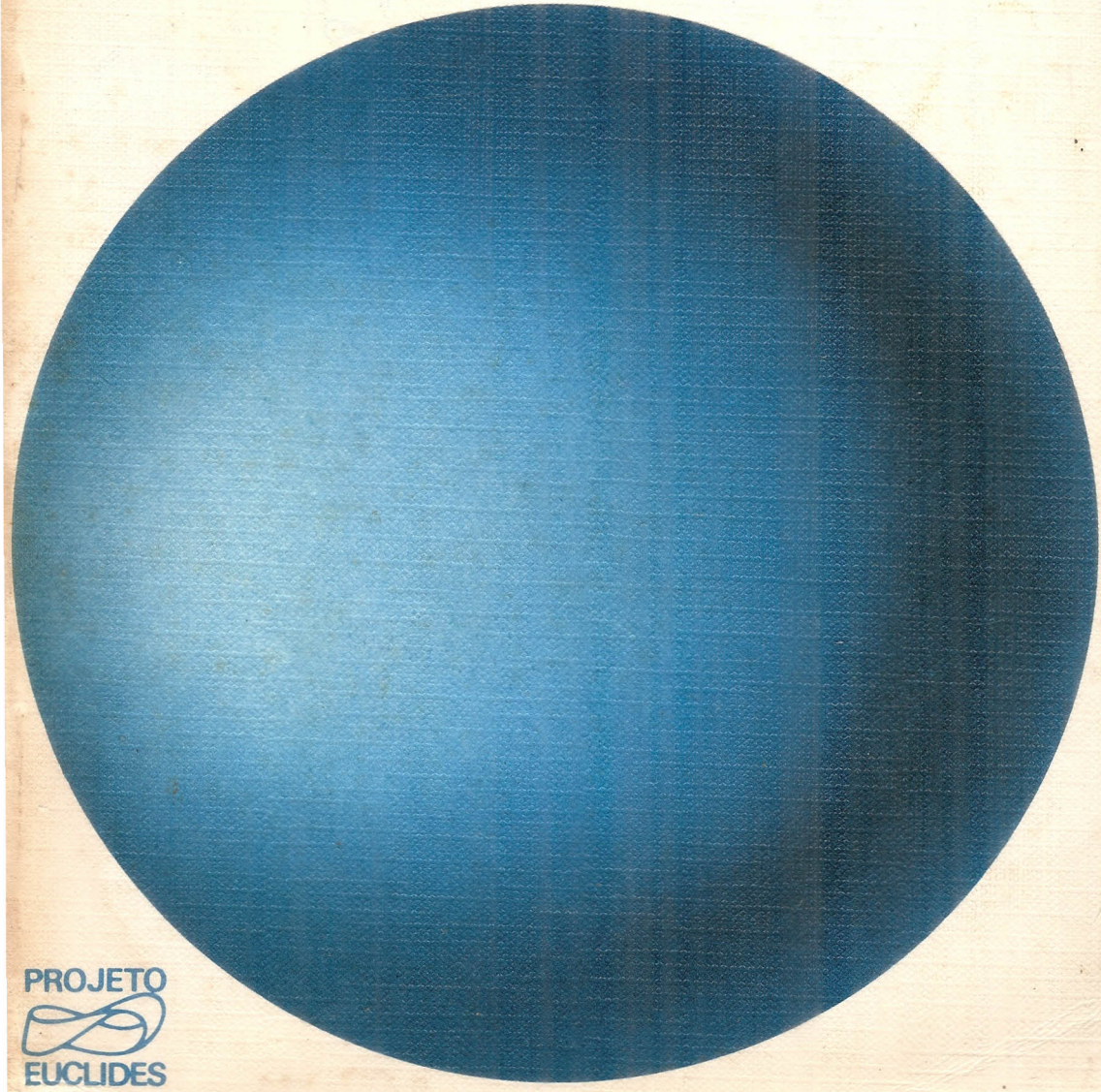
manfredo perdigão do carmo

geometria riemanniana



PROJETO EUCLIDES

manfredo p.
do carmo

geometria riemanniana

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada CNPq

Copyright © 1979, by Manfredo Perdigão do Carmo
Direitos reservados, 1979, por Conselho Nacional
de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq,
Av. W-3 Norte, Brasília, DF

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Gian Calvi Criação Visual Ltda
Ladeira Ari Barroso 40, Leme, Rio de Janeiro, RJ

Projeto Euclides — Coordenado por Elon Lages Lima

Comissão Editorial: Chaim Samuel Hönig, Djairo Guedes de Figueiredo, Elon Lages Lima, Heitor Gurgulino de Souza, Jacob Palis Junior, Manfredo Perdigão do Carmo, Pedro Jesus Fernández.

Títulos já publicados

1. Curso de Análise, vol. 1, Elon Lages Lima
2. Medida e Integração, Pedro Jesus Fernández
3. Aplicações da Topologia à Análise, Chaim Samuel Hönig
4. Espaços Métricos, Elon Lages Lima
5. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Djairo Guedes de Figueiredo
6. Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Jacob Palis Junior e Welington C. de Melo
7. Introdução à Álgebra, Adilson Gonçalves
8. Aspectos Teóricos da Computação, Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos Simon e Tomasz Kowaltowski
9. Teoria Geométrica das Folheações, Alcides Lins Neto e Cesar Camacho
10. Geometria Riemanniana, Manfredo P. do Carmo
11. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Jorge Sotomayor

Composição e arte:
AM Produções Gráficas Ltda.

Impresso por:
Gráfica Editora Hamburg Ltda.
Rua Apeninos, 294 - São Paulo - Brasil

Distribuido por:
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Avenida Venezuela, 163
20.220 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

ÍNDICE

PREFÁCIO VII
COMO USAR ESTE LIVRO IX

CAPÍTULO 0 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS 1

1. Introdução 1
2. Variedades diferenciáveis; espaço tangente 2
3. Imersões e mergulhos; exemplos 10
4. Outros exemplos de variedades. Orientação 13
5. Campos de vetores; colchetes. Topologia das variedades 23

Exercícios 27

CAPÍTULO I MÉTRICAS RIEMANNIANAS 31

1. Introdução 31
2. Métricas Riemannianas 34

Exercícios 38

CAPÍTULO II CONEXÕES AFINS; CONEXÕES RIEMANNIANAS 40

1. Introdução 40
2. Conexões afins 41
3. Conexões Riemannianas 45

Exercícios 48

CAPÍTULO III GEODÉSICAS; VIZINHANÇAS CONVEXAS 51

1. Introdução 51
2. O fluxo geodésico 52
3. Propriedades minimizantes das geodésicas 58
4. Vizinhanças convexas 65

Exercícios 68

CAPÍTULO IV CURVATURAS 77

1. Introdução 77
2. Curvatura 78
3. Curvatura seccional 82
4. Curvatura de Ricci e curvatura média 85

Exercícios 88

CAPÍTULO V CAMPOS DE JACOBI 92

1. Introdução 92
2. A equação de Jacobi 92
3. Pontos conjugados 98

Exercícios 102

CAPÍTULO VI IMERSÕES ISOMÉTRICAS 106

1. Introdução 106
2. A segunda forma fundamental 107

Exercícios 115

CAPÍTULO VII VARIEDADES COMPLETAS; O TEOREMA DE HOPF E RINOW. O TEOREMA DE HADAMARD ... 119

1. Introdução ... 119
2. Variedades completas; Teorema de Hopf e Rinow ... 120
3. O teorema de Hadamard ... 124

Exercícios ... 127

CAPÍTULO VIII ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE ... 130

1. Introdução ... 130
2. Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura ... 131
3. O espaço hiperbólico ... 134
4. As formas espaciais ... 138

Exercícios ... 143

CAPÍTULO IX VARIAÇÕES DA ENERGIA ... 146

1. Introdução ... 146
2. As fórmulas da primeira e da segunda variações da energia ... 146
3. O Teorema de Bonnet-Myers, e o Teorema de Synge-Weinstein ... 156

Exercícios ... 162

CAPÍTULO X O TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE RAUCH ... 165

1. Introdução ... 165
2. O Teorema de Rauch ... 166
3. Aplicação do Lema do Índice à teoria das imersões ... 175
4. Pontos focais e uma extensão do Teorema de Rauch ... 180

Exercícios ... 189

CAPÍTULO XI O TEOREMA DO ÍNDICE DE MORSE ... 196

1. Introdução ... 196
2. O Teorema do índice ... 196

Exercícios ... 203

CAPÍTULO XII O GRUPO FUNDAMENTAL DAS VARIEDADES DE CURVATURA NEGATIVA ... 206

1. Introdução ... 206
2. Domínio fundamental. Existência de geodésicas fechadas ... 207
3. O Teorema de Preissman ... 211

CAPÍTULO XIII O TEOREMA DA ESFERA ... 218

1. Introdução e preliminares ... 218
2. O Teorema da esfera ... 226

REFERÊNCIAS ... 234

ÍNDICE ALFABÉTICO ... 237

Prof. Altamir A. R. Araldi

61

PREFÁCIO

O objetivo deste livro é familiarizar o leitor com a linguagem básica e alguns resultados fundamentais da Geometria Riemaniana. Para evitar apelos a conhecimentos prévios de variedades diferenciáveis, foi incluído um Capítulo 0 que contém aqueles conceitos e resultados de variedades diferenciáveis que são utilizados de maneira essencial no restante do livro.

Os quatro primeiros capítulos do livro apresentam os conceitos básicos da Geometria Riemaniana (métricas Riemanianas, conexões Riemanianas, geodésicas e curvatura). Uma boa parte do estudo da Geometria Riemaniana consiste no entendimento das relações entre geodésicas e curvatura. Os campos de Jacobi, instrumento essencial para este entendimento, são introduzidas no Capítulo 5. No Capítulo 6 introduzimos a segunda forma fundamental associada a uma imersão isométrica, e demonstramos uma generalização do Teorema Egregium de Gauss. Isto permite relacionar a noção de curvatura em variedades Riemanianas com o conceito clássico de curvatura Gaussiana em superfícies.

