1, 4, 3, 2 — O 5 precede 1, 4, 3, 2; 4 precede 3, 2; 3 precede 2. Há sete inversões.

(*d*) *b*, *a*, *c* — O *b* precede *a*. Há uma inversão.

(*e*) *b*, *a*, *e*, *d*, *c* — O *b* precede *a*; *e* precede *d* e *c*; *d* precede *c*. Há quatro inversões.

29.2 (*a*) Qual seria a quantidade de inversões dos índices em $b_1d_3c_2a_4$ se as letras fossem colocadas em ordem alfabética?

(*b*) Qual seria a quantidade de inversões das letras em $b_1d_3c_2a_4$ se os índices fossem arranjados na ordem natural?

SOLUÇÃO

(*a*) O novo arranjo é $a_4b_1c_2d_3$. Os índices 4, 1, 2, 3 têm três inversões.

(*b*) O novo arranjo é $b_1c_2d_3a_4$. As letras *bcda* têm três inversões.

O fato de haver três inversões em (*a*) e (*b*) não é uma mera coincidência. A quantidade de inversões de índices quando as letras são dispostas em ordem alfabética é a mesma de letras quando os índices são colocados em ordem natural.

29.3 Escreva a expansão do determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

com o emprego de inversões.

SOLUÇÃO

A expansão consiste nos termos do arranjo *abc* com todos os arranjos de índices possíveis, com um sinal precedendo o produto determinado pela quantidade de inversões dos índices: um sinal positivo se a quantidade de inversões for par e um negativo se for ímpar.

Há seis termos na expansão:

$a_1b_2c_3$ 0 inversão, sinal +	$a_2b_3c_1$ duas inversões, sinal +
$a_1b_3c_2$ uma inversão, sinal –	$a_3b_2c_1$ três inversões, sinal –
$a_2b_1c_3$ uma inversão, sinal –	$a_3b_1c_2$ duas inversões, sinal +.

A expansão é: $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2$.

29.4 Determine os sinais associados aos termos $d_1a_3c_2b_4$ e $a_3c_2d_4b_1$ na expansão do determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO

$d_1a_3c_2b_4$ escrito $a_3b_4c_2d_1$ tem cinco inversões de índices. O sinal associado é –.

$a_3c_2d_4b_1$ escrito $a_3b_1c_2d_4$ tem duas inversões de índices. O sinal associado é +.

29.5 Demonstre a Propriedade III: se duas linhas (ou colunas) forem trocadas entre si, o sinal do determinante será trocado.

SOLUÇÃO

Caso 1. As linhas são adjacentes.

A troca de duas linhas adjacentes representa a troca de dois índices adjacentes em cada termo da expansão. Conseqüentemente, a quantidade de inversões de índices é aumentada ou reduzida em um. Então, o sinal de cada termo é trocado, bem como o do determinante.

By Possuidão

Caso 2. As linhas não são adjacentes.

Suponha que haja k linhas a serem trocadas. Então, serão necessários k intercâmbios de linhas adjacentes para levar a linha superior para a linha imediatamente acima da inferior, mais um para invertê-las, e mais k trocas para levar a linha inferior para onde a superior estava. Isso envolve um total de $k + 1 + k = 2k + 1$ trocas. Como $2k + 1$ é ímpar, há uma quantidade ímpar de trocas de sinais, o que resulta no mesmo que uma simples troca de sinal.

29.6 Demonstre a Propriedade IV: se duas linhas (ou colunas) são idênticas, o determinante tem valor zero.

SOLUÇÃO

Denotemos por D o valor do determinante. Pela Propriedade III, o intercâmbio de duas linhas idênticas alteraria o valor para $-D$. Como os determinantes são os mesmos, $D = -D$, ou seja, $D = 0$.

29.7 Demonstre a Propriedade V: se todos os elementos de uma linha (ou coluna) forem multiplicados pelo mesmo número p, o valor do determinante será multiplicado por p.

SOLUÇÃO

Cada termo do determinante contém um e somente um elemento da linha multiplicada por p e, assim, cada termo tem fator p. Esse fator é, portanto, comum a todos os termos da expansão e, assim, o determinante é multiplicado por p.

29.8 Demonstre a Propriedade VI: se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de um determinante forem expressos como a soma de dois (ou mais) termos, o determinante poderá ser expresso como a soma de dois (ou mais) determinantes.

SOLUÇÃO

Para o caso de determinantes de terceira ordem, devemos demonstrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Cada termo na expansão do determinante à esquerda é igual à soma dos dois termos correspondentes no determinante da direita, por exemplo, $(a_2 + a_2')\, b_3c_1 = a_2b_3c_1 = a_2'b_3c_1$. Assim, a propriedade é válida para determinantes de terceira ordem. O método de verificação é o mesmo para casos gerais.

29.9 Demonstre a Propriedade VII: se a cada elemento de uma linha (ou coluna) de um determinante for adicionado m vezes o elemento correspondente de qualquer outra linha (ou coluna), o valor do determinante não será alterado.

SOLUÇÃO

Para o caso de determinante de terceira ordem, devemos mostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pela Propriedade VI, o lado direito pode ser escrito como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

O último determinante pode ser escrito como

$$m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

que é zero conforme a Propriedade IV.

By Possuidão

29.10 Demonstre que

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUÇÃO

O número 3 pode ser fatorado de cada elemento da primeira coluna e 2 pode ser fatorado de cada elemento da terceira para obtermos

$$(3)(2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

que é igual a zero, visto que a primeira e a terceira colunas são idênticas.

29.11 Use a Propriedade VII para transformar o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

em um determinante de igual valor com zeros na primeira linha e na segunda e terceira colunas.

SOLUÇÃO

Multiplicando cada elemento na primeira coluna por 2 e adicionando o produto aos elementos correspondentes da segunda, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & (2)(1)-2 & 3 \\ 2 & (2)(2)-1 & 4 \\ -2 & (2)(-2)+3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando cada elemento da primeira coluna do novo determinante por – 3 e adicionando o produto aos elementos correspondentes da terceira coluna, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (-3)(1)+3 \\ 2 & 3 & (-3)(2)+4 \\ -2 & -1 & (-3)(-2)+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

O resultado poderia ter sido obtido em um único passo escrevendo

$$\begin{vmatrix} 1 & (2)(1)-2 & (-3)(1)+3 \\ 2 & (2)(2)-1 & (-3)(2)+4 \\ -2 & (2)(-2)+3 & (-3)(-2)+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Os números 2 e – 3 foram escolhidos de forma a obtermos zeros nas posições desejadas.

