Griffiths & Hilton

MATEMÁTICA CLÁSSICA Uma interpretação contemporânea

tradução ELZA F. GOMIDE

123

CONTEÚDO

Parte VI

SISTEMAS NUMÉRICOS E TOPOLOGIA

23. Os números racionais 339
23.1 — Os axiomas de Peano 339
23.2 — O sistema $\mathbb{Z}$ 341
23.3 — O sistema $\mathbb{Q}$ 344

24. Os números reais e complexos 348
24.1 — A insuficiência de $\mathbb{Q}$ 348
24.2 — Seqüências 351
24.3 — A estrutura de $\mathbb{R}$ 354
24.4 — A relação de ordem em $\mathbb{R}$ 356
24.5 — Decimais 358
24.6 — A completividade de $\mathbb{R}$ 360
24.7 — Os números complexos 363
24.8 — A completividade de $\mathbb{C}$ 365
24.9 — Quatérnions e números hipercomplexos 366

25. Topologia de $\mathbb{R}^n$ 370
25.1 — Introdução 370
25.2 — A topologia no programa Erlanger 370
25.3 — Alguns homeomorfismos 371
25.4 — O produto cartesiano 377
25.5 — Espaços métricos 377
25.6 — Conjuntos fechados e abertos 381
25.7 — Dimensão 386
25.8 — Espaços compactos 388
25.9 — Espaços quocientes 390
25.10 — Espaços simplesmente conexos: homotopia 395
25.11 — Métodos algébricos 399
25.12 — Variedades 402
25.13 — Aplicações e outros aspectos 408
25.14 — Alguns livros 409

Parte VII

CÁLCULO

26. A álgebra $\mathbb{R}^I$ 413
26.1 — Intervalos 413
26.2 — Operações algébricas 413

26.3 — Polinômios 415
26.4 — A função recíproca 416
26.5 — A relação de ordem 417

27. Processos de passagem a limite 418
27.1 — Limites 418
27.2 — A álgebra dos limites 419
27.3 — Limites infinitos 421
27.4 — Seqüências 424

28. Funções contínuas 425
28.1 — A álgebra $\mathscr{C}(I)$ 425
28.2 — Composição 426
28.3 — O princípio da preservação de desigualdades 427
28.4 — Max e min 427
28.5 — Dois teoremas mais profundos 428
28.6 — A lei dos expoentes 430

29. Funções deriváveis 432
29.1 — O coeficiente diferencial 432
29.2 — A derivada 432
29.3 — A álgebra $\mathscr{D}(I)$ 433
29.4 — Composição 435
29.5 — A diferencial $d_c f$ 436
29.6 — Derivadas de ordem superior 439
29.7 — As condições de Rolle 440
29.8 — Exemplo (As funções trigonométricas) 443
29.9 — Funções inversas 446

30. Integração 450
30.1 — O problema 450
30.2 — Regras de integração 453
30.3 — Integração por substituição 457
30.4 — Convergência de integrais 459

Parte VII, continuação

TÓPICOS ADICIONAIS DO CÁLCULO

31. O logaritmo e a função exponencial 463
31.1 — O logaritmo 463
31.2 — A função exp 465
31.3 — As leis dos expoentes 467

32. Equações diferenciais 469
32.1 — Equações lineares de primeira ordem 469
32.2 — Equações de segunda ordem 470

33. Funções a valores complexos 474
33.1 — Diferenciação 474
33.2 — A função cis 474
33.3 — Álgebra de e^z 476

34. Aproximação e iteração 479
34.1 — Expansão de Taylor 479
34.2 — Máximos e mínimos 481
34.3 — Método de aproximação de Newton 483
34.4 — Integração aproximada 484
34.5 — Séries 488
34.6 — Outras questões 491

35. Funções de várias variáveis reais 492
35.1 — O problema 492
35.2 — Continuidade 493
35.3 — A diferencial 494
35.4 — A fórmula para pequenos erros 497
35.5 — Diferenciabilidade e derivadas 497

36. Funções a valores vetoriais 499
36.1 — Diferenciabilidade 499
36.2 — Composição 502
36.3 — Sistemas de coordenadas 503
36.4 — A regra da cadeia da diferenciação 504
36.5 — Sumário das fórmulas principais 507

37. Funções C^r 509
37.1 — O problema 509
37.2 — Expansão de Taylor 509
37.3 — Pontos críticos 509
37.4 — Funções implícitas 511
37.5 — Um esclarecimento 514

Parte VIII

FUNDAMENTOS

38. Categorias e funtores 519
38.1 — Categorias 519
38.2 — Objetos iniciais, terminais, zero 522
38.3 — Funtores 524
38.4 — Noções fundamentais na teoria das categorias 531

39. Lógica matemática 539
39.1 — Axiomas 539
39.2 — Conjuntos 542
39.3 — Consistência 544

39.4 — Sistemas formais 547
39.5 — Exemplos do "jogo de prova" 550
39.6 — Teoremas de Gödel 552
39.7 — As provas de Gödel 554
39.8 — O axioma da escolha e a hipótese do contínuo 558

Bibliografia 559
Índice 563

ÍNDICE DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

Este índice contém os símbolos e notações que têm significado especial. Não incluímos notações (como $f(x)$) que são ao mesmo tempo de uso geral e familiares ao leitor. Incluímos descrições muito breves dos significados dos símbolos. Como alguns símbolos não admitem classificação alfabética, não podemos às vezes evitar que o leitor tenha que percorrer várias seções para achar o símbolo procurado. Chamamos a atenção em especial para os *dois últimos itens*!

$A \subseteq B$	A está contido em B
$A \supseteq B$	A contém B, $B \subseteq A$
$A \approx B$	equivalência de conjuntos
$A \approx B$	equivalência de objetos de uma categoria
$A \approx B$	isomorfismo de grupos
$A \dot{\approx} B$	homeomorfismo de espaços
$A \cup B$	união de conjuntos
$A \cap B$	interseção de conjuntos
$A - B$	complementar de B em A
$A \sim B$	diferença simétrica
$A \times B$	produto cartesiano
$\#A$	cardinalidade de A
A/R	conjunto das classes de A módulo a relação de equivalência R
$[a]$	classe de restos de a
$a \equiv b \pmod{m}$	congruência módulo m
$[a]_m$	classe de restos, módulo m, de a
$a \mid b$	a divide b
$a \nmid b$	a não divide b
$\{a_n\}$	seqüência com a_n como n-ésimo termo
(a, b)	par ordenado
$\left.\begin{array}{l}\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle \\ \langle a, b\rangle \\ \langle\!\langle a, b\rangle \\ \langle a, b\rangle\!\rangle\end{array}\right\}$	intervalos na reta real
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	produto vetorial
$\mathfrak{A}$	axiomas de anel e grupo abeliano
$\mathscr{A}(G)$	área de G
A^T	transposta da matriz A
B^A	conjunto das funções de A em B
$\mathbb{B}_2$	álgebra booleana padrão
$\mathfrak{B}$	axiomas para álgebras de Boole
$\mathbf{c}$	complementar
card X	cardinalidade de X
$\mathfrak{c}$	cardinalidade do continuum ($\mathbb{R}$)