A partir do Capítulo 7 iniciamos o estudo de questões globais. Demos ênfase às técnicas de Cálculo das Variações, que são apresentadas sem admitir conhecimentos prévios do assunto. Entre outros, demonstramos os Teoremas de Hadamard (Cap. 7), de Myers (Cap. 9) e de Synge (Cap. 9), os Teoremas de comparação de Rauch (Cap. 10), e o Teorema do índice de Morse (Cap. 11). Uma das mais notáveis aplicações das técnicas de Cálculo das Variações, o Teorema da esfera, é apresentado no Capítulo 13. Além disso, incluimos um teorema de "uniformização" para variedades de curvatura constante (Cap. 8) e um estudo do grupo fundamental das variedades compactas de curvatura negativa (Cap. 12).

Muitos tópicos importantes estão ausentes. Por limitações de tempo e espaço, uma escolha era necessária; esperamos que as referências mencionadas em cada capítulo estimulem o leitor a completar os seus conhecimentos na direção de seu gosto pessoal.

Nossa dívida para com as fontes existentes (escritas e orais) é enorme e impossível de ser catalogada. Mencionamos apenas Chern [11], Klingenberg-Gromoll-Meyer [22] e Milnor [34] como influências principais.

Este livro teve origem em notas de um curso dado em Berkeley em 1968. Posteriormente, com a ajuda de alunos do IMPA, as notas foram traduzidas para o Português e publicadas na coleção de Monografias do IMPA em 1971. Finalmente, em uma forma muito próxima da atual, ele foi apresentado como um curso na Escola de Geometria Diferencial de Fortaleza em Julho de 1978. Ao longo de todos estes anos, vários colegas e alunos contribuíram com críticas e sugestões para a melhoria do texto. Destaco, de modo muito especial, minha gratidão ao professor Lucio Rodríguez que, em minha ausência se encarregou do enfadonho trabalho de corrigir as provas e organizar o índice alfabético. A todos, os meus sinceros agradecimentos.

Manfredo Perdigão do Carmo

Rio de Janeiro, junho de 1979

COMO USAR ESTE LIVRO

Os pré-requisitos à leitura do livro são:

1) Um bom conhecimento de Cálculo, incluindo a formulação geométrica da noção de diferencial e o teorema da função inversa.
2) Uma certa familiaridade com elementos de Geometria Diferencial das superfícies. Por exemplo, os Capítulos 2 (2.1 a 2.4), 3 (3.1 e 3.2) e 4 (4.1 a 4.6) de M. do Carmo [6] são suficientes.

Se o leitor for familiar com as definições básicas de variedades diferenciáveis, poderá omitir inteiramente o Capítulo 0. Caso contrário, tal capítulo deverá ser considerado como parte do curso.

A partir do Capítulo 6, se utilizam as noções de espaços de recobrimento que podem ser encontrados no Cap. 5, §5, 6, de M. do Carmo [6]; tais partes são indicadas por *.

Em alguns exercícios (nunca, porém, no texto) se utiliza um certo conhecimento de formas diferenciais. Os Capítulos 1, 2 e 3 de M. do Carmo [8] são suficientes. Tais exercícios são indicados por +.

Alguns resultados (em geral, a partir do Cap. 8) requerem familiaridade com o grupo fundamental. A sucinta exposição que se encontra nas 27 primeiras páginas de Greenberg [17] (Caps. 1-6) é inteiramente suficiente. Tais resultados são indicados por **.

Os Capítulos de 1 a 7 são indispensáveis ao resto do livro. A partir daí, um curso que visa o teorema da esfera, poderá omitir os Capítulos 8 e 12. Como uma alternativa, poderão ser omitidos os Capítulos 8 e 11 e concluir o curso com o Capítulo 12. Um curso mínimo poderia conter os Capítulos de 0 a 7, a Secção 5.6 de M. do Carmo [6], as Secções 1, 2 e 3 do Capítulo 8 e o Capítulo 9 até (incluindo) o Teorema de Bonnet-Myers.

CAPÍTULO 0

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

1. Introdução

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. O primeiro exemplo de variedade accessível à nossa experiência é uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$. Recordemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para todo ponto $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre S, tais que:

a) $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo diferenciável;

b) a diferencial $(d\mathbf{x})_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é biunívoca para todo $q \in U$ (V. M. do Carmo, [6], Chap. 2).

A aplicação $\mathbf{x}$ é chamada uma parametrização de S em p.

A conseqüência mais importante da definição de superfície regular é o fato que a mudança de parametrizações é um difeomorfismo (M. do Carmo, [6], §2.3. Cf. também o Exemplo 4.2 adiante). Mais precisamente, se $\mathbf{x}_\alpha: U_\alpha \to S$ e $\mathbf{x}_\beta: U_\beta \to S$ são duas parametrizações tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, então as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha: \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta: \mathbf{x}_\beta^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ são diferenciáveis.

Deste modo, uma superfície regular é intuitivamente uma reunião de abertos do $\mathbb{R}^2$, organizados de tal modo que quando dois tais abertos se intersectam a transição de um para outro se faz de maneira diferenciável. Como conseqüência, tem sentido, em uma superfície regular, falar em funções diferenciáveis e aplicar aí os métodos do Cálculo Diferencial.

O maior defeito da definição de superfície regular é a sua dependência em relação ao $\mathbb{R}^3$. Com efeito, a idéia natural de superfície é a de um conjunto que seja bi-dimensional (em um certo sentido) e ao qual se possa aplicar o Cálculo Diferencial do $\mathbb{R}^2$; a presença desnecessária do $\mathbb{R}^3$ é simplesmente uma imposição de nossa natureza física.

Embora a necessidade de uma idéia abstrata de superfície (isto é, sem envolver um espaço ambiente) fosse entrevista desde Gauss

([15], pg. 21), foi necessário quase um século para que tal idéia atingisse a forma definitiva que apresentamos aqui. Uma das razões desta demora é que, mesmo para as superfícies do $\mathbb{R}^3$, o papel fundamental da mudança de parâmetros não era bem compreendido (Cf. Obs. 2.2 da próxima secção).

A definição explícita de variedade diferenciável será apresentada na próxima secção. Como não há vantagem alguma em nos restringirmos à dimensão dois, a definição será dada para uma dimensão n qualquer.

2 Variedades diferenciáveis; espaço tangente

2.1 DEFINIÇÃO. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

1) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.

2) Para todo par α, β, com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis (Fig. 1).

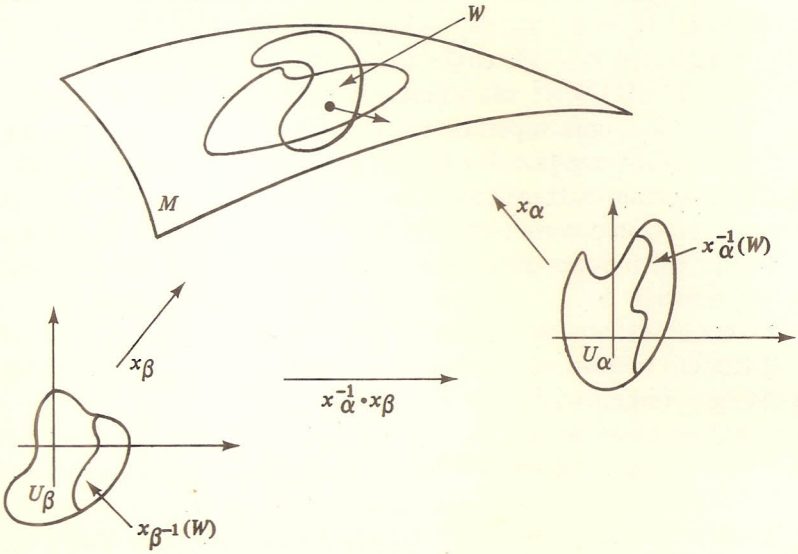


Figura 1

3) A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições (1) e (2).

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

A condição (3) comparece por razões puramente técnicas. Em verdade, dada uma estrutura diferenciável em M, podemos facilmente completá-la em uma maximal, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição (2). Portanto, com um certo abuso de linguagem, podemos dizer que uma variedade diferenciável é um conjunto munido de uma estrutura diferenciável. Em geral, a extensão à estrutura maximal será admitida sem maiores comentários.

2.2 OBSERVAÇÃO. Uma comparação entre a Def. 2.1 e a definição de superfície regular em $\mathbb{R}^3$ mostra que o ponto essencial (a menos da mudança de 2 para n) foi destacar a propriedade fundamental da mudança de parâmetros (que é um teorema para superfícies em $\mathbb{R}^3$) e colocá-la como axioma na condição 2 da Def. 2.1. Como logo veremos, esta é a condição que permite transportar para as variedades diferenciáveis todas as noções do Cálculo Diferencial do $\mathbb{R}^n$.

2.3 OBSERVAÇÃO. Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um *aberto* de M se $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe-se que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são contínuas.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável. Vejamos um exemplo não-trivial.

2.4 EXEMPLO. *O espaço projetivo real* $P^n(\mathbb{R})$. Indicaremos por $P^n(\mathbb{R})$ o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$; isto é, $P^n(\mathbb{R})$ é conjunto das "direções" de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vamos introduzir em $P^n(\mathbb{R})$ uma estrutura diferenciável. Para isto, seja $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observe, inicialmente, que $P^n(\mathbb{R})$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0;$$

os pontos de $P^n(\mathbb{R})$ serão indicados por $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Observe que, se $x_i \neq 0$,

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right].$$

Definamos em $P^n(\mathbb{R})$ subconjuntos $V_1, \ldots, V_{n+1}$, dados por:

$$V_i = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

e aplicações $\mathbf{x}: \mathbb{R}^n \to V_i$ por

$$\mathbf{x}_i(y_1, \ldots, y_n) = [y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n],$$

onde $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Geometricamente, V_i é o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$. Vamos mostrar que a família $\{(\mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i)\}$ é uma estrutura diferenciável em $P^n(\mathbb{R})$.