29.12 Use a Propriedade VII para transformar o determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

em um determinante igual que tenha três zeros na quarta linha.

SOLUÇÃO

Multiplicando-se cada elemento da primeira coluna (a coluna *básica*, mostrada com destaque) por –3, –4 e +2 e adicionando-se os produtos respectivamente aos elementos correspondentes nas segunda, terceira e quarta colunas, o resultado é

By Possuidão

$$\begin{vmatrix} 3 & (-3)(3)+6 & (-4)(3)+2 & (2)(3)+3 \\ -2 & (-3)(-2)+1 & (-4)(-2)-2 & (2)(-2)+2 \\ 4 & (-3)(4)-5 & (-4)(4)+1 & (2)(4)+4 \\ 1 & (-3)(1)+3 & (-4)(1)+4 & (2)(1)-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -10 & 9 \\ -2 & 7 & 6 & -2 \\ 4 & -17 & -15 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observe que é útil escolher uma fila ou coluna básica contendo o elemento 1.

29.13 Obtenha quatro zeros em uma fila ou coluna no determinante de quinta ordem

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO

Produziremos zeros na segunda coluna empregando a linha básica em destaque. Multiplicando os elementos dessa linha por – 5, – 3, 3 e – 2 e adicionando os produtos aos elementos correspondentes da primeira, segunda, quarta e quinta fila, obtemos

$$\begin{vmatrix} -17 & 0 & -11 & 16 & 17 \\ -14 & 0 & -7 & 9 & 13 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 18 & 0 & 11 & -2 & -6 \\ -6 & 0 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

29.14 Obtenha três zeros em uma fila ou coluna do determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

sem alterar seu valor.

SOLUÇÃO

É conveniente utilizar a Propriedade VII para obter um elemento 1 em uma linha ou coluna. Por exemplo, multiplicando cada elemento da coluna 2 por – 1 e adicionando os produtos aos elementos correspondentes da coluna 3, obtemos

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

Usando a terceira coluna como coluna básica, multiplicamos seus elementos por 2, – 2 e 2 e adicionamos os produtos respectivamente à primeira, segunda e quarta coluna para obter

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & -15 & 6 & 16 \\ -10 & 19 & -7 & -16 \end{vmatrix}$$

que é igual ao determinante dado.

29.15 Escreva o menor complementar e o co-fator correspondente do elemento da segunda linha e terceira coluna do determinante

By Possuidão

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO

Cruzando a linha e a coluna que contêm o elemento, o menor complementar é dado por

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Como o elemento está na segunda linha e terceira coluna e $2 + 3 = 5$ é um número ímpar, o sinal associado é negativo. Portanto, o co-fator correspondente ao elemento considerado é

$$-\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

29.16 Escreva os menores e os co-fatores dos elementos da quarta linha do determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO

Os elementos na quarta linha são $-3, -2, -4$ e 1.

$$\text{Menor complementar do elemento } -3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Co-fator} = -\text{Menor}$$

$$\text{Menor complementar do elemento } -2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Co-fator} = +\text{Menor}$$

$$\text{Menor complementar do elemento } -4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Co-fator} = -\text{Menor}$$

$$\text{Menor complementar do elemento } 1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Co-fator} = +\text{Menor}$$

29.17 Expresse o valor do determinante do Problema 29.16 em termos de menores ou co-fatores.

SOLUÇÃO

Valor do determinante = soma dos elementos, cada um deles multiplicado pelo co-fator associado

$$= (-3)\left\{-\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\} + (-2)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ (-4)\left\{-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right\} + (1)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

Calculando os determinantes de terceira ordem, obtém-se -53.

By Possuidão

O método de cálculo aqui indicado é entediante. Entretanto, podemos reduzir muito do trabalho se primeiramente transformarmos um dado determinante em um equivalente tendo zeros em uma linha ou coluna, pela aplicação da Propriedade VII, como mostrado no problema seguinte.

29.18 Calcule o determinante do Problema 29.16 primeiramente transformando-o em um que tenha três zeros em uma linha ou coluna e, a seguir, expandindo-o por menores complementares.

SOLUÇÃO

Escolhendo a coluna básica como indicado,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

multiplicando seus elementos por -2, -5 e 3 e adicionando-os aos elementos correspondentes da primeira, terceira e quarta coluna, obtemos

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 14 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & -27 & 17 \\ 1 & -2 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

Expandindo de acordo com os co-fatores dos elementos na segunda linha, obtemos

(0)(seu co-fator)+(1)(seu co-fator)+(0)(seu co-fator)+(0)(seu co-fator)

$$(1)(\text{seu co-fator}) = 1\left\{+\begin{vmatrix} 7 & 14 & -4 \\ -9 & -27 & 17 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix}\right\}$$

Expandindo esse determinante, obtemos o valor -53, que está de acordo com o resultado do Problema 29.16.

Observe que o método desse problema pode ser empregado para calcular determinantes de terceira ordem em termos de determinantes de segunda.

29.19 Calcule os determinantes.

(*a*) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Multiplicando os elementos na linha básica indicada por -2, 1 e -3 e adicionando os produtos aos elementos correspondentes na segunda, terceira e quarta linha, obtemos

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -9 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 7 \\ -10 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1\left\{-\begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 7 \\ -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 7 \\ -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Multiplicando os elementos na coluna básica indicada por -7 e adicionando os produtos aos elementos correspondentes na primeira e terceira coluna, obtemos

$$-\begin{vmatrix} -44 & 5 & -37 \\ 0 & 1 & 0 \\ -31 & 3 & -28 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} -44 & -37 \\ -31 & -28 \end{vmatrix}\right\} = -85$$

By Possuidão

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando os elementos na coluna básica indicada por 3, 2, 1 e – 4 respectivamente e adicionando os produtos aos elementos correspondentes na primeira, terceira, quarta e quinta colunas, obtemos

$$\begin{vmatrix} -8 & -3 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -2 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\left\{-\begin{vmatrix} -8 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 5 & 4 & -11 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}\right\} = -\begin{vmatrix} -8 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 5 & 4 & -11 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