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$	imersão da geometria projetiva real na complexa
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$\mathbb{C}[x]$	conjunto dos polinômios sobre $\mathbb{C}$
$\mathfrak{G}\mathfrak{C}$	axiomas para grupo comutativo
$\mathbb{C}_*$	$\mathbb{C}$ com ponto no infinito (∞)
$\mathrm{Cl}(A)$	fecho de A
$\mathscr{C}(I)$	conjunto das funções contínuas no intervalo I
$\mathscr{C}^n(I)$	conjunto das funções n vezes continuamente deriváveis em I
$\mathscr{C}_z^n(I)$	conjunto das funções a valores complexos n vezes continuamente deriváveis em I
$\mathscr{C}(A)$	conjunto das funções contínuas em A
$\mathscr{C}^r(A)$	conjunto das funções r vezes continuamente deriváveis em A
$\mathfrak{C}\mathbf{at}$	axiomas para uma categoria
$\det M$	determinante de M
$\mathfrak{D}$	axiomas para uma função distância (métrica)
gr	grau de um polinômio
$\dim_x X$	dimensão do espaço X no ponto x
$\mathscr{D}(I)$	conjunto das funções deriváveis no intervalo I
Df	a derivada de f
$d_c(f)$	a diferencial de f em c
$\mathscr{D}_z(I)$	conjunto das funções a valores complexos diferenciáveis em I
$\mathscr{D}_p(A, \mathbb{R}^m)$	conjunto das funções $A \to \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em p
$\mathbf{E}$	o mundo em que vivemos
equ	equivalência de fórmulas
$\mathfrak{E}$	axiomas de extensão na geometria projetiva plana
$\mathscr{E}(\mathbb{R}^2)$	$\mathbb{R}^2$ imerso na geometria projetiva plana
$\mathbf{e}$	imerso de $\mathbb{R}^2$ na geometria projetiva
e_G	elemento identidade do grupo G
exp	função exponencial
e	base dos logaritmos naturais
$\mathfrak{E}\mathbf{uc}$	axiomas da geometria euclidiana plana
$f(A)$	imagem de A sob f
f^p	contra-imagem sob f
f^A	função de X^A em Y^A induzida por $f: X \to Y$
f^{-1}	função inversa de f
$f^{-1}(A)$	contra-imagem de A sob f (notação convencional)
$\mathrm{Fr}(A)$	fronteira de A
$f \simeq g$	relação de homotopia entre aplicações
$f(x) \to l$	limite de função de uma variável real
$f(x) \to \infty$	limite infinito de função de variável real
$\mathfrak{F}$	modelo formal
$g \circ f$	composição de f *seguida de* g
$\mathfrak{G}$	axiomas de grupo
inf	ínfimo ou máximo minorante
h_B	função de B^Y em B^X induzida por $h: X \to Y$
$\mathbb{H}$	conjunto dos quatérnions
$H(U, V)$	conjunto dos homomorfismos de U em V
see	se e somente se
$\mathrm{Im}(f)$	imagem de f

id	função identidade
$I(A, B)$	conjunto das injeções $A \to B$
$\mathbb{I}$	intervalo unitário padrão
$\mathfrak{I}$	axiomas para um ideal
$\mathbb{I}^3$	cubo unitário
$\mathfrak{P}\mathfrak{I}$	axiomas para produto interno
$\mathscr{I}$	função identidade
$\mathscr{I}^{p/q}$	potência racional da função identidade
$\lvert J \rvert$	lugar da curva J
sup	supremo ou mínimo majorante
$\mathfrak{T}\mathfrak{L}$	axiomas para uma transformação linear
$L(f)$	comprimento de f
$\lim x_n$	limite de uma seqüência
$\log x$	logaritmo natural de um número real $x > 0$
$\operatorname{Log} \zeta$	logaritmos (multivalentes) do número complexo ζ
$M(n, R)$	conjunto das matrizes $n \times n$ sobre o anel R
$\mathfrak{M}\mathfrak{E}$	propriedades da multiplicação por escalares
$\mathscr{M}_2$	conjunto das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$
$\mathfrak{M}$	propriedades do determinante
$\mathscr{M}_{mn}$	conjunto das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$
$M\mathfrak{C}(A, B)$	conjunto dos morfismos em $\mathfrak{C}$ de A em B
$\mathbf{M}$	classe de conjuntos
$\mathbb{N}$	conjunto dos inteiros positivos
$\mathbb{N}_n$	conjunto dos inteiros positivos $(1, 2, \ldots, n)$
${}_nP_r$	número de injeções $\mathbb{N}_r \to \mathbb{N}_n$
${}_nC_r$	número de subconjuntos de r inteiros em $\mathbb{N}_n$
$\mathfrak{N}$	axiomas para uma norma inteira
$\varnothing$	conjunto vazio
$\mathfrak{O}$	axiomas de ordem
$O(h)$	da ordem de h
$o(x)$	pequeno comparado com x
$p\mathscr{U}$	conjunto de subconjuntos do universo
pX	conjunto potência de X
Perm A	conjunto (grupo) das permutações de A
$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$	produto interno (escalar)
$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$	paralelepípedo determinado por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
$\mathfrak{A}\mathfrak{P}$	axiomas de área
$\mathscr{P}$	geometria projetiva plana
$\mathfrak{P}\mathfrak{P}$	axiomas da geometria projetiva plana
$\mathscr{P}(F)$	geometria projetiva plana sobre o corpo F
$\mathscr{P}(\mathbb{R})$	geometria projetiva plana sobre $\mathbb{R}$
$\mathscr{P}^*$	geometria projetiva dual
$\mathscr{P}(\mathbb{C})$	geometria projetiva plana sobre $\mathbb{C}$
$\mathfrak{P}$	axiomas de subgrupo
$\mathfrak{P}_i$	axiomas de Peano
c.p.c.	conexo por caminhos
$p \simeq q$ rel x_0	homotopia de laços relativa ao ponto base x_0
$[p]$	classe de homotopia do laço p
$\mathfrak{P}$	postulado das paralelas

