Geometria Computacional: Fecho convexo

INF2604 – Geometria Computacional
Prof. Hélio Lopes
lopes@inf.puc-rio.br
sala 408 RDC

Fecho convexo

O que é uma região convexa?

Uma região é *convexa* se para qualquer par de pontos dessa região, o segmento de reta que os liga está contido na região.

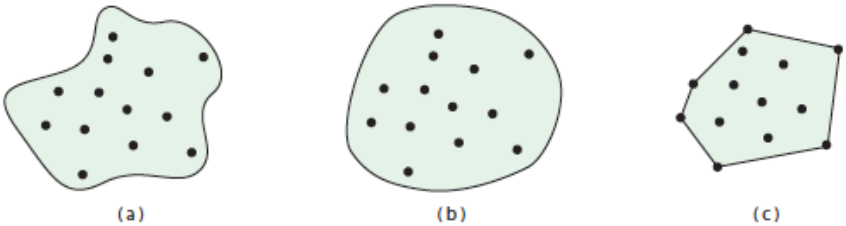
Fecho convexo

O que é um fecho convexo de S?

O *fecho convexo* de S, denotado por conv(S), é a interseção de todas as regiões convexas que contém S. Em outras palavras, é a menor região convexa contendo os pontos de S.

Fecho convexo

Dado um conjunto de pontos $S=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, queremos ter um algoritmo para construir o fecho convexo de S.



Fecho convexo

Combinação convexa

Sabemos que para quaisquer dois pontos u,v de uma região convexa R, o segmento uv está em R. Formamente podemos escrever que qualquer ponto w desse segmento é dado por:

$\alpha u + \beta v = w$, onde $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

Uma combinação convexa dos pontos de $S=\{p_1,p_2, \ldots,p_n\}$ é um ponto w que é escrito na forma:

$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n = w$, onde $\lambda_i \geq 0$ e $\Sigma_{i=1..n} \lambda_i = 1$.

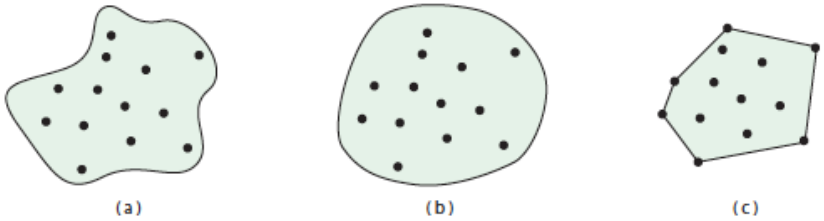
Fecho convexo

Teorema:

Para qualquer conjunto de pontos $S = \{p_1,p_2, \ldots,p_n\}$, o fecho convexo de S é o conjunto de todas as combinações convexas de S.

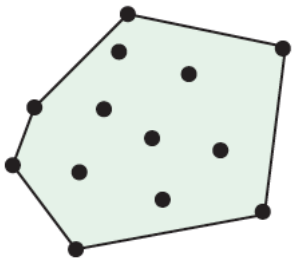
Fecho convexo

Dado um conjunto de pontos $S=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, queremos ter um algoritmo para construir o fecho convexo de S.



Fecho convexo

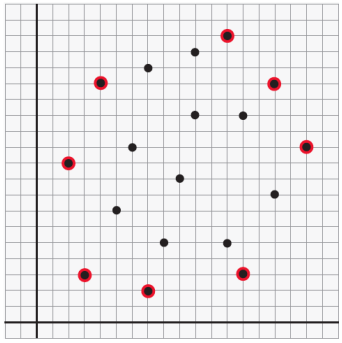
Mas afinal, como representar o fecho convexo?



Fecho convexo

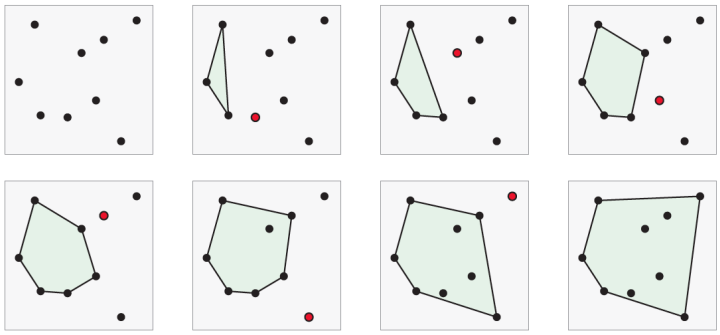
A representação de conv(S) é dada pelo polígono que forma o fecho, cujos vértices são chamados de vértices do fecho.