No último determinante, multiplicamos os elementos na linha básica indicada por 6 e – 4 e adicionamos os produtos respectivamente aos elementos da primeira e segunda linhas para obter

$$-\begin{vmatrix} -50 & -22 & 0 & 79 \\ 33 & 17 & 0 & -55 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 33 & 17 & -55 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}\right\} = -\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 33 & 17 & -55 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

Multiplicando os elementos da linha indicada do último determinante por 2 e adicionando-os à segunda linha, obtemos

$$-\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 27 & 1 & -37 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

Multiplicando os elementos na linha indicada no último determinante por 22 e 8 e adicionando-os respectivamente aos elementos da primeira e terceira linha, obtemos

$$-\begin{vmatrix} 544 & 0 & -735 \\ 27 & 1 & -37 \\ 213 & 0 & -287 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} 544 & -735 \\ 213 & -287 \end{vmatrix}\right\} = -427$$

29.20 Fatore o determinante.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & 1 \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Remova os fatores x e y das primeira e segunda coluna, respectivamente.

$$= xy\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-1 & y-1 & 1 \\ x^2-1 & y^2-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Adicione –1 vez os elementos da terceira coluna aos elementos correspondentes na primeira e segunda coluna.

$$= xy\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ x^2-1 & y^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= xy(x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & y+1 \end{vmatrix}$$

Remova os fatores $(x-1)$ e $(y-1)$ da primeira e segunda coluna, respectivamente.

$$= xy(x-1)(y-1)(y-x)$$

29.21 Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z + w &= -4 \\ x + 2y + 2z - 3w &= 6 \\ 3x - y - z + 2w &= 0 \\ 2x + 3y + z + 4w &= -5 \end{aligned}$$

By Possuidão

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 86$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 86 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -172$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 258 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -86$$

Então, $x = \dfrac{D_1}{D} = 1, \quad y = \dfrac{D_2}{D} = -2, \quad z = \dfrac{D_3}{D} = 3, \quad w = \dfrac{D_4}{D} = -1.$

29.22 As correntes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 (medidas em ampères) podem ser determinadas pelo seguinte conjunto de equações. Determine i_3.

$$\begin{aligned} i_1 - 2i_2 + i_3 &= 3 \\ i_2 + 3i_4 - i_5 &= -5 \\ i_1 + i_2 + i_3 - i_5 &= 1 \\ 2i_2 + i_3 - 2i_4 - 2i_5 &= 0 \\ i_1 + i_3 + 2i_4 + i_5 &= 3 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 38, \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19, \qquad i_3 = \frac{D_3}{D} = 2 \text{ amp}$$

29.23 Decida se o sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= -2 \\ 4x - 5y + z &= 5 \end{aligned}$$

é consistente.

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

No entanto,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Portanto, pelo menos um dos determinantes $D_1, D_2, D_3 \neq 0$, de modo que as equações são inconsistentes.

Isso poderia ser constatado de outra maneira, multiplicando a primeira equação por 2 e então adicionando-a à segunda para obter $4x - 5y + z = 6$, o que não é consistente com a última equação.

By Possuidão

29.24 Decida se o sistema

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

é consistente.

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Nada pode ser dito sobre a consistência a partir destes fatos. Em um exame mais minucioso do sistema, podemos notar que a segunda e a terceira equações são inconsistentes. Portanto, o sistema é inconsistente.

29.25 Decida se o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 4 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 5x - 5y + z &= -2 \end{aligned}$$

é consistente.

SOLUÇÃO

$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Conseqüentemente, nada pode ser concluído a partir desses fatos.

Resolvendo as duas primeiras equações para x e y (em termos de z), $x = \frac{3}{5}(z+2), y = \frac{4}{5}(z+2)$. Esses valores são encontrados por substituição para satisfazer a terceira equação. (Se não satisfizessem a terceira equação, o sistema seria inconsistente.)

Assim, os valores $x = \frac{3}{5}(z+2), y = \frac{4}{5}(z+2)$ satisfazem o sistema e há infinitos conjuntos de soluções, obtidos por atribuição de vários valores *a* z. Então, se $z = 3, x = 3, y = 4$; se $z = -2, x = 0, y = 0$ etc.

Segue-se que as equações dadas são *dependentes*. Isso pode ser comprovado de outra forma: multiplicando-se a segunda equação por 3 e adicionando-se o resultado à primeira, então obter $5x - 5y + z = -2$, que é a terceira equação.

29.26 O sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

tem somente a solução trivial $x = y = z = 0$?

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17 \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

Como $D \neq 0$ e $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, o sistema tem somente a solução trivial.

29.27 Encontre soluções não-triviais para o sistema

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

se existirem.

By Possuidão

SOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

Portanto, há soluções não-triviais.

Para determinar essas soluções não-triviais, resolvemos para x e y (em termos de z) as primeiras duas equações (nem sempre isso será possível). Encontramos $x = z/2$, $y = z/2$. Esses valores satisfazem a terceira equação. Uma quantidade infinita de soluções é obtida pela atribuição de valores a z. Por exemplo, se $z = 6$, então $x = 3$ e $y = 3$; se $z = -4$, então $x = -2$ e $y = -2$ etc.

29.28 Para quais valores de k o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= 0 \\ 2x + ky + 2z &= 0 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

terá soluções não-triviais?

SOLUÇÃO

Soluções não-triviais são obtidas quando

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, $D = -3k^2 + 3k + 6 = 0$ ou $k = -1, 2$.

Problemas Complementares

29.29 Determine a quantidade de inversões em cada agrupamento:

(*a*) $4, 3, 1, 2$ (*b*) $3, 1, 5, 4, 2$ (*c*) c, a, d, b, e

29.30 Para o agrupamento d_3, b_4, c_1, e_2, a_5, determine

(*a*) a quantidade de inversões de índices quando as letras estão em ordem alfabética,

(*b*) a quantidade de inversões de letras quando os índices estão em ordem natural.

29.31 Na expansão de

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

determine os sinais associados aos termos d_2, b_4, c_3, a_1 e $b_3c_2a_4d_1$.