$\mathbb{Q}$	conjunto dos racionais
$\mathbb{Q}[x]$	conjunto dos polinômios sobre $\mathbb{Q}$
$\mathfrak{Q}$	axioma de subgrupo
$\mathfrak{Q}_1$	condições sobre uma família de subconjuntos compactos
$\mathbb{R}^n$	n-espaço euclidiano
$\mathbb{R}$	reta real, conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^2$	plano euclidiano
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{R}[x]$	conjunto dos polinômios sobre $\mathbb{R}$
$\mathbf{R}$	conjunto das rotações do círculo unitário
$\mathbb{R}^3$	3-espaço euclidiano
$\mathbb{RP}^2$	plano projetivo real
$\mathbb{RP}^3$	3-espaço real projetivo
$\mathbb{R}_r(P_1P_2P_3P_4)$	razão dupla
$\mathbb{R}^I$	conjunto das funções $I \to \mathbb{R}$
$\mathscr{R}(I)$	conjunto das funções sobre I que satisfazem às condições de Rolle
$\mathbb{S}^1$	círculo unitário
$\mathbb{S}^2$	esfera unitária
$S(A, B)$	conjunto das sobrejeções $A \to B$
S_∞	conjunto de fórmulas
$\mathfrak{PE}$	axiomas para produto escalar
$s^*(\mathscr{P})$	enunciado sobre $\mathscr{P}$ dual de s
$s = (s_1, s_2, s_3)$	imersão de $\mathbb{R}^2$ na geometria projetiva complexa
$\mathbb{S}^{k-1}$	$(k-1)$-esfera unitária em $\mathbb{R}^k$
$\mathfrak{T}$	parte da matemática
M^T	transposta da matriz M
$\mathscr{U}$	universo de discurso
$u \mid v$	u divide v
DFU	domínio de fatoração única
$U \oplus W$	soma direta (de subespaços vetoriais)
$\prec u, v \succ$	produto interno (escalar) de u e v
$U^\perp$	complemento ortogonal de U
$U_r(x)$	r-vizinhança de x
$\mathscr{U}$	cobertura de um espaço
$\mathbb{V}$	espaço de vetores euclidianos
$\mathfrak{PV}$	axiomas para produto vetorial
Vol	volume com sinal
vol	volume sem sinal
$\mathfrak{V}$	axiomas para espaço vetorial
fbf	fórmula bem formada
$\{x\}$	conjunto unitário
xR	uma classe de uma relação R
X/R	conjunto quociente de X por uma relação de equivalência R
$\mathbf{r}$	o polinômio x
$x \to c$	x numa vizinhança suficientemente pequena de c

$x \to f(x)$	modo abreviado de descrever uma função que associa a cada x de um conjunto (subentendido) um elemento $f(x)$ de um conjunto (subentendido). Muitos autores substituem a flecha por $\to$, ou $\sim\to$. Isso evita confusão onde x é ele próprio um conjunto.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos inteiros
$\mathbb{Z}^+$	conjunto dos inteiros não-negativos
$\mathbb{Z}_n$	conjunto das classes de restos módulo n
$\mathbb{Z}[x]$	conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros
$\mathbb{Z}_p$	corpo das classes de restos módulo o primo p
$\mathscr{L}(I)$	conjunto das funções sobre I a valores complexos
$\mathfrak{Z}$	teoria do número elementar
α	vetor área
$\Gamma(=\Gamma_1)$	conjunto dos inteiros de Gauss
Γ_n	conjunto dos números complexos $a + b\sqrt{-n}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$
Δ	discriminante
Λ	reticulado de pontos
$\pi(X, x_0)$	grupo fundamental de X em x_0
Σ_C	conjunto das seqüências convergentes (em $\mathbb{Q}$)
Σ_F	conjunto das seqüências de Cauchy (=fundamentais) (em $\mathbb{Q}$)
Σ_N	conjunto das seqüências nulas (em $\mathbb{Q}$)
Φ_m	conjunto de restos primos com m
ω	ordinal de $\mathbb{N}$ com sua ordem usual
$\aleph$ (alef)	um número cardinal
1	função identidade
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\exists!$	existe um único
$\neg$	proposição contrária, não
&	e (conetivos lógicos)
$\vee$	ou (conetivos lógicos)
$\to$	implica (conetivos lógicos)
$\leftrightarrow$	se e somente se (conetivos lógicos)
$.\equiv.$	equivalência de proposições
$= \infty$	é infinito
$\approx$	é homeomorfo a
$\not\approx$	não é homeomorfo a
$\blacksquare$	fim de demonstração
$\square$	indicação de omissão de prova
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	implica e é implicado por
§	exercício difícil
|	parte difícil do texto

BIBLIOGRAFIA

Na seguinte lista de livros não tentamos ser completos. Novos livros aparecem rapidamente, e o leitor pode muito bem achar algum de sua preferência entre esses. Também há agora várias séries de exposições gerais sobre matemática, algumas vezes traduzidas de outras línguas para o inglês. Temos em mente a série da Random House e da Mathematical Association of America, juntamente com alguns excelentes textos elementares russos. Também há agora várias revistas que tratam do ensino da matemática, como *Mathematics Teaching* e a *Mathematical Gazette*, publicadas na Inglaterra, e *American Mathematical Monthly*, publicada nos Estados Unidos. Estas contêm muitos artigos interessantes relativos a pequenos pontos de matemática que levaram a situações interessantes no ensino. Ao mesmo tempo, falam sobre a vasta literatura moderna relevante.

Talvez devamos também chamar a atenção para livros de matemáticos que poderiam ajudar a revelar os processos de pensamento de um matemático; em particular, mencionamos os livros de Hardy [51] e Littlewood [83], os de Bell [10, 12] e vários artigos em Newman [93].

[1] ALBERT, A. A. *Structure of Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications n.° 24 (1939).

[2] ALEXANDROFF, P. *Elementary Concepts of Topology*, Dover, New York (1961).

[3] ALEXANDROFF, P. e HOPF, H. *Topologie*, Vol. I (*Grundlehr. math. Wiss.* 5) Springer, Berlim (1935).

[4] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

[5] ARNOLD, B. H. *Introduction to Concepts of Elementary Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).

[6] ARTIN, E. *Galois Theory*, 2.ª ed., Notre Dame Mathematical Lectures (1948).

[7] AUSLANDER, L. *Differential Geometry*, Harper and Row, New York (1967).

[8] AUSLANDER, L. e MACKENZIE, R. E. *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, New York (1963).

[9] BELL, A. W. e FLETCHER, T. J. *Symmetry Groups*, panfleto n.° 12 de *Mathematics Teaching*, Association of Teachers of Mathematics (1964).

[10] BELL, E. T. *Men of Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, Middx (1953).

[11] BELL, E. T. *Mathematics, Queen and Servant of Science*, Bell, London (1952).

[12] BELL, E. T. *The Development of Mathematics*, 2.ª ed, McGraw-Hill, New York (1945).

[13] BERGE, C. *The Theory of Graphs*, Methuen, Londres (1962).

[14] BING, R. H. *Elementary Point-Set Theory*, panfleto n.° 8 de *American Mathematical Monthly* (1960).

[15] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3.ª ed, American Mathematical Society Colloquium Publications n.° 25 (1966).

[16] BIRKHOFF, G. e MACLANE, S. *A Survey of Modern Algebra*, ed. revista, Macmillan, Londres (1965).

[17] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique*, Hermann, Paris (1939 seg.); as partes *General Topology*, Parts 1 e 2, e *Theory of Sets* existem em inglês: Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967, 1968).

[18] BOURBAKI, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.

[19] BOYER, C. B. *A History of Mathematics*, Wiley, New York (1968).