Com efeito, cada aplicação $\mathbf{x}_i$ é evidentemente biunívoca e $\bigcup_i \mathbf{x}_i(\mathbb{R}^n) = P^n(\mathbb{R})$. Resta mostrar que $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ é aí diferenciável, $j = 1, \ldots, n+1$. Ora, os pontos de $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \quad y_j \neq 0\}.$$

Portanto $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e, supondo $i > j$ (o caso $i < j$ é análogo),

$$\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{x}_j^{-1}[y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n] =$$

$$= \mathbf{x}_j^{-1}\left[\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right] =$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right),$$

que é evidentemente diferenciável.

Em resumo, o espaço das direções de $\mathbb{R}^{n+1}$ (= espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$) fica coberto por $n+1$ vizinhanças coordenadas V_i, onde V_i é constituído pelas direções de $\mathbb{R}^{n+1}$ que não estão no hiperplano $x_i = 0$; além disto, em cada V_i temos coordenadas

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

onde $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ são as coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$. É usual, na terminologia clássica, chamar as coordenadas de V_i "coordenadas não-homogêneas" correspondentes às "coordenadas homogêneas" $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Antes de apresentarmos mais exemplos de variedades diferenciáveis, convém explorar um pouco mais as conseqüências da Def. 2.1.

De agora em diante, quando indicarmos uma variedade por M^n, o índice superior n indicará a dimensão de $M = M^n$.

Primeiro, estenderemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

2.5 DEFINIÇÃO. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi: M_1 \to M_2$ é *diferenciável em* $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y}: V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}: \mathbf{x}^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1}$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$ (Fig. 2). φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Decorre da condição (2) da Def. 2.1 que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação (1) é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Em seguida, gostariamos de estender às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente. É conveniente, mais uma vez, usar a nossa experiência com superfícies regulares do $\mathbb{R}^3$. Nas superfícies do $\mathbb{R}^3$, um vetor tangente em um ponto p da superfície é definido como a "velocidade" em $\mathbb{R}^3$ de uma curva da superfície passando por p. Como não dispomos do suporte de um espaço ambiente, precisamos achar uma propriedade característica do vetor tangente que substitua a noção de velocidade.

As considerações seguintes motivam a definição que daremos a seguir. Seja $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, com $\alpha(0) = p$. Escreva

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \; t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

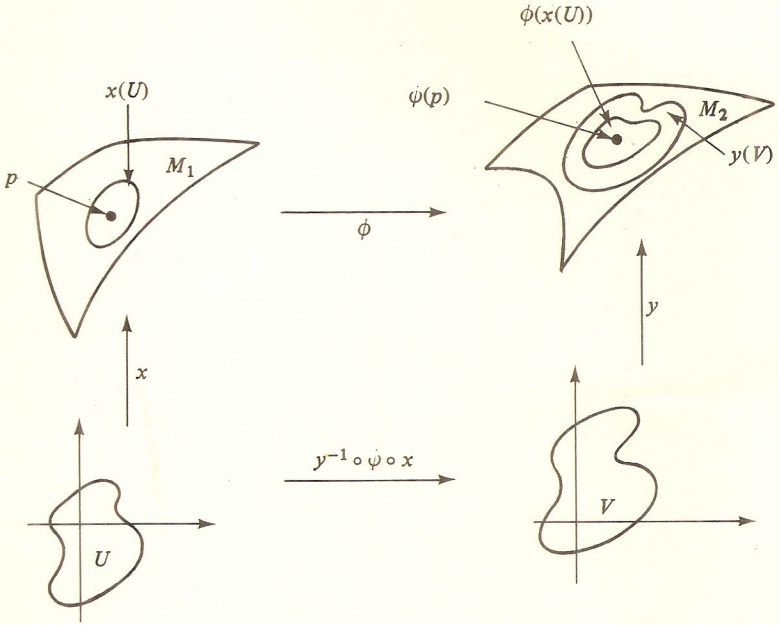


Figura 2

Então $\alpha'(0) = (x'_1(0), \ldots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja agora f uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p. Podemos restringir f à curva α e escrever a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

Portanto a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v. Esta é a propriedade característica que usaremos para definir vetor tangente em variedades.

2.6 DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathscr{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O *vetor tangente à curva* α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0): \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathscr{D}.$$

Um *vetor tangente em p* é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos valores tangentes a M em p será indicado por $T_p(M)$.

Se escolhermos uma parametrização $\mathbf{x}: U \to M^n$ em $p = \mathbf{x}(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ \mathbf{x}(q) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad q = (x_1, \ldots, x_n) \in U,$$

e

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α, obteremos

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \ldots, x_n(t))\bigg|_{t=0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_i x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f.$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização $\mathbf{x}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0. \tag{2}$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada" (Fig. 3):

$$x_1 \to \mathbf{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0).$$

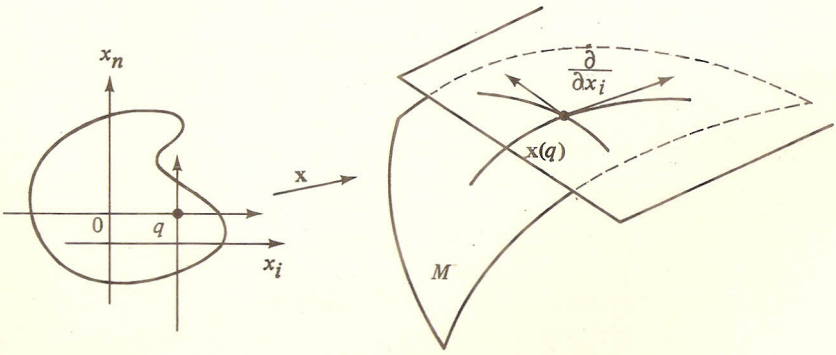


Figura 3

A expressão (2) mostra que o vetor tangente à uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também de (2) que o conjunto $T_p(M)$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x}: U \to M$ determina uma base *associada* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ em $T_p(M)$ (Fig. 3). O espaço vetorial $T_p(M)$ é chamado o *espaço tangente* de M em p.

Com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

2.7 PROPOSIÇÃO. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi: M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p(M_1)$, escolha uma curva diferenciável $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p: T_p(M_1) \to T_{\varphi(p)}(M_2)$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α* (Fig. 4).

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}: U \to M_1$ e $\mathbf{y}: V \to M_2$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Exprimindo φ nestas parametrizações, podemos escrever

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$$
$$q = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \; y_1, \ldots, y_m \in V.$$

Por outro lado, exprimindo α na parametrização $\mathbf{x}$, obteremos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, y_m(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Decorre daí que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ de $T_{\varphi(p)}(M_2)$, associada à parametrização $\mathbf{y}$, é dada por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0)\right). \tag{3}$$

A relação (3) mostra imediatamente que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. Além disto, (3) pode ser escrita:

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x'_j(0)),\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ indica uma matriz $m \times n$ e $(x'_j(0))$ indica uma matriz coluna com n elementos. Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de $T_p(M_1)$ em $T_{\varphi(p)}(M_2)$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

c.q.d.

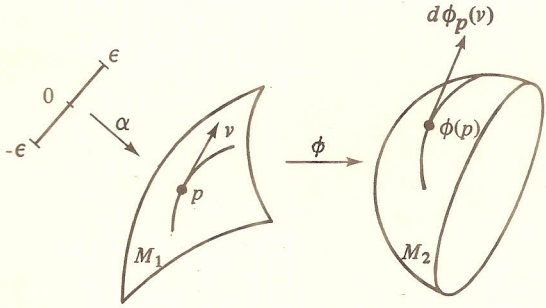


Figura 4

2.8 DEFINIÇÃO. A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Prop. 2.7 é chamada *diferencial* de φ em p.

2.9 DEFINIÇÃO. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi: M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um *difeomorfismo local* em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi: U \to V$ é um difeomorfismo.

A noção de difeomorfismo é a noção natural de equivalência entre variedades diferenciáveis. É uma conseqüência imediata do teorema da função composta que se $\varphi: M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p: T_p(M_1) \to T_{\varphi(p)}(M_2)$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$; em particular as dimensões de M_1 e M_2 são iguais. Uma recíproca local deste fato é o seguinte teorema.

2.10 TEOREMA. *Seja $\varphi: M_1^n \to M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p: T_p(M_1) \to T_{\varphi(p)}(M_2)$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local.*

A demonstração é uma aplicação imediata do Teorema da função inversa no $\mathbb{R}^n$.

3. Imersões e mergulhos; exemplos

3.1 DEFINIÇÃO. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi: M \to N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p: T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i: M \subset N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Observe-se que se $\varphi: M^n \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão φ.

3.2 EXEMPLO. A curva $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$ não é sequer diferenciável (Fig. 5).

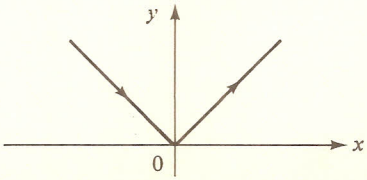


Figura 5

3.3 EXEMPLO. A curva $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ é uma aplicação diferenciável mas não é uma imersão. Com efeito, a condição de imersão neste caso é equivalente a que $\alpha'(t) \neq 0$, o que não ocorre para $t = 0$. (Fig. 6).

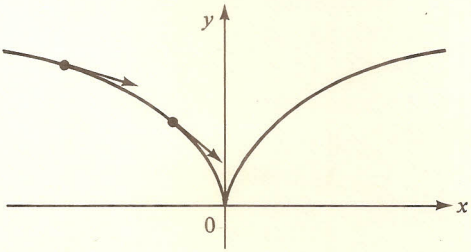


Figura 6

3.4 EXEMPLO. A curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (Fig. 7) é uma imersão $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que possui uma auto-intersecção para $t = 0$. Portanto α não é um mergulho.