29.32 (*a*) Comprove a Propriedade I: se as linhas e colunas de um determinante são trocadas, o valor do determinante não é alterado.

(*b*) Comprove a Propriedade II: se todos os elementos em uma linha (ou coluna) forem zero, o valor do determinante será zero.

29.33 Demonstre que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 16 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

é igual a zero.

By Possuidão

29.34 Transforme o determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

em um determinante igual que tenha três zeros na terceira coluna.

29.35 Sem alterar o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

obtenha quatro zeros na quarta coluna.

29.36 Para o determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(*a*) escreva os menores e os co-fatores para os elementos da terceira linha,
(*b*) expresse o valor do determinante em termos de menores ou co-fatores,
(*c*) determine o valor do determinante.

29.37 Transforme o determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

em um determinante que tenha três zeros em uma linha e então calcule o determinante empregando a expansão por menores complementares.

29.38 Calcule os determinantes:

(*a*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ (*b*) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ (*c*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

(*d*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

29.39 Fatore os determinantes:

(*a*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ (*b*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

By Possuidão

29.40 Resolva os sistemas:

$$(a)\ \begin{cases} x-2y+z-3w=4 \\ 2x+3y-z-2w=-4 \\ 3x-4y+2z-4w=12 \\ 2x-y-3z+2w=-2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ 3y+4z+w=5 \\ 2z-w-4x=0 \\ w+3x-y=4 \end{cases}$$

29.41 Determine i_1 e i_4 no sistema

$$\begin{cases} 2i_1-3i_3-i_4=-4 \\ 3i_1+i_2-2i_3+2i_4+2i_5=0 \\ -i_1-3i_2+2i_4+3i_5=2 \\ i_1+2i_3-i_5=9 \\ 2i_1+i_2=5 \end{cases}$$

29.42 Determine se os sistemas são consistentes.

$$(a)\ \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+2y-z=1 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y-4z=1 \\ x-4y+6z=3 \end{cases} \quad (c)\ \begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 3x-y-z=1 \\ 2x+6y-4z=3 \end{cases} \quad (d)\ \begin{cases} 2u+v-3w=1 \\ u-2v-w=2 \\ u+3v-2w=-2 \end{cases}$$

29.43 Encontre soluções não-triviais, se existirem, para o sistema

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$$

29.44 Para qual valor de k o sistema

$$\begin{cases} 2x+ky+z+w=0 \\ 3x+(k-1)y-2z-w=0 \\ x-2y+4z+2w=0 \\ 2x+y+z+2w=0 \end{cases}$$

terá soluções não-triviais?

Respostas dos Problemas Complementares

29.29 (*a*) 5 (*b*) 5 (*c*) 3

29.30 (*a*) 8 (*b*) 8

29.31 Negativo e positivo, respectivamente.

29.36 (*c*) -38

29.37 28

29.38 (*a*) 38 (*b*) -143 (*c*) -108 (*d*) 88

29.39 (*a*) $abc(a-b)(b-c)(c-a)$ (*b*) $(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

29.40 (*a*) $x=2,\ y=-1,\ z=3,\ w=1$ (*b*) $x=1,\ y=-1,\ z=2,\ w=0$

29.41 $i_1=3,\ i_4=-2$

29.42 (*a*) consistente (*b*) dependente (*c*) inconsistente (*d*) inconsistente

29.43 Somente a solução trivial $x=y=z=0$

29.44 $k=-1$

By Possuidão

Capítulo 30

Matrizes

30.1 DEFINIÇÃO DE MATRIZ

Uma matriz é um arranjo retangular de números, os quais são as entradas ou os elementos da matriz. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

As matrizes são classificadas pela quantidade de linhas e colunas. As matrizes acima são 2×2, 3×2, 3×1 e 2×3, com o primeiro número indicando a quantidade de linhas e o segundo, a de colunas. Quando uma matriz tem a mesma quantidade de linhas e colunas, é uma matriz quadrada.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz **A** é $m \times n$. As entradas na matriz **A** são duplamente indexadas, com o primeiro número indicando a linha da entrada e o segundo, a coluna da entrada. Uma entrada genérica da matriz é denotada por a_{ij}. A matriz **A** pode ser representada por $[a_{ij}]$.

30.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Se as matrizes **A** e **B** têm o mesmo tamanho, a mesma quantidade de linhas e a mesma quantidade de colunas, e as entradas genéricas são da forma a_{ij} e b_{ij}, respectivamente, então a soma $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] = \mathbf{C}$ para todos os i e j.

Exemplo 30.1 Determine a soma de $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+3 & 4+(-2) \\ 6+(-1) & 0+1 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $-\mathbf{A}$ é denominada o oposto da matriz **A**, e cada entrada em $-\mathbf{A}$ é o oposto da entrada correspondente em **A**.

By Possuidão

Então, $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de uma matriz por um número real resulta em todas as entradas da matriz serem multiplicadas pelo mesmo número.

Exemplo 30.2 Multiplique a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ por -2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -12 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad -2\mathbf{A} = -2$$

O produto **AB**, onde **A** é uma matriz $m \times p$ e **B** é uma matriz $m \times n$, é **C**, uma matriz $m \times n$. As entradas c_{ij} da matriz **C** são determinadas pela fórmula $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \times & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo 30.3 Determine o produto **AB** quando $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2(3) + 4(-1) + 1(4) & 2(0) + 4(3) + 1(0) & 2(1) + 4(1) + 1(3) & 2(-1) + 4(2) + 1(-2) \\ 0(3) + 1(-1) + (-2)(4) & 0(0) + 1(3) + (-2)(0) & 0(1) + 1(1) + (-2)(3) & 0(-1) + 1(2) + (-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 - 4 + 4 & 0 + 12 + 0 & 2 + 4 + 3 & -2 + 8 - 2 \\ 0 - 1 - 8 & 0 + 3 + 0 & 0 + 1 - 6 & 0 + 2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 9 & 4 \\ -9 & 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 30.4 Determine os produtos **CD** e **DC** quando $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(0) + 3(4) & 1(-3) + 2(2) + 3(-2) \\ -1(1) + 0(0) + 4(4) & -1(-3) + 0(2) + 4(-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 12 & -3 + 4 - 6 \\ -1 + 0 + 16 & 3 + 0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + (-3)(-1) & 1(2) + (-3)(0) & 1(3) + (-3)(4) \\ 0(1) + 2(-1) & 0(2) + 2(0) & 0(3) + 2(4) \\ 4(1) + (-2)(-1) & 4(2) + (-2)(0) & 4(3) + (-2)(4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1 + 3 & 2 + 0 & 3 - 12 \\ 0 - 2 & 0 + 0 & 0 + 8 \\ 4 + 2 & 8 + 0 & 12 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

By Possuidão

No Exemplo 30.4, observe que, embora os produtos **CD** e **DC** existam, **CD** $\neq$ **DC**. Portanto, a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Uma matriz unidade é uma matriz $n \times n$ com entradas iguais a 1 quando os índices indicativos de linha e coluna são iguais e as demais entradas são zero. Representamos a matriz unidade $n \times n$ por $\mathbf{I}_n$.