[20] BUSACKER, R. G. e SAATY, T. L. *Finite Graphs and Networks*, McGraw-Hill, New York (1965).

[21] CAIRNS, S. S. *Introductory Topology*, Ronald, New York (1961).

[22] COHEN, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York (1966).

[23] COHN, P. M. *Linear Algebra*, Routledge and Kegan Paul, Londres (1959).

[24] COURANT, R. *Differential and Integral Calculus*, 2 vols, Blackie, Londres (1952).

[25] COURANT, R. e ROBBINS, H. *What is Mathematics?*, Oxford University Press, Londres (1941).

[26] CROWELL, R. H. e FOX, R. H. *Introduction to Knot Theory*, Ginn, Waltham, Mass. (1963).

[27] CUNDY, M. e ROLLETT, A. P. *Mathematical Models*, 2.ª ed, Clarendon Press, Oxford (1961).

[28] DAVENPORT, H. *The Higher Arithmetic*, Hutchinson, Londres (1952).

[29] DAVIS, M. *Computability and Solvability*, McGraw-Hill, New York (1958).

[30] DIEUDONNÉ, J. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York (1960).

[31] DODGSON, Rev. C. L. (Lewis Carroll) *Symbolic Logic*, reimpressão, Dover, New York (1958).

[32] DORN, W. S. e GREENBERG, H. J. *Mathematics and Computing*, Wiley, New York (1967).

[33] DUFF, G. F. D. *Partial Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford (1956).
[34] DURELL, C. V. *Projective Geometry*, Macmillan, Londres (1931).
[35] EILENBERG, S. e STEENROD, N. *Foundations of Algebraic Topology* Princeton University Press, Princeton, N. J. (1952).
[36] FLANDERS, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963).
[36a] FLETCHER, T. J. (editor) *Some Lessons in Mathematics: A Handbook on the Teaching of 'Modern Mathematics'* por membros da Association of Teachers of Mathematics, Cambridge University Press, Londres (1964).
[37] FORT, M. K. (editor) *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).
[38] GARDNER, M. *Scientific American Book of Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, New York (1959).
[39] GARDNER, M. *The Second Scientific American Book of Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, New York (1961).
[40] GARDNER, M. *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon and Schuster, New York (1966).
[41] GASKELL, R. E. *Engineering Mathematics*, Staples, Londres (1960).
[42] GELFAND, I. M., RAIKOV, D., e SHILOV, G. *Commutative Normed Rings*, Chelsea, New York (1964).
[43] GÖDEL, K. *On Formally Undecidable Propositions* (English trans.), Oliver and Boyd, Edinburgh (1962).
[44] GÖDEL, K. 'The consistency of the continuum hypothesis' *Ann. Math. Stud.* 3 (1940).
[45] GRIFFITHS, H. R. *Topology*, reimpressão de *Mathematics Teaching*, Association of Teachers of Mathematics (1967).
[46] HADWIGER, H., DEBRUNNER, H. e KLEE, V. *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt and Rinehart, New York (1964).
[47] HALL, D. W. e SPENCER, G. L. *Elementary Topology*, Chapman and Hall, Londres (1955).
[48] HALL, M. *Theory of Groups*, Macmillan, Londres (1959).
[49] HALMOS, P. R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1958).
[49a] HALMOS, P. R. *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1950).
[50] HALMOS, P. R. *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1960).
[51] HARDY, G. H. *A Mathematician's Apology*, reimpressão da 1.ª ed. com prefácio de C. P. Snow, Cambridge University Press, Londres (1967).
[52] HARDY, G. H. *Pure Mathematics*, Cambridge University Press, Londres (1965).
[53] HARDY, G. H. *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford (1949).
[54] HARDY, G. H. e WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford (1959).
[55] HAUSDORFF, F. *Mengenlehre* (1927); English trans., *Set Theory*, Dover, New York (1957).
[56] HERSTEIN, I. N. *Topics in Algebra*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1964).
[57] HILBERT, D. *The Foundations of Geometry*, English trad. por E. J. Townsend, Open Court, Chicago (1902); reimpressão 1962.
[58] HILBERT, D. e ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea, New York (1950).
[59] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the Imagination*, Chelsea, New York (1952).
[60] HILTON, P. J. *Differential Calculus*, Routledge and Kegan Paul, Londres (1958).
[61] HILTON, P. J. *Partial Differentiation*, Routledge and Kegan Paul, Londres (1960).
[62] HILTON, P. J. *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge Tracts n.° 43, Cambridge University Press, Londres (1953).
[63] HILTON, P. J. *Homotopy Theory and Duality*, Nelson, Londres (1967).
[64] HILTON, P. J. e WYLIE, S. *Homology Theory*, Cambridge University Press, Londres (1960).
[65] HOCKING, J. G. e YOUNG, G. S. *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1961).
[66] HODGE, W. V. D. e PEDOE, D. *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, Londres (1947-54).
[67] HUREWICZ, W. e WALLMAN, H. *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1961).
[68] JEFFREYS, B. S. e JEFFREYS, H. *Methods of Mathematical Physics*, 3.ª ed., Cambridge University Press, Londres (1956).
[69] KELLEY, J. L. *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1955).
[70] KELLEY, J. L. *Introduction to Modern Algebra*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1960).
[71] KELLOGG, O. D. *Potential Theory*, Chelsea, New York (1947).