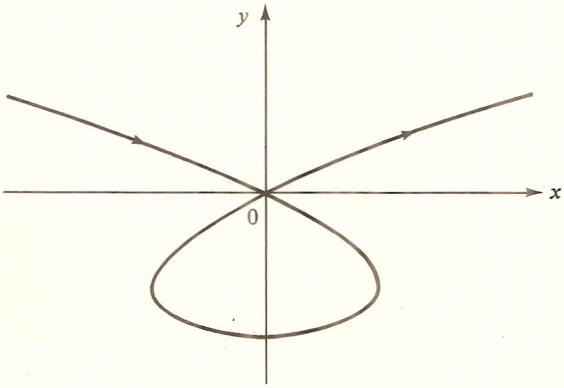


Figura 7

3.5 EXEMPLO. A curva (Fig. 8)

$$\alpha(t) \begin{cases} = (0, -(t+2)), & t \in (-3, -1), \\ = \text{curva regular (V. Fig. 8)}, & t \in \left(-1, -\dfrac{1}{\pi}\right) \\ = \left(-t, -\operatorname{sen}\dfrac{1}{t}\right), & t \in \left(-\dfrac{1}{\pi}, 0\right) \end{cases}$$

é uma imersão $\alpha: (-3, 0) \to \mathbb{R}^2$ sem auto-intersecções. Entretanto, α não é um mergulho. Com efeito, uma vizinhança, na topologia induzida por $\mathbb{R}^2$, de um ponto p na parte vertical da curva (Fig. 8) é constituida por uma infinidade de componentes conexas. Por outro

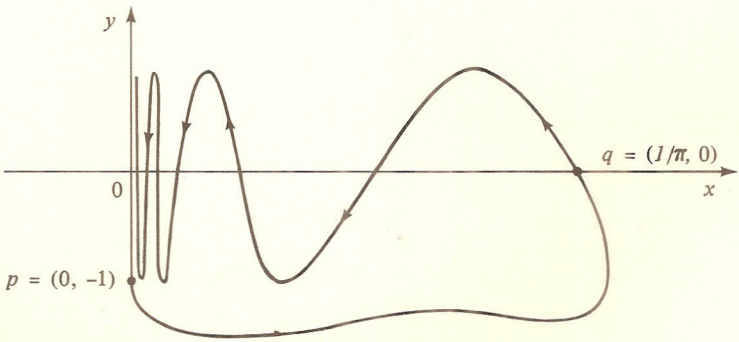


Figura 8

lado, uma vizinhança de um tal ponto na topologia "induzida" por α (que é a topologia da reta) é um intervalo aberto, logo conexo.

3.6 EXEMPLO. É claro que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ possui uma estrutura diferenciável dada por suas parametrizações $\mathbf{x}_\alpha: U_\alpha \to S$. Com tal estrutura, as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis e, em verdade, são mergulhos de U_α em S; isto é uma conseqüência imediata das condições (a) e (b) da definição de superfície regular dada na Introdução. Vamos mostrar que a inclusão $i: S \subset \mathbb{R}^3$ é um mergulho, isto é, S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$.

Com efeito, i é diferenciável, pois para todo $p \in S$ existe uma parametrização $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de S em p e uma parametrização $j: V \subset \mathbb{R}^3 \to V$ de $\mathbb{R}^3$ em $i(p)$ (V é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ e j é a aplicação identidade), tais que $j^{-1} \circ i \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ é diferenciável. Além disto, pela condição (b), i é uma imersão e, pela condição (a), i é um homeomorfismo sobre sua imagem, o que prova o afirmado.

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição que mostra ser toda imersão localmente (em um certo sentido) um mergulho.

3.7 PROPOSIÇÃO. *Seja $\varphi: M_1^n \to M_2^m$, $n \leq m$, uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2. Para todo ponto $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi | V \to M_2$ é um mergulho.*

Demonstração. Este fato é uma conseqüência do Teorema da função inversa. Sejam $\mathbf{x}_1: U_1 \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ e $\mathbf{x}_2: U_2 \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ sistemas de coordenadas em p e $\varphi(p)$, respectivamente, e indiquemos por $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e por $(y_1, \ldots, y_m)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^m$, Nestas coordenadas, a expressão de φ, isto é, a aplicação $\tilde{\varphi} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ pode ser escrita

$$\tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Seja $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$. Como φ é uma imersão, podemos supor, renumerando as coordendas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ se necessário, que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Para aplicar o Teorema da função inversa, introduzamos uma aplicação $\phi = U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$\phi(x_1, , x_n, t_1, \ldots, t_k) =$$
$$= (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n), y_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) + t_1$$
$$, \ldots, y_{n+k}(x_1, \ldots, x_n) + t_k),$$

onde $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$. É imediato verificar que ϕ restrito a U_1 coincide com $\tilde{\varphi}$ e que

$$det(d\phi_q) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da função inversa, existem vizinhanças $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^k$ de q e $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ de $\phi(q)$ tais que a restrição $\phi \mid W_1$ é um difeomorfismo sobre W_2. Seja $\tilde{V} = W_1 \cap U_1$. Como $\phi \mid \tilde{V} = \tilde{\varphi} \mid \tilde{V}$ e $\mathbf{x}_i$ é um difeomorfismo, $i = 1, 2$, concluimos que a restrição a $V = \mathbf{x}_1(\tilde{V})$ da aplicação $\varphi = \mathbf{x}_2 \circ \tilde{\varphi} \circ \mathbf{x}_1^{-1} : V \to \varphi(V) \subset M_2$ é um difeomorfismo, donde um mergulho.

c.q.d.

4. Outros exemplos de variedades. Orientação

4.1 EXEMPLO. (*O fibrado tangente*). Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $T(M) = \{(p, v);$ $p \in M, v \in T_p(M)\}$. Vamos munir o conjunto $T(M)$ de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$); com tal estrutura $T(M)$ será chamado o *fibrado tangente* de M. Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades, como no caso da Mecânica.

Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável maximal de M. Indicaremos por $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α, defina

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to T(M),$$

por

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) = \left(\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right), (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p, v) \in T(M)$ as coordenadas $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas de v na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$.

Vamos mostrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em $T(M)$. Como $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(d\mathbf{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T\mathbf{x}_{\alpha(q)}(M)$, $q \in U_\alpha$, teremos que

$$\bigcup_\alpha \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = T(M),$$

o que verifica a condição 1 da Def. 2.1. Seja agora

$$(p, v) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha, (q_\alpha, v_\alpha) &= \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = \\ &= ((\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta)(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável, $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Def. 2.1 e conclue o exemplo.

4.2 EXEMPLO (*Superfícies regulares do* $\mathbb{R}^n$). A generalização natural da idéia de superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é a noção de superfície de dimensão k em $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$. Um subconjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma *superfície regular de dimensão* k se para cada $p \in M^k$ existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^k \to M \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$ tais que:

a) $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo diferenciável.
b) $(d\mathbf{x})_q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

A menos das dimensões envolvidas, a definição é exatamente a mesma que foi dada para superfícies regulares do $\mathbb{R}^3$ na Introdução.

De maneira análoga a que se faz para superfícies do $\mathbb{R}^3$ (M. do Carmo [6], pg. 71), prova-se que se $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^k \to M^k$ e $\mathbf{y}: V \subset \mathbb{R}^k \to M^k$ *são duas parametrizações com* $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W \neq \emptyset$, *então a aplicação* $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}: \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ *é um difeomorfismo*. Por completação, daremos a seguir um esquema desta demonstração.

Primeiro, observamos que h é um homeomorfismo como composta de homeomorfismos. Seja $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ e faça $q = h(r)$. Sejam $(u_1, \ldots, u_k) \in U$ e $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, e escreva $\mathbf{x}$ nestas coordenadas como

$$\mathbf{x}(u_1, \ldots, u_k) = (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k)).$$

Pela condição (b), podemos supor que

$$\frac{\partial(v_1, \ldots, v_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Estendemos $\mathbf{x}$ a uma aplicação $F: U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} &F(u_1, , u_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) = \\ &= (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_k(u_1, \ldots, u_k), v_{k+1}(u_1, \ldots, u_k) + t_{k+1} \\ &\quad , \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k) + t_n), \end{aligned}$$

onde $(t_{k+1}, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. É claro que F é diferenciável e a restrição de F a $U \times \{(0, \ldots, 0)\}$ coincide com $\mathbf{x}$. Por um cálculo simples, obteremos que

$$det(dF_q) = \frac{\partial(v_1, \ldots, v_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o Teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança Q de $\mathbf{x}(q)$ onde F^{-1} existe e é diferenciável. Por continuidade de $\mathbf{y}$, existe uma vizinhança $R \subset V$ de r tal que $\mathbf{y}(R) \subset Q$. Note que, restrita a R, $h \mid R = F^{-1} \circ \mathbf{y} \mid R$ é uma composição de aplicações diferenciáveis. Logo h é diferenciável em r, donde em $\mathbf{y}^{-1}(W)$. Um argumento semelhante mostraria que h^{-1} é também diferenciável, como queríamos provar.

Do resultado que acabamos de provar, decorre, por um argumento inteiramente análogo ao do Exemplo 3.6 que M^k é uma variedade diferenciável de dimensão k e que a inclusão $i: M^k \subset \mathbb{R}^n$ é um mergulho, isto é, M^k é uma suvariedade de $\mathbb{R}^n$.

4.3 EXEMPLO (*Imagem inversa de um valor regular*). Para o exemplo que se segue, precisamos de algumas definições.

Seja $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável de um aberto U do $\mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in U$ é um *ponto crítico* de F se a diferencial $dF_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva. A imagem $F(p)$ de um ponto crítico é chamada um *valor crítico* de F. Um ponto $p \in \mathbb{R}^m$ que não é um va-

lor crítico é chamado um *valor regular* de F. Note que qualquer ponto $a \notin F(U)$ é trivialmente um valor regular de F e que se existe um valor regular de F em $\mathbb{R}^m$, então $n \geq m$.

Seja agora $a \in F(U)$ um valor regular de F. Vamos mostrar que a *imagem inversa* $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ é *uma superfície regular de dimensão* $n - m = k$. Pelo que foi visto no Exemplo 4.2, $F^{-1}(a)$ é então uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$.