(2, 10)	(10, 17)
(3, 3)	(10, 13)
(4, 15)	(12, 5)
(5, 7)	(12, 18)
(6, 11)	(13, 3)
(7, 2)	(13, 13)
(7, 16)	(15, 8)
(8, 5)	(15, 15)
(9, 9)	(17, 11)



Fecho convexo

Algoritmo incremental



Fecho convexo

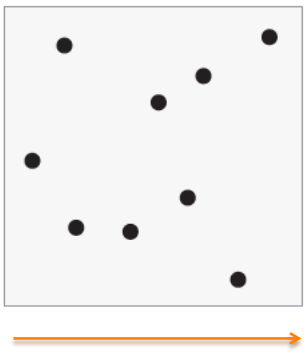
Observação

Os pontos de S que estão mais a esquerda, mais a direita, mais acima ou mais abaixo pertencem ao conv(S).

Fecho convexo

Primeiro passo

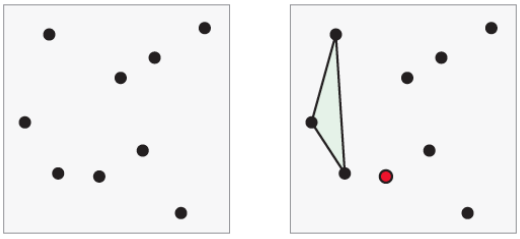
Ordenação dos pontos de S na direção do eixo dos x's.



Fecho convexo

Segundo passo

Seja H_3 os três primeiros pontos do conjunto S ordenado tais que conv(H_3) seja dado por um triângulo orientado no sentido anti-horário.



Fecho convexo

Passo de indução

Assuma que H_k seja o conjunto dos vétices do fecho, orientados no sentido anti-horário, dado pelos primeiros k-pontos de S ordenado.

Considere que p seja o próximo ponto da lista de S ordenada. Por conseqüência, p está no conv(H_{k+1}). Então, temos que introduzir o ponto p à lista e remover os pontos de H_k que não pertencem ao conv(H_{k+1}).

Fecho convexo

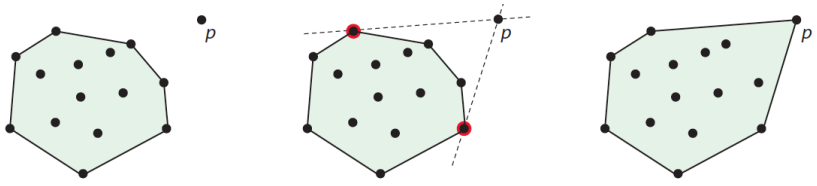
Definição

Seja P um polígono convexo e x um ponto de P. Então, dizemos que uma linha L contendo x suporta P em x se todos os pontos de P estão em um único lado de L. Em particular, dizemos que a linha L é tangente a P em x.

Fecho convexo

Tarefa

Nossa tarefa agora é descobrir dois pontos de H_k que possuem linhas tangentes a conv(H_k) que passam por p.



Fecho convexo

Observações

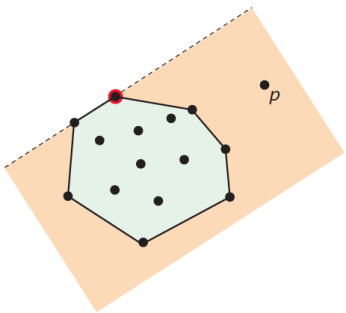
Uma aresta de conv(H_k) ela pode ter um dos três atributos: ela é visível por p, ela não é visível por p, ou ela está na mesma linha de p.

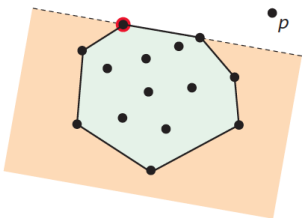
Disconsiderando a última possibilidade, então existirão dois vértices de conv(H_k) cujas aretas adjacentes mudam de visível para invisível, esses vértices são os vértices onde passarão as linhas tangentes a P que passam por p.