[72] KEMENY, J. G., SNELL, J. C. e THOMPSON, G. L. *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1959).
[73] KEMENY, J. G., SNELL, J. C., THOMPSON, G. L., e MIRKIL, H. *Finite Mathematical Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1959).
[74] KEMENY, J. G. e SNELL, L. *Mathematical Models in the Social Sciences*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1962).
[74a] KINGMAN, J. F. C. e TAYLOR, S. J. *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, Londres (1966).
[75] KLEIN, F. *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, Chelsea, New York (1963).
[76] KLEIN, F. *Elementary Mathematics from the Advanced Standpoint*, Dover, New York (1939).
[77] KOLMOGOROFF, A. N. e FOMIN, S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Graylock, New York (1957).
[78] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York (1962).
[79] LANG, S. *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967).
[80] LEDERMANN, W. *Introduction to the Theory of Finite Groups*, 4.ª ed., Oliver and Boyd, Edinburgh (1961).
[81] LEFSCHETZ, S. *Introduction of Topology*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1949).
[82] LIGHTHILL, M. J. *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, Londres (1958).
[83] LITTLEWOOD, J. E. *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, Londres (1953).
[84] MACLANE, S. *Homology*, Springer, New York (1963).
[85] MACLANE, S. e BIRKHOFF, G. *Algebra*, Macmillan, Londres (1967).
[86] MICHIE, D. 'Trial and error' *Penguin Science Surveys*, Penguin Books, Harmondsworth, Middx (1961).
[87] MILNE-THOMSON, L. M. *Theoretical Hydrodynamics*, 4.ª ed., Macmillan, Londres (1962).
[88] MIRSKY, L. *An Introduction to Linear Algebra*, Clarendon Press, Oxford (1955).
[89] MITCHELL, B. *Theory of Categories*, Academic Press, New York (1965).
[90] MOISE, E. E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1963).
[91] MORSE, M. *Calculus of Variations in the Large*, American Mathematical Society Colloquium Publications n.° 18 (1934).
[92] NAGEL, E. e NEWMAN, J. R. *Godel's Proof*. Routledge and Kegan Paul, Londres (1959).
[93] NEWMAN, J. R. (editor) *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York (1956).
[94] NEWMAN, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, Londres (1954).
[95] NICKERSON, H. K., SPENCER, D. C., e STEENROD, N. *Advanced Calculus*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1959).
[96] O'HARA, C. W. e WARD, D. R. *An Introduction to Projective Geometry*, Clarendon Press, Oxford (1937).
[97] OLDS, C. D. *Continued Fractions*, Random House, New York (1963).
[98] OLMSTED, J. M. H. *Intermediate Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York (1956).
[99] OSGOOD, W. F. *Functions of Real Variables*, Chelsea, New York (1935).
[100] PAPY, G. *Groups*, Macmillan, Londres (1964).
[101] PATTERSON, E. M. *Topology*, Oliver and Boyd, Edinburgh (1959).
[102] PATTERSON, E. M. *Vector Algebra*, Oliver and Boyd, Edinburgh (1968).
[103] POSTNIKOV, M. M. *Foundations of Galois Theory*, Clarendon Press, Oxford (1962).
[104] QUADLING, D. A. *Introduction to Analysis*, Clarendon Press, Oxford (1959).
[105] RADEMACHER, H. e TOEPLITZ, O. *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1957).
[106] REDISH, K. A. *An Introduction to Computational Methods*, E.U.P., Londres (1961).
[107] REUTER, G. E. H. *An Introduction to Differential Equations, and Linear Operators*, Routledge and Kegan Paul, Londres (1958).
[108] ROSSER, J. B. *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill, New York (1953).
[109] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, 2.ª ed., McGraw-Hill, New York (1964).
[110] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York (1966).
[111] RUSSELL, B. *History of Westerp Philosophy*, Allen and Unwin, Londres (1957).
[112] RUSSELL, B. e WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica*, 3 vols, Cambridge University Press, Londres (1910-13).
[113] RYSER, H. J. *Combinatorial Mathematics*, Wiley, New York (1963).

[114] SAATY, T. L. *Lectures on Modern Mathematics*, Vols I, II, III, Wiley, New York (1963, 1964, 1966).
[115] SAWYER, W. W. *Prelude to Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, Middx (1955).
[116] SCHWARTZ, L. *Introduction to the Theory of Distributions*, Toronto University Press, Toronto (1952).
[117] SEIFERT, H. e THRELFALL, W. *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea, New York (1947).
[118] SEIFERT, H. e THRELFALL, W. *Variationsrechnung in Grossen*, Chelsea, New York (1948).
[119] SIERPINSKI, W. *Leçons sur l'hypothèse du Continu*, Warsaw-Lwow (1934).
[120] SNOW, C. P. *Science and Government*, Oxford University Press, Londres (1961).
[121] SOMMERVILLE, D. M. Y. *Analytical Conics*, Bell, Londres (1937).
[122] STEINER, H. G. 'Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur' *Der Mathematikunterricht* 3 (1966).
[123] STOLL, R. S. *Sets, Logic and Axiomatic Theories*, Freeman, San Francisco (1962).
[124] THOMPSON, D'ARCY W. *On Growth and Form*, condensado e editado por J. T. Bonner, Cambridge University Press, Londres (1961).
[125] THURSTON, H. A. *The Number System*, Interscience, New York (1959).
[126] TULLER, A. *A Modern Introduction to Geometries*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1967).
[127] TURING, A. M. 'Computing machinery and intelligence' *Mind* 59, 433-460 (1950).
[128] TURING, A. M. 'On computable numbers...' *Proc. Lond. math. Soc.* 42, 230-265 (1937).
[129] TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*, Methuen, Londres (1966).
[130] VEBLEN, O. e YOUNG, J. W. *Projective Geometry*, 2 vols, reimpressão, Blaisdell, Waltham, Mass. (1960).
[131] VAN DER WAERDEN, B. L. *Modern Algebra*, Ungar, New York (1953).
[132] WANG, HAO *IBM Fl. Res. Dev.* 4 (1960).
[133] WASSERMAN, E. 'Chemical topology' *Scient. Am.* (Nov. 1962).
[134] WEYL, H. *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1952).
[135] WHITESITT, J. E. *Boolean Algebra and its Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1961).
[135a] WIGNER, E. P. *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York (1959).
[136] WILDER, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*, Wiley, New York (1965).
[137] WILLMORE, T. J. *An Introduction to Differential Geometry*, Clarendon Press, Oxford (1959).
[138] ZASSENHAUS, H. *The Theory of Groups*, Chelsea, New York (1958).
[139] ZIPPIN, L. *Uses of Infinity*, Vol. 7, Random House, New York (1962).

ÍNDICE

abeliano, grupo, XVII, 118, 263
abelianizado, 279
  funtor, 526
aberta, sentença, 13
aberto, conjunto, 382
  intervalo, 413
absoluto, valor, 134, 428
abuso de linguagem, 23
Adams, 368
adição, fórmulas de, 476
Alexander, esfera de, 374
álgebra, XV
  de conjuntos, 94
  de limites, 419
  teorema fundamental da, 329, 363
algebricamente fechado, 363
algébrico,
  número, 31, 349, 366
  Teorema de inversão, 28
algoritmo, 143
altura, 301
análise, 411
anel, XV, 114, 281
  com norma inteira, 134
ângulo, 222, 299
anticomutatividade, 181
aplicação, 18, 380
arbitrariamente pequena (família), 384
arco, 377
Arquimedes, 348
área, 207
Argand, diagrama de, 136, 364
argumento (de função), 17
aresta (de gráfico), 47
aritmética, XIV, 111-112
asa, 404
associados, 138
associativa, lei, 43, 262
associatividade da composição, 25
átomo, 318
automorfismo, 122, 275
autovalor, 291
autovetor, 291
axioma, 114, 220, 539
  aristotélico, 65-66
  da escolha, 87, 558
    forte, 88
  de Eudoxo, 312