Para provar o afirmado, usaremos mais uma vez o Teorema da função inversa. Seja $p \in F^{-1}(a)$. Indiquemos por $q = (y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_k)$ um ponto de $\mathbb{R}^{n=m+k}$ e por $F(q) = (f_1(q), \ldots, f_m(q))$ a aplicação F. Como a é um valor regular de F, dF_p é sobrejetiva. Podemos, portanto, supor que

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(p) \neq 0.$$

Definamos uma aplicação $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n=m+k}$ por

$$\varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_k) = (f_1(q), \ldots, f_m(q), x_1, \ldots, x_k).$$

Então

$$det(d\varphi)_p = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(p) \neq 0.$$

Pelo Teorema da função inversa, φ é um difeomorfismo de uma vizinhança Q de p sobre uma vizinhança W de $\varphi(p)$. Seja $K^{m+k} \subset W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ um cubo de centro $\varphi(p)$ e faça $V = \varphi^{-1}(K^{m+k}) \cap Q$. Então φ aplica a vizinhança V difeomorficamente sobre $K^{m+k} = K^m \times K^k$. Defina uma aplicação $\mathbf{x}: K^k \to V$ por

$$\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_k) = \varphi^{-1}(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_k),$$

onde $(a_1, \ldots, a_m) = a$. É imediato verificar que $\mathbf{x}$ satisfaz às condições (a) e (b) da definição de superfície regular dado no Exemplo 4.2. Como p é arbitrário, $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular do $\mathbb{R}^n$, como havíamos afirmado.

Antes de passarmos a outros exemplos de variedades diferenciáveis, convém introduzir a importante noção global de orientação.

4.4 DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:

i) para todo par α, β, com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é *não orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma *orientação* de M e M é, então, dita *orientada*. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda satisfaz (i).

Não é difícil verificar que se M é orientável e conexa existem exatamente duas orientações distintas em M.

Sejam agora M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $\varphi: M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. É imediato verificar que M_1 é orientável se e só se M_2 é orientável. Se, além disto, M_1 e M_2 são conexas e estão orientadas, φ induz uma orientação em M_2 que pode ou não coincidir com a orientação inicial de M_2. No primeiro caso, diz-se que φ *preserva a orientação* e no segundo, que φ *reverte a orientação*.

4.5 EXEMPLO. *Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que a intersecção $V_1 \cap V_2$ é conexa, então M é orientável.* Pois, como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é $\neq 0$, ele não muda de sinal em $V_1 \cap V_2$; se é negativo em um ponto, basta trocar o sinal de uma das coordenadas para que ele passe a positivo neste ponto, donde em $V_1 \cap V_2$.

4.6 EXEMPLO. O simples critério do exemplo anterior pode ser usado para mostrar que a esfera

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável. Com efeito, seja $N = (0, \ldots, 0, 1)$ o polo norte e $S = (0, \ldots, 0, -1)$ o polo sul de S^n. Defina uma aplicação $\pi_1: S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ (*projeção estereográfica a partir do polo norte*) que leva $p = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $S^n - \{N\}$ na intersecção do hiperplano $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N. É imediato verificar que (Fig. 9)

$$\pi_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

A aplicação π_1 é diferenciável, injetiva e aplica $S^n - \{N\}$ sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. A projeção estereográfica $\pi_2: S^n - \{S\} \to \mathbb{R}^n$ a partir do polo sul sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$ possui as mesmas

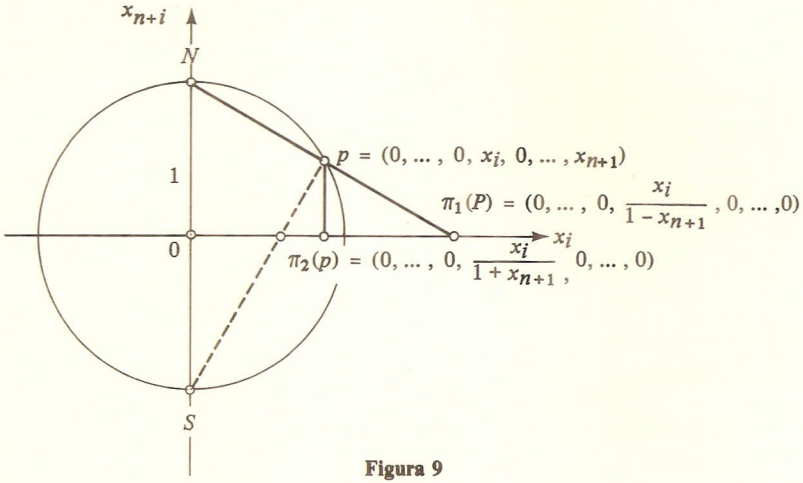


Figura 9

propriedades. Portanto, as parametrizações $(\mathbb{R}^2, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^2, \pi_2^{-1})$ cobrem S^n. Além disto, a mudança de coordenadas:

$$y_j = \frac{x_j}{1 - x_{n+1}} \leftrightarrow y'_j = \frac{x_j}{1 + x_{n+1}}, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, n,$$

é dada por

$$y'_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

(aqui usamos o fato que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1$). Portanto, a família $\{(\mathbb{R}^2, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^2, \pi_2^{-1})\}$ é uma estrutura diferenciável em S^n. Observe que a interseção $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^2) = S^n - \{N \cup S\}$ é conexa, logo S^n é orientável e a família dada determina uma orientação de S^n.

Seja agora $A: S^n \to S^n$ a aplicação antípoda dada por $A(p) = -p, p \in \mathbb{R}^{n+1}$. A é diferenciável e $A^2 = \text{ident}$. Portanto A é um difeomorfismo de S^n. Observe que quando n é par, A reverte a orientação de S^n e quando n é ímpar, A preserva a orientação de S^n.

Estamos agora em condições de apresentar outros exemplos de variedades diferenciáveis.

4.7 EXEMPLO (*outra apresentação do espaço projetivo*). O conjunto $P^n(\mathbb{R})$ *das* retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem pode ser pensado como o espaço quociente da esfera unitária $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; |p| = 1\}$ pela re-

lação de equivalência que identifica $p \in S^n$ com o seu ponto antípoda $A(p) = -p$. Com efeito, cada reta que passa pela origem determina na esfera dois pontos antípodas e a correspondência assim obtida é evidentemente biunívoca e sobrejetiva.

Levando em conta este fato, vamos introduzir uma outra estrutura diferenciável em $P^n(\mathbb{R})$ (Cf. Exemplo 2.4). Para isto, introduziremos inicialmente em $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma estrutura de superfície regular, definindo parametrizações

$$\mathbf{x}_i^+ : U_i \to S^n, \quad \mathbf{x}_i^- : U_i \to S^n, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

obtidas do seguinte modo:

$$U_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i = 0, x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_{n+1}^2 < 1\},$$
$$\mathbf{x}_i^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$
$$\mathbf{x}_i^-(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

onde $D_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_{n+1}^2)}$. É imediato verificar que as condições (*a*) e (*b*) da definição do Exemplo 4.2 são satisfeitas. Portanto, a família

$$\{(U_i, \mathbf{x}_i^+), (U_i, x_i^-)\}, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

é uma estrutura diferenciável em S^n. Geometricamente, isto equivale a cobrir a esfera S^n com vizinhanças coordenadas que são semiesferas perpendiculares aos vários eixos x_i e tomar como coordenadas em, por exemplo, $\mathbf{x}_i^+(U_i)$, as coordenadas da projeção ortogonal de $\mathbf{x}_i^+(U_i)$ sobre o hiperplano $x_i = 0$ (Fig. 10).

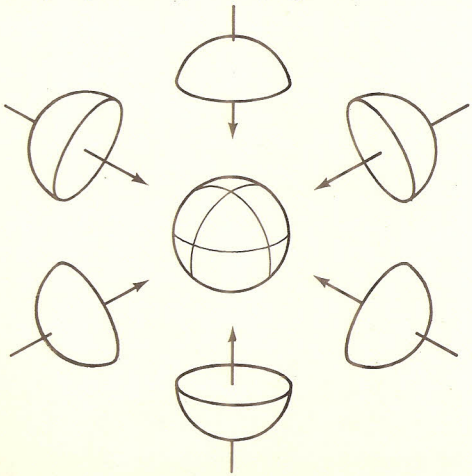


Figura 10

Seja $\pi: S^n \to P^n(\mathbb{R})$ a projeção canônica, isto é, $\pi(p) = \{p, -p\}$; observe que $\pi(\mathbf{x}_i^+(U_i)) = \pi(\mathbf{x}_i^{-1}(U_i))$. Vamos definir uma aplicação $y_i: U_i \to P^n(\mathbb{R})$ por

$$\mathbf{y}_i = \pi \circ \mathbf{x}_i^+ = \pi \circ \mathbf{x}_i^-$$

Como π restrito a $\mathbf{x}_i^+(U_i)$ é biunívoca, temos que

$$\mathbf{y}_i^{-1} \circ \mathbf{y}_j = (\pi \circ \mathbf{x}_i^+)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_j^+) = (\mathbf{x}_i^+)^{-1} \circ \mathbf{x}_j^+,$$

donde a diferenciabilidade de $\mathbf{y}_i^{-1} \circ \mathbf{y}_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$. Decorre daí que a família $\{(U_i, \mathbf{y}_i)\}$ é uma estrutura diferenciável de $P^n(\mathbb{R})$.

Em verdade, esta estrutura diferenciável e a do Exemplo 2.4 dão origem a uma mesma estrutura maximal. Com efeito, as vizinhanças coordenadas são as mesmas e a mudança de coordenadas é dada por

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

que, como $x_i \neq 0$ e $D_i \neq 0$, é diferenciável.

Como veremos no Exercício 9, $P^n(\mathbb{R})$ é orientável se e só se n é ímpar.

4.8 EXEMPLO (*ação descontínua de um grupo*). Uma maneira de construir variedades diferenciáveis, que generaliza o processo acima, é dada pelas seguintes considerações.

Diz-se que um grupo G *age em uma variedade diferenciável* M se existe uma aplicação $\varphi: G \times M \to M$ tal que:

i) Para cada $g \in G$, a aplicação $\varphi_g: M \to M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$, é um difeomorfismo.

ii) Se $g_1, g_2 \in G$, $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

É frequente, quando estamos tratando de uma única ação, indicar $\varphi(g, p) = gp$; com isto, a condição (ii) se escreve como uma espécie de associatividade: $(g_1 g_2)p = g_1(g_2 p)$.