Fecho convexo

Observação

Uma aresta não é visível por p se o conv(H_k) e p estão do mesmo lado da linha L que contém essa aresta.





Fecho convexo

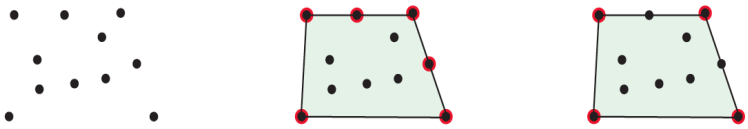
Inserção de p em conv(H_{k+1})

Uma vez que encontrados os dois pontos tangentes p_i e p_j, simplesmente adicionamos p à lista de H_{k+1} da seguinte forma:

$\{\ldots,p_{i-1},p_i,p,p_j,p_{j+1},\ldots\}$

Fecho convexo

Casos degenerados



Fecho convexo

Posição geral

Um conjunto de pontos está em posição geral se sua configuração não possui casos degenerados.

Nesse algoritmo incremental, assumiremos que:

Dois ou mais pontos não estão na mesma linha vertical, e que três ou mais pontos não são colineares.

Fecho convexo

Análise do algoritmo

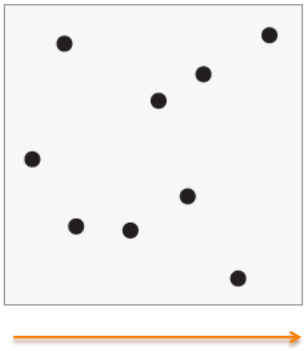
Passo básico O(1):

Determinar se a tripla de pontos (a,b,p) está orientada no sentido horário ou anti-horário.

Fecho convexo

Análise do algoritmo: Primeiro passo

Ordenação dos pontos de S na direção do eixo dos x's -> O(nlogn)



Fecho convexo

Análise do algoritmo: Inserção de p nos n passos do algoritmo

Determinar os dois vértices tangentes e inserir p na lista -> $O(n^2)$

$$3+4+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(1+2)=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}-3$$

Fecho convexo

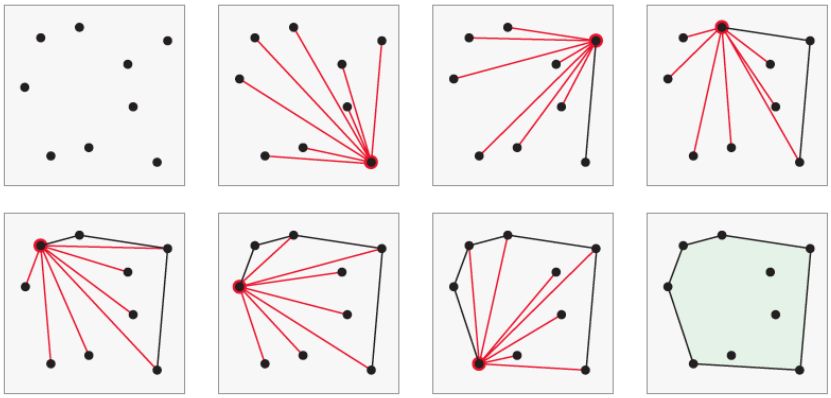
Análise do algoritmo incremental

INCREMENTAL Convex Hull Algorithm $O(n^2)$

Sort the points of S according to their x-coordinate. The first three of these points determine a triangle, our starting hull. Consider the next point in the ordered set S, add it to the hull, and remove the enclosed non-hull points. Continue this process of adding one point of S at a time until all of S has been processed.

Fecho convexo

Algoritmo de varredura



Gift-wrapping algorithm

Fecho convexo

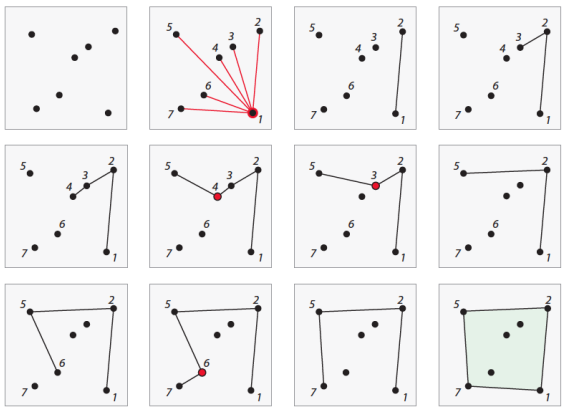
Análise de complexidade

GIFTWRAPPING Convex Hull Algorithm $O(nh)$

Start with a known point on the hull as an anchor, such as the bottommost point. Comparing angles to all other points from this anchor, choose the point with the largest angle. Repeat this process, moving around the hull, analogous to the process of winding a string around the point set.