B-álgebras, 98
base, 169, 284
Beltrami, 546
bem ordenado, 49
bijeção, 20
binomial,
  expansão, com resto, 481
  teorema, 64
bissecção do ângulo, 123
Bolyai, 544
Boole, 315
booleana, álgebra, XV, 100, 315
booleano, ideal, 101
Borel, conjuntos de, 321
Brianchon, teorema de, 245
Brouwer, 374
  teorema do ponto fixo de, 371
Burali-Forti, paradoxo de, 542

cadeia, regra da, 435, 504
Cairns, 407
Cálculo, XVI, 411
  teorema fundamental do, 451
caminho, 200, 376
Cantor, 65-66, 82
cardinal, 82
característica, 331
categoria, XVIII, 519
Cauchy, seqüência de, 352
Cauchy-Riemann, equações de, 507
Cayley, números de, 368
  teorema de, 275
célula, 184
centralizador, 276

centro, 276, 538
de esfera, 172
de perspectividade, 251
chinês, teorema do resto, 132
Church, 124
cíclica, permutação, 264
cíclico, grupo, 266
cilindro, 36
cinco cores, teorema das, 371
círculo, 172
cis, 474
classe, 277, 543
de X mod R, 53
espaço de, 277
representante de, 53
cobertura, 394
co-domínio, 519, 521
Cohen (Paul), 92, 558
co-homologia, 402
colineação, 240
combinação, 73, 75
combinatoriamente equivalentes, 407
compacto, 388, 394
poliedro, 400
complementação, 316
complementar, 11
função, 471
completação, 362
completividade, 554
de $\mathbb{C}$, 365
completo, 362
complexos, números, 363
função a valores, 474
componentes (de morfismo), 534
composição (de funções), 24, 426
comprimento, 171, 200, 299
computação, teoria da, IX
comum, fator, 10
múltiplo, 10
comutador, 277
comutadores, subgrupo dos, 277, 531
comutativo, anel, 114
grupo, 117, 263
conexo (gráfico), 62
conexo por caminhos, 376, 503
conforme, 507
congruência (mod m), 51, 126
congruências simultâneas, 131
congruente (mod m), 127
cônica, 180, 243
conjugado, subgrupo, 275
conjunto, 1, 3, 542
de funções, 67
gerador, 284
teoria do, XIV
consistência, 544, 554
ω-, 557
constância, critério de, 442
constante, função, 18
homomorfismo, 523
contar, 30, 80
contínua, 380, 385, 425, 493
continuamente diferenciável, 509
continuum, 83
hipótese do, 92, 558
contorno (veja linhas de nível)
contradomínio, 17, 46, 521
contra-exemplo, 14
contraível, 396
contravariante, 70, 526
converge, 352, 424
convergente (de uma fração contínua), 160
convexo, 171
convolução, 459
coordenadas, 35
cartas, 504
plano de, 4
sistema de, 503
co-produto, 538
corolário, 1
corpo, 120
de decomposição, 335
de frações, 366
não comutativo (anel de divisão), 366
correspondência, 18
co-seno, 224
covariança, 401
covariantes, 70, 401, 525
Cramer, regra de, 190, 294
cross-cap, 405
cubo, 36
cúbica, 333
curva que enche um espaço, 386

decimais, 358
decomposição, espaço de, 392
teorema de, 280
Dedekind, 312
dedução, 106
definição, 1, 220
deformável, 395

De Moivre, teorema de, 476
De Morgan, regras de, 12
derivação, 330
derivada, 22, 330, 432, 496
de ordem superior, 439
Desargues, teorema de, 234, 241
Descartes, 545
desigualdades, 307
determinante, 185, 291, 295
diagonal, 38
processo (de Cantor), 83
diagrama, 376
dicionário, ordem de, 49
diferencial, 436, 494, 499
coeficiente, 432
equações, 469
geometria, 591
diferenciável, 432, 497
variedade, 504
dimensão, 169, 386
de espaço vetorial, 285
finita, 284, 388
diofantina, equação, 132
Dirac, função - δ de, 457
direção, 231
coeficientes de, 170
discriminante, 243, 268
disjuntos, conjuntos, 8
distância, 297
distinguido, elemento, 339
distribuição, 456
distributiva, lei, 36, 96
divisão, álgebra de, 415
divisível, 10
divisores do zero, 121
domínio, 17, 46, 520
de discurso, 519
dual, base, 304
categoria, 538
de álgebra de Boole, 100, 316
espaço vetorial, 304, 527
dualidade,
aberto $\leftrightarrow$ fechado, 384
na geometria projetiva, 236-237
duplicação do cubo, 123

elemento de um conjunto, 4
elipse, 243
endomorfismo, 275
Entscheidungsproblem, 554
enumeravelmente infinito, 31
épico, 531
epimorfismo, 273
equação, 13
equivalência, 20, 522
afim, 194
relação de, 51
induzida por uma função, 54
induzida por partição, 54
equivalentes, fórmulas, 103
conjuntos, 30
objetos, 522
Erlanger, programa, 164, 252, 370, 371
escalar, produto, 173, 176, 297
escolha, função de, 88
do representante, 52
esfera, 172, 300
com p asas, 407
estabilizador, 75
estacionários, pontos, 510
estatística, IX
estereográfica, projeção, 504
estrita, indexação, 54
estritamente crescente, decrescente, monótona, 415
estrutura, 221
constantes de, 367
Euclides, 135, 143
algoritmo de, 143, 326
teorema (sobre primos) de, 148
euclidiana, geometria, 226
norma, 135
euclidiano, axioma, 135
domínio, 137
espaço topológico, 372
Eudoxo, 338, 348
Euler, 63, 129, 371, 407
característica de, 293, 406
exaustão, 212
existência, provas de, 14
teorema de (para mdc), 142
expoenciação (de cardinais), 85
exponencial, função, 22, 465
crescimento, 468
exponencialmente limitada, 472

fator, 10, 141
fatoração em primos, 148
fatorial, função, 73
fechado, 117
conjunto, 381
intervalo, 413

fecho, 384
Fermat, 130
último teorema de, 228
finita, seqüência, 354
finito, cardinal, 84
conjunto, 30, 81
sub-recobrimento, 394
fluxograma, 191
fórmula, 104, 548
bem formada, 549
Fourier, séries de, 490
frações contínuas, 159
Frege, 82
fronteira, 384, 404
condição de, 469
função, 1, 18, 39
a valor vetorial, 499
analítica, 489
característica, 98
de várias variáveis, 457
generalizada, 457
funções C^r, 509
funcional, análise, 415
fundamental, grupo, 399
seqüência, 352
funtor, xii, 538
categoria de, 528
de esquecimento, 526

Galois, 123, 333
teoria de, 123, 261
gama, função, 460
Gauss, 329, 337
gaussiana, esfera, 491
gaussianos, inteiros, 136
Gentzen, 554
gênus, 404
geodésica, 546
geometria, XV, 163, 219
G-equivalente, 257-258
gerador (de grupo cíclico), 266
geradores, de espaço vetorial, 284
de grupo, 267, 524
de ideal, 140, 142
Gödel, 92, 124, 517, 547
número de, 555
teoremas de, 552
gradiente, 500
gráfico, de função, 38
de relação, 46
Gram-Schmidt, processo de, 302
grau (de polinômio), 135, 324
grega, filosofia, 219
grupo, 118, 287
álgebra de, 368
derivado, 277
representação de, 290
tabela de, 263
grupos cristalográficos, 280