Diz-se que uma ação de G em M é *livre* se a identidade $e \in G$ é o único elemento que satisfaz $ep = p$, para todo $p \in M$.

Diz-se que uma ação é *descontínua* se todo $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $U \cap g(U) = \varnothing$ para todo $g \neq e$.

Quando G age sobre M, a ação determina uma relação de equivalência $\sim$ em M, onde $p_1 \sim p_2$ se e só se $p_2 = gp_1$. Indicaremos

o espaço quociente de M por esta relação de equivalência por M/G. A aplicação $\pi: M \to M/G$, dada por

$$\pi(p) = \text{classe de eq. de } p = Gp,$$

será chamada a *projeção* de M em M/G.

Seja agora M uma variedade diferenciável e seja $G \times M \to M$ uma ação livre e descontínua de um grupo G em M. Vamos mostrar que M/G possui uma estrutura diferenciável de modo que a projeção $\pi: M \to M/G$ é um difeomorfismo local.

Para cada $p \in M$ escolha uma parametrização $\mathbf{x}: V \to M$ em p de modo que $\mathbf{x}(V) \subset U$, onde $U \subset M$ é uma vizinhança de p tal que $U \cap g(U) = \emptyset$, $g \neq e$. É claro que $\pi \mid U$ é injetiva, donde $\mathbf{y} = \pi \circ \mathbf{x}: V \to M/G$ é também injetiva. A família $\{(V, \mathbf{y})\}$ evidentemente cobre M/G; para que tal família seja uma estrutura diferenciável, basta mostrar que dadas duas aplicações $\mathbf{y}_1 = \pi \circ \mathbf{x}_1: V_1 \to M/G$ e $\mathbf{y}_2 = \pi \circ \mathbf{x}_2: V_2 \to M/G$ com $\mathbf{y}_1(V_1) \cap \mathbf{y}_2(V_2) \neq \emptyset$, então $\mathbf{y}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_2$ é diferenciável.

Para isto, seja π_i a restrição de π a $x_i(V_i)$, $i = 1, 2$. Seja $q \in \mathbf{y}_1(V_1) \cap \mathbf{y}_2(V_2)$ e seja $r = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q)$. Seja ainda $W \subset V_2$ uma vizinhança de r tal que $(\pi_2 \circ \mathbf{x}_2)(W) \subset \mathbf{y}_1(V_1) \cap \mathbf{y}_2(V_2)$ (Fig. 11). Então, restrita a W,

$$\mathbf{y}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_2 \mid W = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ \mathbf{x}_2.$$

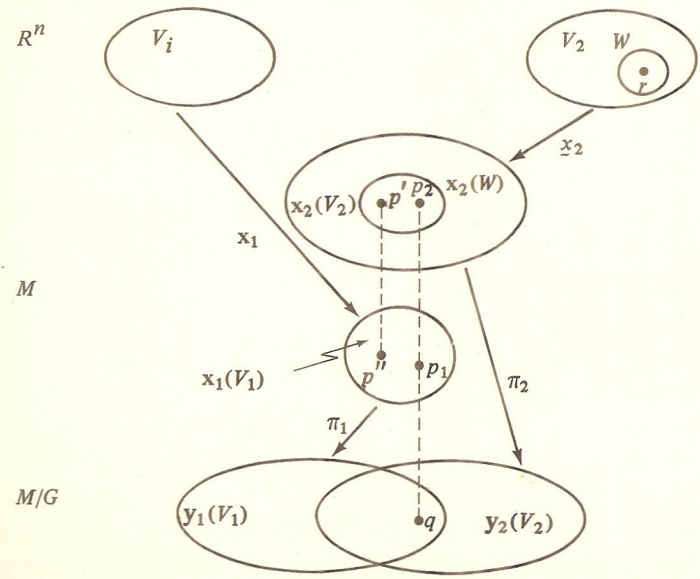


Figura 11

Basta, portanto, mostrar que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ é diferenciável em $p_2 = \pi_2^{-1}(q)$. Seja $p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$. Então p_1 e p_2 são equivalentes em M, donde existe $g \in G$ tal que $gp_2 = p_1$. Seja agora $p' \in \mathbf{x}_2(W)$. Então $\pi_1^{-1} \circ \pi_2(p') = p''$, onde p'' é o único ponto de $\mathbf{x}_1(V_1)$ tal que $\pi(p'') = \pi(p')$. Por outro lado, $gp' \in \mathbf{x}_1(V_1)$ e $\pi(gp') = \pi(p')$. Logo $gp' = p'' = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p')$, isto é, a restrição de $\pi_1^{-1} \circ \pi_2 \mid \mathbf{x}_2(W)$ coincide com o difeomorfismo $\varphi_g \mid \mathbf{x}_2(W)$, o que prova o pedido.

Pela própria maneira como foi construida, esta estrutura diferenciável é tal que $\pi: M \to M/G$ é um difeomorfismo local. Um critério de orientabilidade de M/G é dado no Exercício 9. Observe que a situação do Exemplo anterior se reduz à presente, se tomarmos $M = S^n$ e G o grupo de difeomorfismos do S^n constituido pela aplicação antípoda A e a identidade $I = A^2$ de S^n.

4.9 EXEMPLO (casos particulares do Exemplo 4.8).

4.9 (a). Considere o grupo G das translações do $\mathbb{R}^k$ onde a ação de G em $\mathbb{R}^k$ é dada por

$$G(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 + n_1, \ldots, x_k + n_k), n_1, \ldots, n_k \in Z, (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

É imediato verificar que a aplicação acima define uma ação livre e descontínua de G em $\mathbb{R}^k$. O espaço quociente $\mathbb{R}^k/G$, com a estrutura diferenciável descrita no Exemplo 4.8, é chamado o *k-toro* T^k. Quando $k = 2$, o 2-toro T^2 é difeomorfo ao toro de revolução de $\mathbb{R}^3$ obtido como imagem inversa do zero da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 - r^2.$$

(Cf. M. do Carmo [6], pg. 62).

4.9 (b). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$, simétrica em relação a origem $0 \in \mathbb{R}^3$, isto é, se $p \in S$ então $-p = A(p) \in S$. O grupo de difeomorfismos de S constituido por $\{A, \text{Id.}\}$ age em S de maneira livre e descontínua. Introduzamos em S/G a estrutura diferenciável dada pelo Exemplo 4.8. Quando S é o toro de revolução T^2, $S/G = K$ é chamada a *garrafa de Klein* (Fig. 12); quando S é a faixa do cilindro circular reto dada por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$, S/G é chamada a *faixa de Möbius*. Como vereremos no Exercício 9, a garrafa de Klein e a faixa de Möbius são não-orientáveis. No Exercício 6, indicaremos como a garrafa de Klein pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^4$.

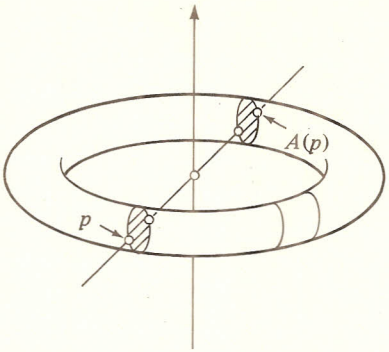


Figura 12

5. Campos de vetores; colchetes. Topologia das variedades

5.1 DEFINIÇÃO. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p(M)$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM (V. Exemplo 4.1). O campo é *diferenciável* se a aplicação $X: M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{4}$$

onde cada $a_i: U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a $\mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, n$. É claro que X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, todas) parametrização.

As vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida por (4) e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X: \mathscr{D} \to \mathscr{F}$ do conjunto $\mathscr{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathscr{F}$ das funções em M, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in \mathscr{D} \tag{5}$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrização $\mathbf{x}$. Em verdade, esta idéia de vetor como derivada dire-

cional foi precisamente a maneira como definimos a noção de vetor tangente. Como é imediato verificar, a função Xf obtida em (5) não depende da escolha da parametrização $\mathbf{x}$. Neste contexto, é imediato verificar que X é diferenciável se e só se $X: \mathscr{D} \to \mathscr{D}$, isto é, $Xf \in \mathscr{D}$ para todo $f \in \mathscr{D}$.

Esta última interpretação de X com um operador em $\mathscr{D}$ permite-nos considerar os iterados de X. Por exemplo se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f: M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, podemos afirmar o seguinte.

5.2 LEMA. *Sejam X e Y são campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathscr{D}$, $Zf = (XY\text{-}YX)f$.*

Demonstração. Primeiro provaremos que se Z existe, ele é único. Admitamos, portanto, a existência de um tal Z. Seja $p \in M$ e $\mathbf{x}: U \to M$ uma parametrização em p, e sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de X e Y nesta parametrização. Então para todo $f \in \mathscr{D}$,

$$XYf = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto, Z é dado, na parametrização $\mathbf{x}$, por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{ij} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

o que mostra a unicidade de Z.

Para a demonstração da existência, defina-se Z_α em cada vizinhança coordenada $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ de M pela expressão anterior. Por unicidade, $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = \varnothing$, o que permite definir Z em toda a variedade M.

c. q. d.

O campo vetorial Z dado pelo Lema 5.2 é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY\text{-}YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

A operação colchete possui as seguintes propriedades.

5.3 PROPOSIÇÃO. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*),
b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*),
c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*),
d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. (*a*) e (*b*) são imediatos. Para demonstrar (*c*), basta observar que, por um lado,

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

e, por outro lado,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY.$$

Como os segundos membros das expressões acima são iguais, concluimos (*c*) usando (*a*).

Finalmente, para demonstrar (*d*), calculamos

$$[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c.q.d.

Até agora não fizemos restrição alguma quanto a topologia das variedades diferenciais. Em verdade, a topologia natural de uma variedade pode ser bastante estranha. Em particular, pode acontecer que um (ou ambos) dos seguintes axiomas não seja satisfeito:

A) *Axioma de Hausdorff*: Dados dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

B) *Axioma da base enumerável*: M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que M *tem base enumerável*).