Por exemplo,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se **A** é uma matriz quadrada e **I** é a matriz unidade de mesma ordem, então **AI** = **IA** = **A**.

30.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS

Duas matrizes são denominadas linha-equivalentes se uma delas puder ser obtida a partir da outra por uma seqüência de operações elementares sobre as linhas.

Operações elementares sobre as linhas

(1) Troca de duas linhas.

(2) Multiplicação de uma linha por uma constante não-nula.

(3) Adição de um múltiplo de uma linha a outra.

Diz-se que uma matriz está em forma linha-reduzida na forma de escada se ela tiver as seguintes características:

(1) Todas as linhas nulas ocorrem na base da matriz.

(2) Uma linha que não é toda nula tem um 1 como sua primeira entrada distinta de zero, que é denominada 1 líder.

(3) Para duas linhas sucessivas e não-nulas, o 1 líder na linha mais alta está mais à esquerda do que o 1 líder da linha mais baixa.

(4) Toda coluna que contém 1 líder tem zeros em todas as demais posições.

Exemplo 30.5 Use operações elementares sobre as linhas para transformar a matriz **A** em forma linha-reduzida na forma de escada.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_1 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \mathbf{R}_2 - 2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3 - 3\mathbf{R}_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \frac{1}{5}\mathbf{R}_2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} \mathbf{R}_1 - 3\mathbf{R}_2 \\ \\ \mathbf{R}_3 + 10\mathbf{R}_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz **A** em forma linha-reduzida na forma de escada fica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30.4 INVERSO DE UMA MATRIZ

Uma matriz quadrada **A** terá inverso se existir uma matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Para determinar o inverso de uma matriz quadrada **A**, se ele existir, procedemos da seguinte forma:

(1) Forme a matriz particionada [**A**|**I**], onde **A** é a matriz $n \times n$ dada e **I** é a matriz unidade $n \times n$.

By Possuidão

(2) Realize operações elementares sobre as linhas de $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ até que a matriz particionada tenha a forma $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$, isto é, até que a matriz **A** na esquerda seja transformada na matriz unidade. Se **A** não puder ser transformada na matriz unidade, **A** não tem inverso.

(3) A matriz **B** é $\mathbf{A}^{-1}$, o inverso da matriz **A**.

Exemplo 30.6 Determine o inverso da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_1 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \mathbf{R}_2 - 2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim -\tfrac{1}{3}\mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \mathbf{R}_1 - 4\mathbf{R}_2 \\ \\ \mathbf{R}_3 + 7\mathbf{R}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -7/3 & 11/3 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ -3\mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \mathbf{R}_1 - (1/3)\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2 - (2/3)\mathbf{R}_3 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & -3 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{bmatrix}$$

Se a matriz **A** é linha-equivalente a **I**, então a matriz **A** tem inverso e é inversível. **A** não tem um inverso se não for linha-equivalente a **I**.

Exemplo 30.7 Determine o inverso, se existir, da matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \mathbf{R}_2 + 2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \mathbf{R}_1 - 3\mathbf{R}_2 \\ \\ \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A matriz **A** é linha-equivalente à matriz da esquerda. Como a matriz à esquerda tem uma linha inteira de zeros, ela não é equivalente a **I**. Assim, a matriz **A** não tem inverso.

Outra forma de determinar se o inverso de uma matriz **A** existe é verificar que o determinante associado a uma matriz inversível é não-nulo, isto é, $\det \mathbf{A} \neq 0$ se $\mathbf{A}^{-1}$ existir.

Para matrizes 2×2, o inverso pode ser encontrado por um procedimento especial:

$$\text{Se } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ onde } \det \mathbf{A} \neq 0.$$

(1) Determine o valor do det **A**. Se $\det \mathbf{A} \neq 0$, então o inverso existe.

(2) Troque as entradas da diagonal principal, permutando a_{11} e a_{22}.

(3) Troque os sinais das entradas da diagonal secundária, substituindo a_{21} por $-a_{21}$ e a_{12} por $-a_{12}$.

(4) Multiplique a nova matriz por 1/det **A**. Esse produto é $\mathbf{A}^{-1}$.

By Possuidão

30.5 EQUAÇÕES MATRICIAIS

Uma equação matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ terá solução se e somente se a matriz $\mathbf{A}^{-1}$ existir, e a solução será $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Exemplo 30.8 Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$\text{Se } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -5/11 \\ 2/11 & -7/11 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/11 \\ -18/11 \end{bmatrix}$$

30.6 MATRIZ SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para resolver um sistema de equações utilizando matrizes, escrevemos uma matriz particionada que é a matriz dos coeficientes à esquerda aumentada pela matriz das constantes à direita.

A matriz aumentada associada com o sistema $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ x \quad\quad - z &= 0 \\ x - y - z &= -4 \end{aligned}$ é

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Exemplo 30.9 Utilize matrizes para resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19 \end{aligned}$$

Escreva a matriz aumentada para o sistema.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right]$$

Coloque a matriz à esquerda na forma-reduzida na forma de escada.

$$\begin{array}{r} R_2 \\ \sim R_1 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right]$$

By Possuidão

$$\sim \begin{array}{r} R_1 - 2R_2 \\ \\ (1/3)R_3 \\ R_4 + 6R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_1 + 3R_3 \\ R_2 - R_3 \\ \\ (-1/13)R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} R_1 - R_4 \\ R_2 + R_4 \\ R_3 + R_4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Da matriz linha-reduzida na forma de escada da matriz aumentada, escrevemos as equações:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 \text{ e } x_4 = 3$$

Assim, a solução do sistema é (–1, 2, 1, 3).

