variáveis complexas e suas aplicações

Ruel V. Churchill

Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA.
VARIÁVEIS
COMPLEXAS E
SUAS APLICAÇÕES

Tradução

Tadao Yoshioka
Professor de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Revisão Técnica

Alfredo Alves de Farias
Professor Adjunto do
Instituto de Ciências Exatas (Depto. de Matemática).
Universidade Federal de Minas Gerais
## Sumário

Prefácio à Edição Brasileira .................................................. XI
Prefácio .................................................................................. XII

1. **NÚMEROS COMPLEXOS** ...................................................... 1

2. **FUNÇÕES ANALÍTICAS** .................................................... 19

3. **FUNÇÕES ELEMENTARES** ................................................ 44

4. **TRANSFORMAÇÕES POR FUNÇÕES ELEMENTARES** .............. 62
   Funções Lineares. A Função \( z^n \). A Função \( 1/z \). O Ponto no Infinito. A Transformação Linear Fracionária. Transformações Lineares Fracionárias Especiais. A Função \( z^{1/2} \). Outras Funções Irracionais. A Transformação \( w = \exp z \). A Transformação \( w = \sen z \). Transformações Sucessivas. Tabela de Transformações de Regiões.

5. **INTEGRAIS** .................................................................... 89
6. SÉRIES DE POTÊNCIAS ................................................................. 121

7. RESÍDUOS E POLOS ................................................................. 145

8. TRANSFORMAÇÕES CONFORMES ............................................ 166

9. APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES ................. 180

10. A TRANSFORMAÇÃO DE SCHWAZ-CHRISTOFFEL .................. 206

11. FÓRMULAS INTEGRAIS DE POISSON ................................. 228
12. COMPLEMENTOS SOBRE TEORIA DAS FUNÇÕES ........................................ 244

A. Prolongamento Analítico ................................................................. 244
   Condições sob as Quais \( f(z) = 0 \). Permanência de Formas de Identidades Funcionais. Unicidade do Prolongamento Analítico. Exemplos. O Princípio de Reflexão.

B. Pontos Singulares e Zeros ............................................................... 253

C. Superfícies de Riemann ...................................................................... 257
   Uma Superfície para a Função \( \log z \). Uma Superfície para a Função \( z^{1/2} \). Superfícies para Outras Funções Irracionais.

Apêndices .............................................................................................. 263
1. Bibliografia ......................................................................................... 263
2. Tabela de Transformações de Regiões ................................................. 265

Índice Analítico ...................................................................................... 273
Prefácio à Edição Brasileira

O texto, que ora se apresenta à comunidade estudantil, em língua portuguesa, granjeia de uma certa tradição junto a especialistas em ramos da Engenharia e da Física, dado o preparo abrangente desses em disciplinas classificadas como Métodos Matemáticos.

Também é um texto muitas vezes usado na primeira familiarização de estudantes de Matemática em nível de graduação, com a teoria das funções complexas.


A exposição é feita no estilo clássico discursivo e operacional adequado a estudantes de 5º período de cursos nas áreas de ciências e de tecnologia. Exercícios são formulados, em geral, a cada duas ou três seções que abrangam suficiente material para resolvê-los. Isto permite uma certa eficiência na absorção imediata dos conceitos que são introduzidos a cada passo. Tais exercícios, devido a esse objetivo, são, em sua grande maioria, de resolução direta, possuindo suficiente informação, de modo a não torná-los excessivamente algébricos mas, por outro lado, dosados de maneira a evitar uma rotina de cálculos.

Compreendida a intenção do Autor — pioneira na época — em tornar acessível a um grande público os métodos e resultados da teoria das funções complexas de uma variável complexa, é fácil planejar sua adoção em disciplinas adequadas e destinadas a estudantes de ciência aplicada e tecnologia. O texto pode ser coberto em um único semestre, desde que demonstrações não essenciais sejam omitidas, assegurando os objetivos de compreensão do conteúdo dos enunciados e suas utilizações como ferramentas matemáticas.

Guilherme M. de La Penha, Ph. D.
Diretor Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Prefácio

A teoria das funções de uma variável complexa é uma das partes básicas da análise matemática. Sua influência pode ser notada em quase todos os ramos da matemática. Além de ser proeminente na matemática pura e de possuir uma estrutura lógica elegante, a teoria representa um dos instrumentos mais poderosos dos matemáticos aplicados, engenheiros e físicos.

O primeiro objetivo deste livro é a apresentação de um desenvolvimento lógico daquelas partes da teoria clássica, que mais se destacam nas aplicações da matéria. Exceto para alguns conceitos geométricos que podem ser aceitos intuitivamente, a presente apresentação pretende ser rigorosa e auto-suficiente. A seleção dos métodos de demonstração e do arranjo dos tópicos foram feitos tendo-se em vista a simplicidade e a brevidade, por vezes com sacrifício da elegância. Se, num curso de um semestre, se quiser dar maior ênfase à teoria dos resíduos e das transformações conformes, o tempo que se pode dedicar à teoria que antecede é limitado e seu desenvolvimento tem de ser bem conciso.

O segundo objetivo é o de dar uma introdução a aplicações, inclusive os usos da teoria dos resíduos e das integrais curvilíneas no cálculo das integrais reais, e aplicações das transformações conformes a problemas de potenciais, temperaturas estacionárias e escoamento de fluidos. As aplicações das transformações conformes apresentam um dos métodos clássicos de resolver problemas de contorno nas equações de derivadas parciais, restritos à equação de Laplace com duas variáveis independentes. Assim o livro serve como um volume acompanhante dos livros do autor “Fourier Series and Boundary Value Problems” e “Operational Mathematics”, onde são tratados outros métodos clássicos de resolução de problemas lineares de contorno. No segundo livro dão-se algumas outras aplicações de variáveis complexas em relação com as transformadas de Laplace.

Os resultados básicos são, na maioria, enunciados como teoremas. Ilustram a teoria e as aplicações inúmeros exemplos e exercícios simples. O Apêndice 2 apresenta uma tabela de transformações conformes.

Os nove primeiros capítulos, com várias substituições do resto do livro, serviram por longo tempo como conteúdo de um curso de três horas semanais dado em cada semestre na Universidade de Michigan. As classes consistem principalmente de estudantes graduados e graduandos, especializando-se em engenharia, matemática ou física. Os estudantes têm como pré-requisito o equivalente a um semestre do cálculo avançado. Oitam-se nas aulas, alguns tópicos da matéria, já que os estudantes têm capacidade de entendê-los sem a assistência do instrutor. Como foi observado no início do capítulo 5, os capítulos 8 e 9 sobre transformações conformes e suas aplicações podem ser introduzidos logo após o capítulo 4, caso haja tal necessidade.
O livro é uma revisão extensa da primeira edição, publicada em 1948. Grande parte do material foi reescrito com vistas à exatidão lógica e clareza. O capítulo 11, sobre fórmulas integrais de Poisson, é inteiramente novo. Ao que salba, o autor, constitui a primeira coleção de tais fórmulas. O número de exercícios foi aumentado consideravelmente, dando-se as respostas para a maioria deles. Algumas extensões da teoria aparecem nos exercícios.

Durante a preparação do livro nesta edição, o autor se valeu de sugestões de vários estudantes e colegas. Dentre seus colegas locais, Prof. C. L. Dolph, B. Dushnik, T. H. Hildebrandt, W. Kaplan e E. D. Rainville merecem agradecimentos especiais. Por comentários proveitosos de colegas, entre os quais J. R. Britton, W. B. Curry, R. J. Duffin, W. L. Duren, T. J. Higgins, I. Marx, M. E. Shanks e F. H. Steen, o autor expressa sua apreciação. A seleção do material ou dos métodos de demonstração foi influenciada por alguns dos livros cujos títulos se encontram no Apêndice 1.

Ruel V. Churchill
APÊNDICE 1

Bibliografia

A seguinte lista de livros, para estudo suplementar da teoria das funções de uma variável complexa e das aplicações desta teoria, não pretende ser completa. Outras referências podem ser encontradas em alguns dos livros abaixo relacionados.

TEORIA

———: “Theory of Functions of a Complex Variable,” vols. 1 and 2, Chelsea Publishing
Evans, G.C.: “The Logarithmic Potential,” American Mathematical Society, Providence, R.I.,
1927.
London, 1918.
Hurwitz, A., and R. Courant: “Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische
1954.
Reading, Mass., 1957.
of Toronto Press, Toronto, 1944.
1950.
APlicações