O Axioma A é essencial à unicidade do limite de uma sucessão convergente e o Axioma B é essencial à existência de uma partição

diferenciável da unidade, instrumento quase indispensável ao estudo de certas questões globais sobre variedades (em ambos, se M é conexa, os Axiomas A e B são equivalentes à existência de partição da da unidade; V. Teor. 5.4 adiante).

Por exemplo, uma questão natural na teoria das variedades diferenciáveis é saber se uma dada variedade pode ser imersa ou mergulhada em algum espaço euclidiano. Um resultado fundamental nesta direção é o famoso teorema de Whitney que afirma o seguinte: *Toda variedade diferenciável (de Hausdorff e com base enumerável!) de dimensão n pode ser imersa em* $\mathbb{R}^{2n}$ *e mergulhada em* $\mathbb{R}^{2n+1}$, (em verdade, o teorema pode ser refinado para $\mathbb{R}^{2n-1}$ e $\mathbb{R}^{2n}$, respectivamente). Uma demonstração deste teorema escapa à finalidade esta introdução e pode ser encontrada em E. L. Lima [29].

A título de informação, mencionaremos sem demonstração um teorema de existência de partição da unidade. Necessitaremos de algumas definições.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \varnothing$ apenas para um número finito de índices. O *suporte* de uma função $f: M \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero.

Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha: M \to \mathbb{R}$ é uma *partição diferenciável da unidade* se:

1) Para todo α, $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)\}$ de M.
2) A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.
3) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$ (esta condição faz sentido, pois em cada p, $f_\alpha(p) \neq 0$ para apenas um número finito de índices).

Costuma-se dizer que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está *subordinada à cobertura* $\{V_\alpha\}$.

5.4 TEOREMA. *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se e só se toda componente conexa de M é de Hausdorff e tem base enumerável.*

Para uma demonstração V. F. Brickell and R. S. Clark, Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Co., London 1970, Chap. 3.

5.5 OBSERVAÇÃO. Lembremos que dados $p \in \mathbb{R}^n$ e uma bola aberta $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$ centrada em p e de raio r, existe uma vizinhança U de p com $\bar{U} \subset B_r(p)$ e uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $f(q) \leq 1$ para todo $q \in \mathbb{R}^n$ e

$$f(q) = 1, \text{ se } q \in \bar{U},$$
$$f(q) = 0, \text{ se } q \notin B_r(p).$$

Com efeito, se tomarmos, por simplicidade, $r = 3$, podemos escolher $U = B_2(p)$ e definir f como $f(p) = \beta(-|p|)$, $p \in \mathbb{R}^n$, onde $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\beta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)ds}{\int_{-2}^{-1} \alpha(s)ds},$$

e $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função diferenciável que é igual a $exp\left(\frac{1}{(t+1)(t+2)}\right)$ em $[-2, -1]$ e zero fora deste intervalo. É imediato verificar que f satisfaz às condições requeridas.

Evidentemente, o mesmo se passa em vizinhanças contidas em vizinhanças coordenadas de uma variedade diferenciável M. Em outras palavras, se $p \in M$ e $V \subset M$ é uma vizinhança de p contida em uma vizinhança coordenada de p e homeomorfa a uma bola, então existe uma vizinhança U de p com $\bar{U} \subset V$ e uma função diferenciável $f: M \to \mathbb{R}$ com $f(q) \leq 1$ se $q \in M$, $f(q) = 1$ se $q \in \bar{U}$, e $f(q) = 0$ se $q \notin \bar{V}$. Este fato permite mostrar que certas entidades definidas globalmente em M são, em verdade, locais, isto é, seu comportamento em p só depende do comportamento de M em uma vizinhança de p (Cf. a definição de conexão afim no Cap. 2).

EXERCÍCIOS

1. (*Variedade produto*). Sejam M e N variedades diferenciáveis e sejam $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \mathbf{y}_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e as aplicações $\mathbf{z}_{\alpha\beta}(p, q) = (\mathbf{x}_\alpha(p), \mathbf{y}_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$.
   (a) Mostre que $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$, na qual as projeções $\pi_1: M \times N \to M$ e $\pi_2: M \times N \to N$

são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável $M \times N$ é chamado a *variedade produto* de M por N.

(b) Mostre que a variedade produto $S^1 \times \ldots \times S^1$ de n círculos S^1, onde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ tem a estrutura diferenciável usual, é difeomorfa ao n-toro T^n do Exemplo 4.9 (a).

2. Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não o seja).

3. (a) Prove que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade orientável se e só se existe uma aplicação diferenciável $N: S \to \mathbb{R}^3$ com $N(p) \perp T_p(S)$ e $|N(p)| = 1$, para todo $p \in S$.

(b) Mostre que a faixa de Möbius (Exemplo 4.9 (*b*)) é não-orientável.

4. Mostre que o plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$ é não-orientável.

Sugestão: Prove que se a variedade M é orientável, todo aberto de M é uma variedade orientável. Observe que $P^2(\mathbb{R})$ contém um aberto difeomorfo a uma faixa de Möbius, que é não-orientável.

5. (*Mergulho de* $P^2(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^4$). Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \quad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Observe que a restrição $\varphi = F \mid S^2$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi}: P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \quad [p] = \text{classe de eq. de } p = \{p, -p\}.$$

Prove que:

a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $P^2(\mathbb{R})$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

6. (*Mergulho da garrafa de Klein em* $\mathbb{R}^4$). Mostre que a aplicação $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$G(x, y) =$$

$$= \left((r \cos y + a) \cos x, (r \cos y + a) \operatorname{sen} x, r \operatorname{sen} y \cos \frac{x}{2}, r \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right),$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

induz um mergulho da garrafa de Klein (Exemplo 4.9 (b)) em $\mathbb{R}^4$.

7. (*Faixa de Möbius infinita*). Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ um cilindro circular reto, e seja $A: C \to C$ a simetria em relação a $0 \in \mathbb{R}^3$, isto é, $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Seja M o espaço quociente de C pela relação de equivalência $p \sim A(p)$, e seja $\pi: C \to M$ a projeção $\pi(p) = \{p, A(p)\}$.
   (a) Mostre que é possível munir M de uma estrutura diferenciável tal que π é um difeomorfismo local.
   (b) Prove que M é não-orientável.

8. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Seja $\varphi: M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável que é localmente um difeomorfismo. Prove que se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

9. Seja $G \times M \to M$ uma ação livre e descontínua de um grupo G em uma variedade diferenciável M.
   (a) Prove que a variedade M/G (Exemplo 4.8) é orientável se e só se existe uma orientação de M que é preservada por todos os difeomorfismos de G.
   (b) Use (*a*) para mostrar que o plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$, a garrafa de Kelin e a faixa de Möbius são não-orientáveis.
   (c) Prove que $P^n(\mathbb{R})$ é orientável se e só se n é ímpar.

10. Mostre que a topologia da variedade diferenciável M/G do Exemplo 4.8 é de Hausdorff se e só se a seguinte condição é verificada: dados dois pontos não equivalentes $p_1, p_2 \in M$, existem vizinhanças U_1, U_2 de p_1 e p_2, respectivamente, tais que $U_1 \cap gU_2 = \varnothing$ para todo $g \in G$.

11. Consideremos na reta real $\mathbb{R}$ as duas estruturas diferenciáveis seguintes: 1) $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_1)$, onde $\mathbf{x}_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\mathbf{x}_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_2)$, onde $\mathbf{x}_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\mathbf{x}_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:
   (a) a aplicação identidade $i: (\mathbb{R}, \mathbf{x}_1) \to (\mathbb{R}, \mathbf{x}_2)$ não é um difeomorfirmo; portanto, as estruturas maximais determinadas por $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_2)$ são distintas.
   (b) a aplicação $f: (\mathbb{R}, \mathbf{x}_1) \to (\mathbb{R}, \mathbf{x}_2)$ dada por $f(x) = x^3$ é um difeomorfismo; isto é, embora as estruturas diferenciáveis $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathbf{x}_2)$ sejam distintas, elas determinam variedades diferenciáveis difeomorfas.

12. (*O recobrimento duplo orientável*). Seja M^n uma variedade diferenciável não-orientável. Para cada $p \in M$, considere o conjunto B das bases de $T_p(M)$ e defina que duas tais bases são equivalentes se elas estão relacionadas por uma matriz de determinante posi-

tivo. Isto é uma relação de equivalência e divide B em dois conjuntos disjuntos. Seja $\mathcal{O}_p$ o espaço quociente de B por esta relação de equivalência. $\mathcal{O}_p$ possui dois elementos e cada elemento $O_p \in \mathcal{O}_p$ será chamado uma *orientação* de $T_p(S)$.

Seja $\bar{M}$ o conjunto

$$\bar{M} = \{(p, O_p); p \in M, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável maximal em M, e defina $\bar{\mathbf{x}}_\alpha: U_\alpha \to \bar{M}$ por

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) = \left(\mathbf{x}_\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha), \left[\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right]\right),$$

onde $(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) \in U_\alpha$ e $\left[\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right]$ indica o elemento de $\mathcal{O}_p$ determinando pela base $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right\}$.

Prove que:

(a) $\{(U_\alpha, \bar{\mathbf{x}}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em $\bar{M}$ e que a variedade $\bar{M}$ assim obtida é orientável.

(b) A aplicação $\pi: \bar{M} \to M$ dada por $\pi(p, O_p) = p$ é diferenciável e sobrejetiva. Além disto, cada $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são abertos disjuntos de $\bar{M}$ e π restrita a cada V_i, $i = 1, 2$, é um difeomorfismo sobre U. Por esta razão, $\bar{M}$ é chamado o *recobrimento duplo orientável de M*.

(c) A esfera S^2 é o recobrimento duplo orientável de $P^2(\mathbb{R})$ e o toro T^2 é o recobrimento duplo orientável da garrafa de Klein K.

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSE, W. Parallel translation of Riemannian curvature, Ann. of Math. 64 (1956), 337-363.