Exemplo 30.10 Resolva o sistema de equações: $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \quad\ = 1 \end{array}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim R_2 - 3R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim -R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim R_1 - 2R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$x_1 + 5x_3 = 2$ e $x_2 - 3x_3 = -1$ Portanto, $x_1 = 2 - 5x_3$ e $x_2 = -1 + 3x_3$.

O sistema tem infinitas soluções da forma $(2 - 5x_3,\ -1 + 3x_3,\ x_3)$, onde x_3 é um número real.

Problemas Resolvidos

30.1 Determine (*a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (*b*) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (*c*) $3\mathbf{A}$, e (*d*) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ quando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(*a*) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 1+(-3) & 1+4 \\ -1+(-3) & -1+1 & 4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(*b*) $$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 1-(-3) & 1-4 \\ -1-(-3) & -1-1 & 4-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(*c*) $$3\mathbf{A} = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(1) & 3(1) \\ 3(-1) & 3(-1) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

(*d*) $$5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = 5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2)-2(2) & 5(1)-2(-3) & 5(1)-2(4) \\ 5(-1)-2(-3) & 5(-1)-2(1) & 5(4)-2(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 11 & -3 \\ 1 & -7 & 24 \end{bmatrix}$$

By Possuidão

30.2 Determine, se existirem, (*a*) **AB**, (*b*) **BA**, e (*c*) $\mathbf{A}^2$ quando

$$\mathbf{A} = [3\ 2\ 1] \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(*a*) $\mathbf{AB} = [3\ 2\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [3(2) + 2(3) + 1(0)] = [12]$

(*b*) $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}[3\ 2\ 1] = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(2) & 2(1) \\ 3(3) & 3(2) & 3(1) \\ 0(3) & 0(2) & 0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(*c*) $\mathbf{A}^2 = [3\ 2\ 1][3\ 2\ 1]$; não é possível. $\mathbf{A}^n$, $n > 1$, existe somente para matrizes quadrada

30.3 Determine **AB**, se possível.

(*a*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ (*b*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

(*a*) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$; não é possível.

A é uma matriz 3×2 e **B**, 3×3. Como **A** tem somente duas colunas, pode ser multiplicada apenas por matrizes que contenham duas linhas, ou seja, matrizes $2 \times k$.

(*b*) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(1) + 3(0) & -1(2) + 3(7) \\ 4(1) + (-5)(0) & 4(2) + (-5)(7) \\ 0(1) + 2(0) & 0(2) + 2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ 4 & -27 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

30.4 Escreva as matrizes na forma linha-reduzida em forma de escada.

(*a*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

(*a*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \underset{R_1}{\overset{R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \underset{R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_3 + R_2}{\overset{R_1 - 3R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$\underset{(-1/3)R_3}{\overset{(1/2)R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_2 + 3R_3}{\overset{R_1 - 4R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A forma linha-reduzida em forma de escada de $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

By Possuidão

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \sim R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} R_1 + 2R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 + R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A forma linha-reduzida em forma de escada de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

30.5 Determine o inverso, se existir, de cada matriz.

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \quad (b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (c)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (d)\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(a) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 3 = -17$; $\det \mathbf{A} \neq 0$, então $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/17 & 3/17 \\ 1/17 & -2/17 \end{bmatrix}$$

A primeira forma da matriz é freqüentemente utilizada, porque reduz a quantidade de cálculos com frações. Além disso, ela torna mais fácil o trabalho com matrizes em calculadoras gráficas.

(b) $\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Como $\det \mathbf{B} = 0$, não existe $\mathbf{B}^{-1}$.

$$(c)\quad [\mathbf{C}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{C}^{-1}]$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d)\quad [\mathbf{D}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Como a matriz à esquerda na forma final não é linha-equivalente à matriz unidade **I**, **D** não tem inverso.

30.6 Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, resolva as equações para **X**.

By Possuidão

(*a*) $2\mathbf{X} + 3\mathbf{A} = \mathbf{B}$ (*b*) $3\mathbf{A} + 6\mathbf{B} = -3\mathbf{X}$

SOLUÇÃO

(*a*) $2\mathbf{X} + 3\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Logo, $2\mathbf{X} = -3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{X} = -\frac{3}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{X} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & (3/2)+(3/2) \\ (-3/2)+1 & 0+0 \\ (-9/2)-2 & 6+(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1/2 & 0 \\ -13/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

(*b*) $3\mathbf{A} + 6\mathbf{B} = -3\mathbf{X}$. Logo, $-3\mathbf{X} = 3\mathbf{A} + 6\mathbf{B}$ e $\mathbf{X} = -\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

$$\mathbf{X} = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1-6 \\ -1-4 & 0+0 \\ -3+8 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

30.7 Escreva a equação matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ e use-a para resolver o sistema $\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ -2x + y &= 0. \end{aligned}$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{X} & = & \mathbf{B} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A solução para o sistema é (4, 8).

30.8 Resolva os sistemas de equações utilizando matrizes.

(*a*) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y \quad &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$ (*b*) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x + y \quad &= 4 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$

SOLUÇÃO

(*a*)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Da matriz linha-reduzida em forma de escada, escrevemos as equações:

$$x = 1, \; y = -1 \quad \text{e} \quad z = 2$$

O sistema tem a solução (1, −1, 2).

(*b*)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como a última linha resulta na equação $0z = 1$, que não tem solução, o sistema de equações não tem solução.

By Possuidão

Problemas Complementares

30.9 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = [7 \quad 3]$

Realize as operações indicadas, se possível.