Fecho convexo

Algoritmo de Graham



Graham scan algorithm

Fecho convexo

Análise de complexidade

GRAHAM SCAN Convex Hull Algorithm $O(n \log n)$

Choosing the bottommost point as an anchor, order all other points based on the angles they form about this anchor. Construct the hull by following this ordering, adding points for left hull turns and deleting for right turns.

Fecho convexo

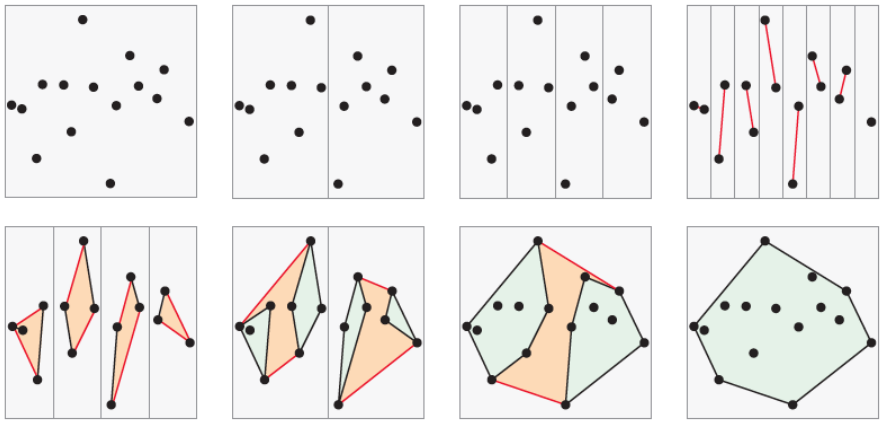
Teorema:

Um algoritmo de fecho convexo de um conjunto S de n pontos no plano não pode ter complexidade melhor do que O(nlogn). Ou seja, Ω(nlogn) é uma cota inferior para o problema.

Fecho convexo

PUC RIO

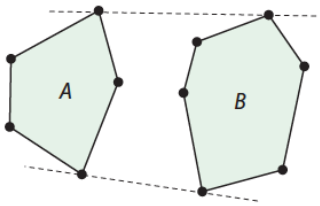
Algoritmo dividir para conquistar

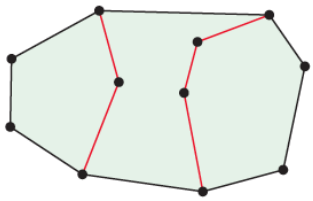


Fecho convexo

PUC RIO

Como determinar as duas tangentes?

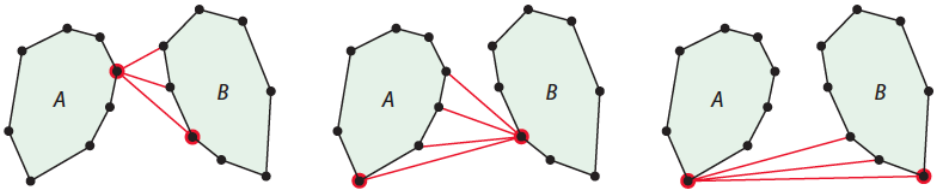




Fecho convexo

PUC

Andando no bordo para achar as tangentes



Fecho convexo

PUC

Análise de complexidade

DIVIDE-AND-CONQUER Convex Hull Algorithm $O(n \log n)$

Sort the points of S by x-coordinate. Divide the points into two (nearly) equal groups. Compute the convex hull of each group (recursively using divide and conquer). Merge the two groups together with upper and lower supporting tangents to get the hull of S.

PUC
RIO
dúvidas?
Prof. Hélio Lopes
lopes@inf.puc-rio.br
sala 408 RDC