Hamilton, 366
harmônica, 507
média, 311
hessiana, matriz, 510
Hilbert, 221, 256, 547
hipérbole, 243
hiperbólica, função, 468
geometria, 545
hipercomplexos, números, 366
homeomorfo, 372
homeomorfismo, 370, 380
homogêneas, coordenadas, 240
equações, 296
homologia, 402
homomorfismo, 44, 120, 125, 272, 299
de álgebras, 415
de álgebras de Boole, 319
homotópico, 396
rel x_0, 399
homotopia, 395
teoria da, 396
Hopf, aplicação de, 403

ideal, 132, 139, 281
idempotente, lei, 95
operação, 316
identidade, 13
função, 22
igualdade, de conjuntos, 6
de funções, 18
imagem, 19, 276
imerge, 24
implicação, 106
implícita, função, 511
incidência, relação de, 235
inclusão, 4
aplicação de, 23
independência de representantes, 52
independente, axioma, XX, 546
índice, de ponto crítico, 509
de subgrupo, 277
indexada, família, 54

indução física, 57
indução, teorema de, 51
indutiva, definição, 59
    ordem, 89
indutivo, método, 219
inércia, princípio de, 427
ínfimo, 318
infinitésimo, 433
infinito, cardinal, 84
    conjunto, 30, 84
    decimal, 358
    enumerável, 31, 84
    integral, 459
    limite, 421
    produto, 490
informação, teoria da, X
inicial, objeto, 522
iniciais, condições, 471
injeção, 20
integração aproximada, 484
integração, 450
    por partes, 455
integral definida, 22, 451
    indefinida, 451
integrando, 451
integridade, domínio de, 134
inteira, norma, 134
inteiro, 4, 342
interior, automorfismo, 275
    espaço com produto, 297
    produto, 173, 297
intermediário, teorema do valor, 428
interseção, 8
intervalo, 413
Intuicionismo, 14
invariantes, 252
inversa, função, 28, 446
    imagem, 24
    de relação, 48
inversão, teorema da, 26
inversível, elemento, 43
    função, 28
    morfismo, 522
inverso, 43, 262
involução, 22
irredutível, elemento, 149
isometria, 199, 299
isomorfismo, 44, 101, 274, 522
isomorfo, 44, 274
iterativo, processo, 483

jacobiana, matriz, 500
jacobiano, 515
Jordan, arco de, 205
    conteúdo de, 216
    curva de, 205, 373
    teorema das curvas de, 205

kernel, 101, 120, 132, 193, 276, 537
    objeto -, 537
Kirby, 407
Klein, 164, 256
    garrafa de, 393
Koenigsberg, pontes de, 63, 371
Kronecker, delta de, 188

laço, 395
Lagrange, resto de, 481
    teorema de, 150, 278
linguagem da matemática, 1
Laplace, transformada de, 472
    equação de, 498, 507
Lawvere, 544
lei, de expoentes, 266, 467
    de tricotomia, 5, 49
Leibniz, 411
    teorema de, 64, 439
lema, 1
    da troca, 284
lexicográfica, ordem, 49
limitada, seqüência, 354
limite, 352, 418
linear,
    álgebra, 282
        de $\mathbb{R}^3$, 185
    equação, 188, 293
    função, 171
    gráfico, 47, 62
    operador, 469
    ordem, 49, 307
    programação, 300
    transformação, 192, 287
linearmente dependente, 168, 284
    independente, 168, 284
linhas de nível, 510
Liouville, 84
livre, grupo abeliano, 271
cálculo diferencial, 374
grupo, 527
variável, 553
Lobachevsky, 544
local, linearidade, 494

logarítmica, função, 22
logaritmo, 463
lógica, 539
da geometria, 219
lógicos, conectivos, 102
lugar (de caminho), 205

macaco, problema do, 132
mágico, quadrado, 127
majorante, 88
matemática, indução, 57
lógica, 539
matriz, 185, 197, 288
aumentada, 296
max, 427
máximos e mínimos, 481, 510
maximal, elemento, 88
ideal, 140
Mazur, 374
média aritmética, 310
geométrica, 310
harmônica, 311
médio, teorema do valor, 441, 455
medida, teoria da, 200, 450, 491
meio excluído, 550
metalinguagem, 548
metamatemática, 548
métrica, 298
métrico, espaço, 377
metrizável, 382
Milnor, 407
mmc (mínimo múltiplo comum), 10, 146
min, 427
Möbius, faixa de, 248, 393
transformação de, 268
modelo, 220, 401
de $\mathbb{RP}^2$, 246
módulo, 134, 171
Modus Ponens, 107, 549
Moise, 407
mônico, 531
polinômio, 326
monomorfismo, 101, 273
monótona, função, 429
morfismo, 520
mudas, variáveis, 451
mudo, índice, 59
multiplicação por escalares, 165
multiplicativo, inverso, 43
sistema, 42
multiplicidade (de um zero), 327

não-comutatividade da composição, 25
não-compacto, 388
não-degenerado, ponto crítico, 510
não-euclidiana, geometria, 301, 541, 544
não-métrico, espaço, 394
não-metrizáveis, 394
não-negativos, inteiros, 4
não-ordenado, par, 35
não-orientável, superfície, 405
não-singular, 193, 273
matriz, 290
não-trivial, solução, 191, 296
Napier, 463
natural, aplicação, 55
equivalência, 528
número, 4
projeção, 391
transformação, 528
negação, 14
negativos, inteiros, 342
neutro, elemento, 42, 262
Newton, 411
método de, 333, 483
nível, superfícies de, 511
nó, 374
de gráfico, 47
grupos de, 280
norma, 135, 171
especial, 157
normal, forma, 405
subgrupo, 276
normado, domínio, 137
noves fora, 119
numérica, análise, X
numérico, sistema, XV

objeto, 520
octônions, 368
operação binária, 114
operador, 18
órbita, 75
ordem, 308
arquimediana, 358
do grupo, 263
de ponto com relação à curva, 205
que preserva a, 49, 309
relação de, 48
para cardinais, 85
ordenação, 49, 307
ordenado,
anel, 309

conjunto, 48
corpo, 309
par, 35, 41
ordenador, subconjunto, 308
ordinal, número, 92
série, 92
orientação, que inverte a, 406
orientada, área, 182
orientável, superfície, 404
origem, 165
ortogonal, 199, 299
complemento, 301
matriz, 306
transformação, 305
ortonormal, base, 301

Papus, teorema de, 242
par, 35
parábola, 243
paradoxo cretano, 543
paralela, 301
postulado das, 301, 545
projeção, 252
paralelas, direções, 231
paralelos, reta e plano, 180
planos, 178
paralelogramo, lei do, 167
parcial, derivada, 497
ordem, 307
parciais, coeficientes diferenciais, 495
frações, 156
somas, 488
particular, integral, 471
partição, 53, 54
Pascal, tabela de, 76
teorema de, 244
Peano, 51, 339, 386
aplicação de, 86
axiomas de, 339, 552
pequena, categoria, 521
pequenos erros, 497
período, 445
permutação, 72
perpendicular, 301
a duas retas reversas, 228
projeção, 232
perpendiculares, direções, 231
perspectiva, 234
axial, 241
central, 241
perspectividade, 251
π, 204
Picard, processo de iteração de, 472
Pierce-Morgan, regras de, 12, 316
Pitágoras, 348
teorema de, 300
pitagórica, métrica, 378
princípio do escaninho, 61
plana, geometria projetiva, 235
plano, 177, 300
plena, subcategoria, 524
Poincaré, 387
conjetura de, 404
polar, 246
poliedro, 216
poligonal, curva, 205
polígono, 208
polinomial, equação, 122
forma, 322
função, 322, 328
polinômio, 31, 322, 415
pólo, 246
pontos críticos, 509
de inflexão, 482
fixo (de permutação), 75
numa categoria, 522
pontos circulares no infinito, 249
posto, de grupo abeliano, 280
de transformação linear, 291
postulado, 220
potência, conjunto, 7
potências, série de, 488
predicado, 548
preservação de desigualdades, 427
pretzel, 398
primitiva, 451
primitivo, polinômio, 153
primo, elemento, 148
número, 10, 128
principal, ideal, 140
valor, 478
princípio de dualidade, 238
de indução matemática, 58, 339
probabilidade, 77
e estatística, X
produto cartesiano, 35, 88, 377, 489
de categorias, 527
funtor que preserva o, 535
matriz, 197, 289
métrica, 379
numa categoria, 533

projeção, 37, 172
canônica, 302
de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, 165
projetiva, geometria, 234
projetividade, 252
proposição, 1, 94
proposicional, cálculo, 102
próprio, fator, 141
ideal, 140
subconjunto, 6
prova, 1, 220, 553
jogo de, 550

quadrada, matriz, 295
quadrado, número, 63
quadrática, equação, 333
forma, 510
polinomial, 324
resto, 133
quadratura do círculo, 208
quantificador, 14
quártica, 333
quatérnions, 366
quatro cores, problema das, 371
quíntica, 333
quociente, aplicação, 55
conjunto, 53
corpo de, 155, 156, 346
espaço, 277, 287, 390
grupo, 278

racional, função, 156, 366
número, 4, 344
Rado (T.), 407
raio de convergência, 488
de esfera, 172
raiz de equação, 122
de polinômio, 325
razão dupla, 279
real, álgebra, 367, 414
espaço projetivo, 251
número, 4, 353
plano projetivo, 236
recíproca, dualidade, 241
função, 416
recursiva, função, 553
reductio ad absurdum, 51, 108
reflexão-inversão, 270
reflexiva, 47
relação, 1, 46
relações (entre geradores), 524
representação, 290
resto, na expansão de Taylor, 479
teorema do, 326
restos, classes de, 125
restrição, 23
reta, 300
degenerada, 171
no infinito, 242
retangular, hipérbole, 180
reticulado, 184, 213, 318
retificável, caminho, 202
retilíneo, caminho, 201
reto, ângulo, 300
retrato, 535
Riemann, 450, 491
rigidamente equivalentes, 199
rígido, movimento, 199
Rolle, condições de, 440
teorema de, 440
Rosser, 614
rotação, 222, 270
Russel (Bertrand), 82
paradoxo de, 542

Schoenflies, 374
Schroeder-Bernstein, teorema de, 86
Schwartz (L.), 457
Schwartz, paradoxo de, 217
Schwartz, desigualdade de, 298
seção (dos racionais), 313
see, XIII
segmental, caminho, 201
segmentalmente conexo, 201
segunda ordem, equação de, 470
sela, ponto de, 510
semântico, paradoxo, 543
semi-aberto, intervalo, 413
semigrupo, 521
seno, 224
separação (de $\mathbb{R}^3$), 179
seqüência, 351, 424
seqüencialmente compacto, 388
série, 488
central inferior, 531
Siebenmann, 407
simétrica, diferença, 97
simétrico, 46
grupo, 74, 262
simples, curva fechada, 205
zero, 331
simplesmente conexo, 395

Simpson, regra de, 486
sinal, área com, 182
volume com, 183, 196
sistemas formais, 547
Smale, 404, 409
sobre, 20
sólido de genus *p*, 405
solução,
conjunto, 293
de congruências, 131
domínio, 325
soma (de série), 488
soma direta, 120, 272, 286
somabilidade, 491
Stirling, fórmula de, 76, 487
subálgebra, 101, 414
subanel, 117
subcategoria, 523
subconjunto, 4
subcorpo, 122
subdivisão (de polígono), 210
subespaço, 378
subgrupo, 120, 266, 271
subjacente, 118
funtor, 526
substituição, 322
função de, 324
regra de, 458
Sullivan, 407
superfície, 402
superiormente semicontínua, 391
suporte, 456
supremo, 89, 312, 361

tangente, 244, 432
plano, 496
tautologia, 107
Taylor, expansão de, 479, 509
tensores, 491
terminal, objeto, 522
termo, de fórmula, 553
de seqüência, 351
termo a termo, derivação, 489
teorema, 1
teoria de tipos, 544
tociente, função, 129
topologia, 256, 280
algébrica, 399
de $\mathbb{R}^n$, XVI, 370
topológico, espaço, 372, 382
invariante, 395
toro, 36
sólido, 36
totalmente ordenado, 49
transcendente, extensão, 366
número, 84
transfinita, aritmética, 82
transformação, 18
transitiva, 5, 46
translação, 174, 270, 287
transposta, 187, 304
trapézio, regra do, 485
triangulação, 406
triangular, desigualdade, 176, 298, 378
triangulares, números, 63
triângulo de referência, 240
trigonométricas, funções, 443, 476
trivial, grupo, 522
homomorfismo, 273, 522
solução, 191, 296
Turing, 124, 548, 554

um-a-um, 20
união, 8, 54
única, domínios de fatoração, 155
unicidade, teorema de (para mdc), 142
unicursal, gráfico, 62
unidade, elemento, 114
unificação, XVIII
unitário, 138
círculo, 117
conjunto, 4
matriz, 198
univalente, 17
universal, propriedade da aplicação, 531
universo de discurso, 3

valor, 17
variável ligada, 553
variedade, 402
com bordo, 404
fechada, 404
vazio, conjunto, 3, 7
Venn, diagrama de, 5
verdade, tabela de, 102
valor de, 102
vértice (de polígono), 208
vetor, 174
adição de, 165
vetorial, equação de reta, 170
geometria, 165

espaço, 282
$\mathbb{R}^3$, 165
produto, 180
subespaço, 167, 286
visual, percepção, 409
vizinhança, 382, 422
volume, 182

Waring, problema de, 150
Wedderburn, 368
Weierstrass, 415, 438
Whitehead (J. H. C.), 407
Wilson, teorema de, 130

Zeeman, 404, 409
zero, característica, 331
de uma função, 325
-homotópico, 396
morfismo, 395
objeto, 523
m-uplo, 331
polinomial, 323
Zorn, lema de, 89