(*a*) $\mathbf{B}+\mathbf{C}$	(*e*) $3\mathbf{B}+2\mathbf{C}$	(*i*) $\mathbf{C}-5\mathbf{A}$	(*m*) $\mathbf{B}^2$
(*b*) $5\mathbf{A}$	(*f*) $\mathbf{DA}$	(*j*) $\mathbf{BC}$	(*n*) $\mathbf{D}(\mathbf{AB})$
(*c*) $2\mathbf{C}-6\mathbf{B}$	(*g*) $\mathbf{AD}$	(*k*) $(\mathbf{DA})\mathbf{B}$	(*o*) $\mathbf{A}^3$
(*d*) $-6\mathbf{B}$	(*h*) $\mathbf{C}-\mathbf{B}$	(*l*) $\mathbf{A}^2$	(*p*) $\mathbf{DB}+\mathbf{DC}$

30.10 Determine o produto **AB**, se possível.

(*a*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(*b*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(*c*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(*d*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = [10 \quad 12]$

30.11 Resolva os sistemas de equações utilizando uma equação matricial da forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

(*a*) $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 5x - 3y &= 10 \end{aligned}$ (*b*) $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 5x - 4y &= -23 \end{aligned}$ (*c*) $\begin{aligned} 1{,}5x + 0{,}8y &= 2{,}3 \\ 0{,}3x - 0{,}2y &= 0{,}1 \end{aligned}$ (*d*) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 40 \\ 3x - 2y &= 8 \end{aligned}$

30.12 Escreva as matrizes na forma linha-reduzida em forma de escada.

(*a*) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (*e*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(*c*) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (*f*) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

By Possuidão

30.13 Determine o inverso, se existir, para cada matriz.

(*a*) $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(*c*) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(*d*) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(*e*) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(*f*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(*g*) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

(*h*) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

30.14 Resolva os sistemas de equações utilizando matrizes.

(*a*) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -1 \\ -x + 3y \quad &= 10 \\ 2x - 5y + 5z &= -7 \end{aligned}$

(*b*) $\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$

(*c*) $\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ y - z &= 0 \\ -x + 2y \quad &= 1 \end{aligned}$

(*d*) $\begin{aligned} 4x - y + 5z &= 11 \\ x + 2y - z &= 5 \\ 5x - 8y + 13z &= 7 \end{aligned}$

(*e*) $\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 1 \\ 5x_2 + 3x_2 \quad &= 4 \\ 3x_2 - 4x_3 &= 4 \end{aligned}$

(*f*) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 17x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 22x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 &= 0 \end{aligned}$

(*g*) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

(*h*) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= -4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$

Respostas dos Problemas Complementares

30.9 (*a*) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$

(*c*) $\begin{bmatrix} -14 & -8 & -30 \\ -6 & 10 & -24 \end{bmatrix}$

(*d*) $\begin{bmatrix} -18 & -3 & -30 \\ -6 & 6 & -18 \end{bmatrix}$

(*e*) $\begin{bmatrix} 13 & -7/2 & 15 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(*f*) $[14 \quad -14]$

(*g*) não é possível

(*h*) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

(*i*) não é possível

(*j*) não é possível

(*k*) $[28 \quad 21 \quad 28]$

(*l*) $\begin{bmatrix} 4 & -45 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$

(*m*) não é possível

(*n*) $[28 \quad 21 \quad 28]$

(*o*) $\begin{bmatrix} 8 & -335 \\ 0 & 343 \end{bmatrix}$

(*p*) $[38 \quad -11 \quad 35]$

By Possuidão

30.10 (*a*) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 10 & 16 \\ 26 & 46 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 6 & -21 & 15 \\ 8 & -23 & 19 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 14 \\ 21 & 20 & 24 \\ 1 & -26 & 2 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 60 & 72 \\ -20 & -24 \\ 10 & 12 \\ 60 & 72 \end{bmatrix}$

30.11 (*a*) $(5, 5)$ (*b*) $(-3, 2)$ (*c*) $(1, 1)$ (*d*) $(8, 8)$

30.12 (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(*c*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(*e*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*f*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -12/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

30.13 (*a*) $\begin{bmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ (*e*) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 7 \\ 53 & 2 & -37 \\ -26 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

(*b*) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (*f*) $\frac{1}{33}\begin{bmatrix} 13 & -4 & 7 \\ 2 & 7 & -4 \\ -16 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(*c*) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 & 1 \\ 5 & 12 & -19 & 11 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 12 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ (*g*) $\frac{1}{19}\begin{bmatrix} 21 & -16 & 18 \\ -16 & 14 & -11 \\ -19 & 19 & -19 \end{bmatrix}$

(*d*) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} -13 & 7 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ -22 & 14 & 10 \end{bmatrix}$ (*h*) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 21 & 9 & -4 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & -2 \\ -9 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

30.14 (*a*) $(-1, 3, 2)$
(*b*) sem solução
(*c*) $(2z - 1, z, z)$, onde z é um número real.
(*d*) $(-z + 3, z + 1, z)$, onde z é um número real.
(*e*) $(-4, 8, 5)$
(*f*) $(0, 0, 0)$
(*g*) $(1, 0, 3, 2)$
(*h*) sem solução

By Possuidão

Capítulo 31

Indução Matemática

31.1 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Algumas afirmações são definidas no conjunto dos inteiros positivos. Para decidirmos a validade dessas afirmações, poderíamos pensar em comprová-las separadamente para cada inteiro positivo que nos interessasse. No entanto, como existem infinitos inteiros positivos, este procedimento *caso a caso* nunca poderia comprovar se tais afirmações são sempre verdadeiras. Pode-se utilizar um procedimento chamado de indução matemática para estabelecer a veracidade de uma afirmação para todos os inteiros positivos.

Princípio da Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma afirmação verdadeira ou falsa para cada inteiro positivo n. Se as seguintes condições forem satisfeitas:

(1) $P(1)$ é verdadeira, e

(2) Sempre que, para $n = k$, $P(k)$ ser verdadeira implica $P(k+1)$ ser também verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todos os valores inteiros positivos n.

31.2 PROVA POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para comprovar um teorema ou uma fórmula por indução matemática, existem dois passos distintos.

(1) Mostrar por substituição efetiva que a afirmação (teorema ou fórmula) proposta é verdadeira para um inteiro positivo n, tal como $n = 1$ ou $n = 2$ etc.

(2) Supor que a afirmação (teorema ou fórmula) é verdadeira para $n = k$ e então provar que ela é verdadeira para $n = k + 1$.

Uma vez que os passos (1) e (2) sejam completos, pode-se concluir que a afirmação (teorema ou fórmula) é verdadeira para todos os inteiros positivos maiores ou iguais a a, o inteiro positivo do passo (1).

By Possuidão

Problemas Resolvidos

31.1 Prove por indução matemática que, para todos os inteiros positivos n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO

Passo 1 A fórmula é verdadeira para $n = 1$, uma vez que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Passo 2 Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Assim, adicionando $(k + 1)$ a ambos os lados,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que é o valor de $n\,(n + 1)/2$ quando $(k + 1)$ é substituído por n.

Portanto, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, provamos que também é verdadeira para $n = k + 1$. Todavia, a fórmula vale para $n = 1$; assim, vale para $n = 1 + 1 = 2$. Segue-se que, como ela vale para $n = 2$, deve valer também para $n = 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Portanto, a fórmula é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

31.2 Comprove por indução matemática que a soma dos n termos de uma progressão aritmética $a, a + d, a + 2d, \ldots$ é $\left(\frac{n}{2}\right)[2a + (n-1)d]$, isto é,

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

SOLUÇÃO

Passo 1 A fórmula é verdadeira para $n = 1$, uma vez que $a = \frac{1}{2}[2a + (1-1)d] = a$.

Passo 2 Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Então,

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (k-1)d] = \frac{k}{2}[2a + (k-1)d]$$

Adicione o $(k + 1)$-ésimo termo, que é $(a + kd)$, a ambos os lados da última equação. Assim,

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (k-1)d] + (a + kd) = \frac{k}{2}[2a + (k-1)d] + (a + kd)$$

O lado direito da última equação é igual a $= ka + \frac{k^2 d}{2} - \frac{kd}{2} + a + kd = \frac{k^2 d + kd + 2ka + 2a}{2}$

$$= \frac{kd(k+1) + 2a(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}(2a + kd)$$

que é o valor de $(n/2)$ quando n é substituído por $(k + 1)$.

Portanto, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, provamos que também é verdadeira para $n = k + 1$. Contudo, a fórmula vale para $n = 1$; sendo assim vale para $n = 1 + 1 = 2$. Segue-se que, como ela vale para $n = 2$, deve valer também para $n = 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Portanto, a fórmula é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

31.3 Comprove por indução matemática que, para todos os inteiros positivos n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

By Possuidão

SOLUÇÃO

Passo 1 A fórmula é verdadeira para $n = 1$, uma vez que

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

Passo 2 Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Então,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Adicione o $(k + 1)$-ésimo termo, que é igual a $(k + 1)^2$, a ambos os lados desta equação. Então,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

O lado direito da última equação $= \dfrac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$

$$= \frac{(k+1)[(2k^2+k) + (6k+6)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

que é o valor de $n(n + 1)(2n + 1)/6$, quando n é substituído por $(k + 1)$.

Portanto, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, também é verdadeira para $n = k + 1$. Contudo, a fórmula vale para $n = 1$; portanto, vale para $n = 1 + 1 = 2$. Segue-se que, como ela vale para $n = 2$, vale também para $n = 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Portanto, a fórmula é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

31.4 Prove por indução matemática que, para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

SOLUÇÃO

Passo 1 A fórmula é verdadeira para $n = 1$, uma vez que

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Passo 2 Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Então,

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Adicione o $(k + 1)$-ésimo termo, que é igual a

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},$$

a ambos os lados desta equação. Então,

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

O lado direito da última equação é igual a

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3},$$

que é o valor de $n/(2n + 1)$ quando n é substituído por $(k + 1)$.

Portanto, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, também é verdadeira para $n = k + 1$. Contudo, a fórmula vale para $n = 1$; portanto, vale para $n = 1 + 1 = 2$. Segue-se que, como ela vale para $n = 2$, vale também para $n = 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Portanto, a fórmula é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

By Possuidão

31.5 Comprove por indução matemática que $a^{2n} - b^{2n}$ é divisível por $a + b$ quando n é qualquer inteiro positivo.

SOLUÇÃO

Passo 1 O teorema é verdadeiro para $n = 1$, uma vez que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Passo 2 Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $n = k$. Então,

$$a^{2k} - b^{2k} \text{ é divisível por } a + b.$$

Precisamos demonstrar que $a^{2k+2} - b^{2k+2}$ é divisível por $a + b$. Da identidade

$$a^{2k+2} - b^{2k+2} = a^2(a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k}(a^2 - b^2)$$

segue-se que $a^{2k+2} - b^{2k+2}$ é divisível por $a + b$ se $a^{2k} + b^{2k}$ também for.

Portanto, se o teorema é verdadeiro para $n = k$, provamos que também é verdadeiro para $n = k + 1$. Todavia, o teorema é verdadeiro para $n = 1$; portanto, é verdadeiro também para $n = 1 + 1 = 2$. Segue-se que, como é verdadeiro para $n = 2$, vale também para $n = 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Portanto, o teorema é verdadeiro para todos os inteiros positivos n.

31.6 Prove a fórmula binomial

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

para os inteiros positivos n.

SOLUÇÃO

Passo 1 A fórmula é verdadeira para $n = 1$.

Passo 2 Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Então,

$$(a + x)^k = a^k + na^{k-1}x + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^k$$

Multiplique os dois lados por $a + x$. O produto do lado direito pode ser escrito

$$\begin{aligned} &a^{k+1} + ka^kx + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + ax^k. \\ &\quad + a^kx + ka^{k-1}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + x^{k+1} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1}\left\{\frac{k-r+2}{r-1} + 1\right\} \\ &= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1}, \end{aligned}$$

o produto do lado direito pode ser escrito

$$(a + x)^{k+1} = a^{k+1} + (k + 1)a^kx + \cdots + \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + x^{k+1}$$

que é a fórmula binomial quando substituímos n por $k + 1$.

Portanto, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, é verdadeira para $n = k + 1$. Contudo, a fórmula vale para $n = 1$; segue-se que, vale para $n = 1 + 1 = 2$, e assim por diante. Deste modo, a fórmula é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

31.7 Comprove por indução matemática que a soma dos ângulos internos, $S(n)$, de um polígono convexo é $S(n) = (n - 2)180°$, onde n é o número de lados do polígono.

SOLUÇÃO

Passo 1 Como um polígono tem pelo menos três lados, começamos com $n = 3$. Para $n = 3$, $S(3) = (3 - 2)180° = (1)180° = 180°$. Isto é verdadeiro porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

By Possuidão