[2] AMBROSE, W. The index theorem in Riemannian geometry, Ann. of Math. 73 (1961), 49-86.

[3] BERGER, M. Les variétés Riemannienes (1/4)-pincées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14 (1960), 161-170.

[4] BONNET, O. Sur quelques propriétés des lignes geodesiques, C.R. Ac. Sc. Paris 257 (1864), 1988-1991.

[5] BYERS, W. On a theorem of Preissmann, Proc. Am. Math. Soc. 24 (1970), 50-51.

[6] CARMO, M. do Differentiable Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[7] CARMO, M. do O Método do Referencial Móvel, 3.ª Escola Latino-Americano de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[8] CARMO, M. do Formas Diferenciais e Aplicações, 8.º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971.

[9] CARTAN, E. Leçons Sur la Geométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[10] CHEEGER, J. e EBIN, D. Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[11] CHERN, S. S. Differentiable manifolds, mimeographed notes, University of Chicago. Reproduzida nos Textos de Matemática do Recife, 4, 1959.

[12] CHERN, S. S. Minimal Submanifolds of a Riemannian Manifold, Department of Math., U. of Kansas, Lawrence, Kansas, 1968.

[13] CHRISTOFFEL, E. B. Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 46-70.

[14] DELGADO, J. A. Rigidez de Hipersuperfícies, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[15] GAUSS, K. F. General Investigations of Curved Surfaces, Raven Press, New York, 1965.

[16] GREEN, L. W. Auf Wiederschenflächen, Ann. of Math. 78 (1963), 289-299.

[17] GREENBERG, M. Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1967.

[18] HOPF, H. e RINOW, W. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen, Comm. Math. Helv. 3 (1931), 209-225.

[19] KLINGENBERG, W. Contributions to Riemannian Geometry in the large, Ann. of Math. 69 (1959), 654-666.

[20] KLINGENBERG, W. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comm. Math. Helv. 35 (1961), 47-54.

[21] KLINGENBERG, W. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränter Krümmung, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962), 49-59.

[22] KLINGENBERG, W., GROMOLL, D., MEYER, W. Riemannche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics, n.º 55, Springer, 1968.

[23] KLINGENBERG, W. Lectures on Closed Geodescis, Springer Verlag, Yellow series n.º 230, 1978.

[24] KULKARNI, R. Curvature and metric, Ann. of Math. 91 (1970), 211-213.

[25] KULKARNI, R. Curvature structure and conformal transformations, J. Diff. Geom. 4 (1970), 425-451.

[26] LAWSON, B. Lectures on Minimal Submanifolds, vol. 1, Monografias de Matemática, 14, IMPA, 1973.

[27] LEVI-CIVITA, T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. Rend. Circ. Mat. Palermo, 42 (1917), 173-205.

[28] LIMA, E. Introdução à Topologia Diferencial, Notas de Matemática, 23, IMPA, Rio de Janeiro, 1961.

[29] LIMA, E. Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática do IMPA, 15, 1973.

[30] MASSEY, S. Introduction to Algebraic Topology, Harcourt, 1967.

[31] MERCURI, F., e RIGAS, A. Curvatura e Topologia, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[32] MEEKS III, W. H. Lectures on Plateau's Problem, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[33] MILNOR, J. A note on curvature and fundamental group, J. Diff. Geom. 2 (1968), 1-7.

[34] MILNOR, J. Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, 51, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1963.

[35] MOORE, J. D. An application of second variation to submanifold theory, Duke Math. Journal 42 (1975), 191-193.

[36] MYERS, S. B. Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Math. J. 8 (1941), 401-404.

[37] OSSERMAN, R. A Survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969.

[38] PREISSMAN, A. Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comm. Math. Helv. 15 (1943), 175-216.

[39] RAUCH, H. E. A contribution to differential geometry in the large, Ann. of Math. 54 (1951), 38-55.

[40] RAUCH, H. E. Geodesics and Curvature in Differential Geometry in the Large, Yeshiva University, N. Y., 1959.

[41] RIBEIRO FILHO, HENRIQUE BROWNE Imersões Isométricas, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[42] RIEMANN, B. Sur les hypotheses qui servent de fondement a la géométrie, Oeuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Langel, Librairie Albert Blanchard, Paris, 1968, 280-299.

[43] RODRÍGUEZ, L. Geometria das Subvariedades, Monografias de Matemática, 26, Rio de Janeiro, 1976.

[44] SMALE, S. On the Morse index theorem, J. Math. Mech. 14 (1965), 1049-1056.

[45] SYNGE, J. L. On the connectivity of spaces of positive curvature, J. Math. (Oxford Series) 7 (1936), 316-320.

[46] TSUKAMOTO, Y. On Riemannian manifolds with positive curvature, Memoirs of Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math. 15 (1962), 90-96.

[47] WEINSTEIN, A. A fixed point theorem for positively curved manifolds, J. Math. Mech. 18 (1968), 149-153.

[48] YAU, S. T. Curvature preserving diffeomorphisms, Ann. of Math. 100 (1974), 121-130.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Aplicação
  conforme, 135
  diferencial de uma, 9
  diferenciável, 5
  exponencial, 56
  normal de Gauss, 111
Axioma
  da base enumerável, 25
  de Hausdorff, 25
  de mobilidade livre, 143

Bola normal, 61

Campo
  de Jacobi, 93
  de Killing, 72, 117
  de vetores, 23, 44, 71
  invariante à esquerda, 35, 71
  paralelo, 44
  variacional, 148
  vetorial ao longo de uma curva, 37
Conexão
  afim, 45, 46
  compatível com a métrica, 45
  de Levi-Civita, 47
  normal, 118
  simétrica, 46
Conjunto focal, 186, 193
Coordenadas polares, 105
Curvatura
  constante, 132
  de Gauss-Kronecker, 111
  de Ricci, 85
  de S^n, 113
  escalar, 85
  média, 111
  seccional, 83
Cut locus, 219

Difeomorfismo, 9
Distância, 122
Divergência, 73

Esfera geodésica, 61
Elemento de volume, 74
Energia, 149
Espaço
  de curvatura constante, 132
  hiperbólico, 135
  hiperbólico, modelo de, 145
  projetivo, 3, 18, 163
  simétrico, 104
  tangente, 8
Estrutura diferenciável, 3
Equação
  de Codazzi, 119
  de Jacobi, 93
  de Ricci, 119

Faixa de Möbius, 29
Fibrado tangente, 13
Fluxo geodésico, 54
Forma do índice, 197
Formas espaciais, 139
Fórmula
  da primeira variação, 146
  da segunda variação, 154
Fortemente convexo, 65

Garrafa de Klein, 28
Geodésica, 52
  de superfícies de revolução, 68
  fechada, 209
  minimizante, 58
Geometria
  elíptica, 144
  hiperbólica, 144
Gradiente, 73
Grupos de Lie, 35

Homogênea, 130

Imèrsão, 10
  isométrica, 35, 176
  mínima, 115
  totalmente geodésica, 113

Índice de uma forma, 197

Isometria, 34
  infinitesimal, 72
  local, 34

Laplaciano, 73
Lema
  de Gauss, 59
  de Klingenberg, 190
  do índice, 168, 189
Lugar
  dos pontos conjugados, 100

Mergulho, 10
Métrica, 135
  de Lorentz, 50
  não-euclidiana de Lobachewski, 49, 234
  pseudo-Riemannianas, 50
  Riemanniana, 34
Multiplicidade de um ponto conjugado, 98, 100

Nulidade de uma forma, 198

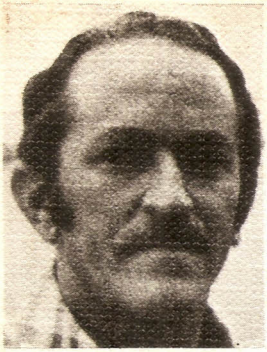
Parametrização, 3
Plano
de Lobatchewski, 64
projetivo, 28
Ponto
conjugado, 98, 100, 195
crítico, 15
focal, 184
mínimo, 219
Primeira forma fundamental, 31
Produto interior, 74

Raio geodésico, 129
Referencial geodésico, 73
Relação de Clairaut, 69

Segunda forma fundamental, 110
Símbolos de Christoffel, 47
Subconjunto contrátil, 71
Subgrupo a um parâmetro, 71
Subvariedade, 10

Tensor de Ricci, 86
Teorema
da esfera, 227
de Bonnet-Myers, 157, 163
de Cartan, 132
de E. Hopf, 75
de Hadamard, 127
de Hopf e Rinow, 120
de Liouville, 76
de Preissman, 213
de Rauch, 167, 189, 194
de Sturm, 193
de Synge, 162
de Synge-Weinstein, 157
do índice, 197
Triângulo geodésico, 212

Valor crítico, 15
Valor regular, 16
Variação, 147
Variedade
completa, 121
diferenciável, 2
estendível, 121
imersa, 35
livre de pontos focais, 188
produto, 27
Riemaniana, 34
não estendível, 121
orientável, 16
Vetor tangente, 6
Vizinhanças
convexas, 65
coordenada, 3
normal, 61
totalmente normal, 63



manfredo perdigão do carmo

Nasceu em Maceió, onde foi aluno do Professor Benedito de Morais. Formou-se em Engenharia no Recife e chegou a tentar construir estradas em Alagoas. Foi professor de Matemática no ITA (S. José dos Campos) e na Universidade Federal de Pernambuco, de onde saiu para um estágio no IMPA, seguido de estudos na Universidade da Califórnia (Berkeley), onde obteve o grau de Doutor, sob a orientação de S.S. Chern.

Foi professor visitante em várias universidades brasileiras e estrangeiras. É Pesquisador do IMPA. Foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática. Seu campo de trabalho é a Geometria Diferencial, sobre a qual escreveu diversos artigos de pesquisa e alguns livros, inclusive o intitulado "Differential Geometry of Curves and Surfaces", publicado pela Prentice-Hall (USA). Manfredo é um aficionado das histórias em quadrinhos, gosta de desenhar e há quem diga que escreve livros de Geometria apenas como pretexto para divulgar suas figuras e rabiscos.

geometria riemanniana

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada