Escoamento Isoentrópico em um Bocal Convergente

Agora que temos nossas equações de cálculo (Eqs. 12.7) para analisar escoamentos isoentrópicos, estamos prontos para ver como obter escoamento em um bocal, partindo do repouso. Primeiro, vamos considerar o bocal convergente e, em seguida, o bocal C-D. Em ambos os casos, para produzir um escoamento devemos criar uma diferença de pressão. Por exemplo, conforme ilustrado no bocal convergente mostrado na Fig. 12.6*a*, podemos fazer isto fornecendo o gás a partir de um reservatório (*câmara* ou *pleno*) a p_0 e T_0 e, usando uma combinação de bomba de vácuo/válvula, criar uma pressão baixa, a "contrapressão", p_b. Estamos interessados no que acontece com as propriedades do gás à medida que ele escoa através do bocal e, também, em conhecer como a vazão mássica aumenta à medida que a contrapressão é reduzida progressivamente. (Poderíamos produzir um escoamento, também, mantendo uma contrapressão constante, p. ex., atmosférica, e aumentando a pressão no pleno.)

Vamos chamar a pressão no plano de saída de p_e. Veremos que ela será, com freqüência, igual à contrapressão aplicada, p_b, mas não sempre! Os resultados obtidos, quando abrimos progressivamente a válvula a partir da posição fechada são mostrados nas Figs. 12.6*b* e 12.6*c*. Vamos considerar cada um dos casos mostrados.

Quando a válvula é fechada, não existe escoamento através do bocal. A pressão é p_0 em todo o bocal, conforme mostrado pela condição (*i*) na Fig. 12.6*a*.

Se a contrapressão, p_b, for então reduzida para um valor ligeiramente inferior a p_0, existirá escoamento através do bocal, com uma diminuição na pressão no sentido do escoamento, conforme mostrado pela condição (*ii*). O escoamento no plano de saída será subsônico, com a pressão no plano de saída igual à contrapressão.

O que acontece quando continuamos a diminuir a contrapressão? Conforme esperado, a vazão continuará a aumentar, e a pressão no plano de saída continuará a diminuir, assim como mostrado pela condição (*iii*) na Fig. 12.6*a*.

À medida que a contrapressão é diminuída progressivamente, a vazão aumenta e, por conseguinte, a velocidade e o número de Mach no plano de saída também aumentam. A seguinte questão surge: "Há um limite para a vazão mássica através do bocal?" ou, em outras palavras, "Existe um limite superior para o número de Mach na saída?" A resposta a estas questões é "Sim!" Para compreender isto, relembre que, para escoamento isoentrópico, a Eq. 12.6 aplica-se:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A}\frac{1}{\left[1-M^2\right]} \tag{12.6}$$

Disso, aprendemos que o *único* local em que podemos ter condições sônicas ($M = 1$) é onde a variação na área dA é zero. *Não podemos* ter condições sônicas em qualquer local na seção convergente.

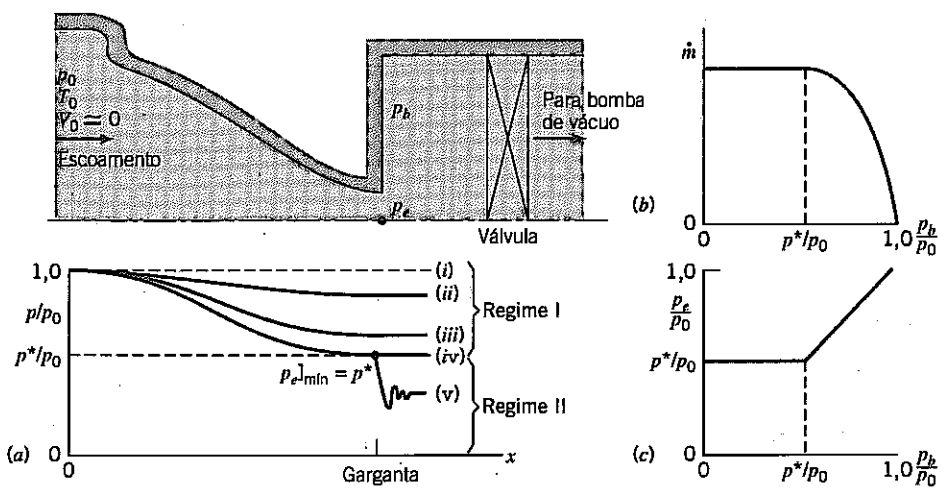


Fig. 12.6 Bocal convergente operando em várias contrapressões.

Logicamente, podemos ver que o *número de Mach máximo na saída* é *um*. Posto que o escoamento partiu do repouso ($M = 0$), se postularmos que $M > 1$ na saída, o escoamento teria que passar por $M = 1$ em algum local na seção convergente, o que seria uma violação da Eq. 12.6.

Portanto, a vazão máxima ocorre quando se tem condições sônicas no plano de saída, quando $M_e = 1$, e $p_e = p_b = p^*$, a pressão crítica. Isto é mostrado pela condição (*iv*) na Fig. 12.6*a*, sendo chamado "escoamento bloqueado", além do qual a vazão não pode ser aumentada. Da Eq. 12.7f,

$$\left.\frac{p_e}{p_0}\right|_{\text{bloqueado}} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{12.8}$$

Para o ar, $k = 1{,}4$, então $p_e/p_0]_{\text{bloqueado}} = 0{,}528$. Por exemplo, se desejássemos ter um escoamento sônico na saída de um bocal a partir de um pleno que está à pressão atmosférica, teríamos que manter uma contrapressão em torno de 7,76 psia (53,51 kPa), ou seja, cerca de 6,94 psig (47,85 kPa) de vácuo. Isto não parece difícil de ser gerado por uma bomba de vácuo, mas, na verdade, consome muita potência para ser mantido, porque haverá uma grande vazão mássica através da bomba. Para a máxima vazão mássica, ou de bloqueio, temos

$$\dot{m}_{\text{bloqueado}} = \rho^* V^* A^*$$

Usando a equação de estado de gás ideal, Eq. 12.2e, e as razões entre pressões e temperaturas de estagnação e críticas, Eqs. 12.7d e 12e, respectivamente, com $A^* = A_e$, pode ser mostrado que essa equação torna-se

$$\dot{m}_{\text{bloqueado}} = A_e p_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.9}$$

Para o ar, $\dot{m}_{\text{bloqueado}} = 0{,}04 A_e p_0 / \sqrt{T_0}$ ($\dot{m}_{\text{bloqueado}}$ em kg/s, A_e em m^2, p_0 em Pa e T_0 em K), ou $\dot{m}_{\text{bloqueado}} = 76{,}6 A_e p_0 / \sqrt{T_0}$ ($\dot{m}_{\text{bloqueado}}$ em lbm/s, A_e em ft^2, p_0 em psia e T_0 em °R). A vazão máxima no bocal convergente depende do gás (k e R), do tamanho da área de saída (A_e), e das condições no reservatório (p_0, T_0).

Suponha que queiramos insistir em reduzir a contrapressão abaixo desse nível de referência p^*. A nossa próxima pergunta é "O que acontecerá com o escoamento no bocal?" A resposta é "Nada!" O escoamento permanece bloqueado: a vazão mássica não aumenta, conforme mostrado na Fig. 12.6*b*, e a distribuição de pressão no bocal permanece invariável, com $p_e = p^* > p_b$, como mostrado na condição (*v*) nas Figs. 12.6*a* e 12.6*c*. Após a saída, o escoamento ajusta-se à contrapressão aplicada, mas isto acontece de forma tridimensional e não-isoentrópica em uma série de ondas de expansão e choques e, para essa parte do escoamento, nossos conceitos de escoamento unidimensional e isoentrópico não mais se aplicam. Retornaremos a essa discussão na Seção 12-6.

Essa idéia de escoamento bloqueado parece um pouco estranha, mas pode ser explicada de duas maneiras, pelo menos. Primeiro, já discutimos que, para aumentar a vazão mássica além do bloqueio seria necessário $M_e > 1$, o que não é possível. Segundo, uma vez que o escoamento atinge as condições sônicas, ele torna-se "insensível" às condições de jusante: Qualquer variação (i. e., uma redução) na contrapressão aplicada propaga-se no fluido à velocidade do som em todas as direções, de forma que ela é "lavada" a jusante pelo fluido que está se movendo à velocidade do som na saída do bocal.

O escoamento através de um bocal convergente pode ser dividido em dois regimes:

1. No Regime I, $1 \geq p_b/p_0 \geq p^*/p_0$. O escoamento em direção à garganta é isoentrópico, $p_e = p_b$.
2. No Regime II, $p_b/p_0 < p^*/p_0$. O escoamento em direção à garganta é isoentrópico, e $M_e = 1$. Uma expansão não-isoentrópica ocorre no escoamento deixando o bocal e $p_e = p^* > p_b$.

Os processos de escoamento correspondentes ao Regime II são mostrados em um diagrama *Ts* na Fig. 12.7. Dois problemas envolvendo bocais convergentes são resolvidos nos Problemas-Exemplos 12.2 e 12.3.

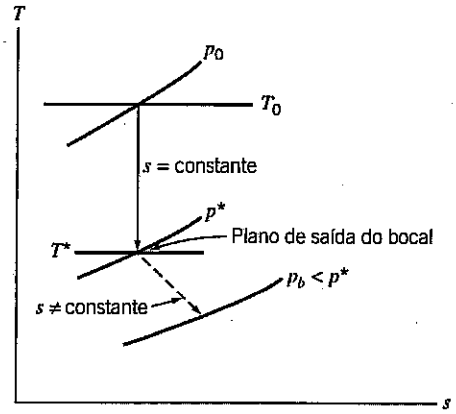


Fig. 12.7 Diagrama esquemático *Ts* para escoamento bloqueado através de um bocal convergente.

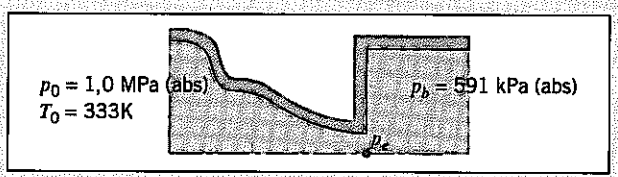
Embora o escoamento isoentrópico seja uma idealização, muitas vezes constitui uma aproximação muito boa para o comportamento real de bocais. Visto que um bocal é um dispositivo que acelera um escoamento, o gradiente de pressão interna é favorável. Isso tende a manter delgadas as camadas-limite nas paredes e a minimizar os efeitos de atrito.

EXEMPLO 12.2 Escoamento Isoentrópico em um Bocal Convergente

Um bocal convergente, com área de garganta de 0,001 m², é operado com ar a uma contrapressão de 591 kPa (abs). O bocal é alimentado a partir de uma grande câmara pressurizada onde a pressão absoluta de estagnação e a temperatura são, respectivamente, 1,0 MPa e 60°C. O número de Mach na saída e a vazão em massa devem ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.2

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal convergente nas condições mostradas: O escoamento é isoentrópico.



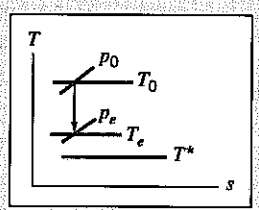
DETERMINAR: (a) M_e.
(b) $\dot{m}$.

SOLUÇÃO:

O primeiro passo é verificar quanto ao bloqueio. A razão de pressão é

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{5{,}91 \times 10^5}{1{,}0 \times 10^6} = 0{,}591 > 0{,}528$$

de modo que o escoamento *não* está bloqueado. Portanto, $p_b = p_e$, e o escoamento é isoentrópico, conforme esboçado no diagrama *Ts*.



Como p_0 = constante, M_e pode ser determinado a partir da razão de pressão,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_e, com $p_e = p_b$, obtemos

$$1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 = \left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k}$$

e

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0\times10^6}{5{,}91\times10^5}\right)^{0{,}286} - 1\right]\frac{2}{1{,}4-1}\right\}^{1/2} = 0{,}90 \longleftarrow M_e$$

A vazão mássica é

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e$$

Precisamos de T_e para encontrar ρ_e e c_e. Dado que T_0 = constante,

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2}M_e^2$$

ou

$$T_e = \frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}M_e^2} = \frac{(273+60)\,\text{K}}{1+0{,}2(0{,}9)^2} = 287\,\text{K}$$

$$c_e = \sqrt{kRT_e} = \left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 340\,\text{m/s}$$

e

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 5{,}91\times10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\,\text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{287\,\text{K}} = 7{,}18\,\text{kg/m}^3$$

Finalmente

$$\dot{m} = \rho_e M_e c_e A_e = 7{,}18\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}9 \times 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}001\,\text{m}^2 = 2{,}20\ \text{kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

Este problema ilustra o uso das equações isoentrópicas, Eqs. 12.7, para um escoamento que não está bloqueado.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos (usando ou as equações isoentrópicas ou as equações básicas).

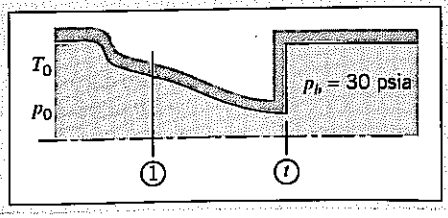
EXEMPLO 12.3 Escoamento Bloqueado em um Bocal Convergente

Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente. Numa seção em que a área do bocal é 0,013 ft², a pressão, a temperatura e o número de Mach locais são 60 psia, 40°F e 0,52, respectivamente. A contrapressão é 30 psia. O número de Mach na garganta, a vazão em massa e a área da garganta devem ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.3

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal convergente nas condições mostradas:

$M_1 = 0{,}52$
$T_1 = 40°\text{F}$
$P_1 = 60$ psia
$A_1 = 0{,}013$ ft²



DETERMINAR: (a) M_t. (b) $\dot{m}$. (c) A_t.

SOLUÇÃO:

Primeiro, verificamos quanto ao bloqueio para determinar se o escoamento é isoentrópico até p_b. Para tanto, avaliamos as condições de estagnação.

$$p_0 = p_1\left[1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} = 60\,\text{psia}\,[1+0{,}2(0{,}52)^2]^{3{,}5} = 72{,}0\,\text{psia}$$

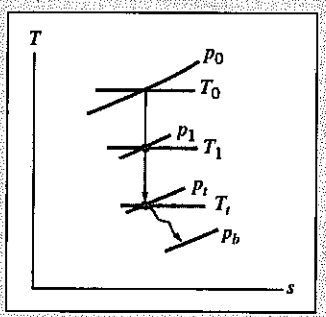
A razão de contrapressão é

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{30{,}0}{72{,}0} = 0{,}417 < 0{,}528$$

de modo que o escoamento está bloqueado! Para escoamento bloqueado,

$$M_t = 1{,}0 \longleftarrow M_t$$

O diagrama Ts é



A vazão mássica pode ser determinada a partir das condições na seção ①, usando $\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1$.

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1\sqrt{kRT_1}$$

$$= 0{,}52\left[1{,}4 \times 53{,}3\,\frac{\text{ft}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times (460+40)^\circ\text{R} \times 32{,}2\,\frac{\text{lbm}}{\text{slug}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{ft}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 570\,\text{ft/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 60\,\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} \times \frac{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}}{53{,}3\,\text{ft}\cdot\text{lbf}} \times \frac{1}{500^\circ\text{R}} \times 144\,\frac{\text{in}^2}{\text{ft}^2} = 0{,}324\,\text{lbm/ft}^3$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 0{,}324\,\frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3} \times 570\,\frac{\text{ft}}{\text{s}} \times 0{,}013\,\text{ft}^2 = 2{,}40\,\text{lbm/s} \longleftarrow \dot{m}$$

Da Eq. 12.6,

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}52}\left[\frac{1+0{,}2(0{,}52)^2}{1{,}2}\right]^{3{,}00} = 1{,}303$$

Para escoamento bloqueado, $A_t = A^*$. Portanto,

$$A_t = A^* = \frac{A_1}{1{,}303} = \frac{0{,}013\,\text{ft}^2}{1{,}303} = 9{,}98\times10^{-3}\,\text{ft}^2 \longleftarrow A_t$$

Este problema ilustra o uso das equações isoentrópicas, Eqs. 12.7, para um escoamento que está bloqueado.

✓ Posto que o escoamento está bloqueado, poderíamos, também, ter usado a Eq. 12.9 para $\dot{m}$ (após determinar T_0).

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos.

Escoamento Isoentrópico em um Bocal Convergente-Divergente

Tendo considerado o escoamento isoentrópico em um bocal convergente, vamos considerar agora o escoamento isoentrópico em um bocal convergente-divergente (C-D). Como no caso anterior, o escoamento através da passagem convergente-divergente na Fig. 12.8 é induzido por uma bomba de vácuo a jusante e controlado pela válvula mostrada; as condições de estagnação a montante são constantes. A pressão no plano de saída do bocal é p_e; o bocal descarrega para a contrapressão p_b. Assim como para o bocal convergente, desejamos investigar, entre outras coisas, como a vazão mássica varia com a diferença de pressão aplicada ($p_0 - p_b$). Considere o efeito da redução gradual da contrapressão. Os resultados são ilustrados graficamente na Fig. 12.8. Vamos considerar cada um dos casos mostrados.

Com a válvula inicialmente fechada, não há escoamento através do bocal; a pressão é constante em p_0. Uma leve abertura da válvula (p_b ligeiramente inferior a p_0) produz a curva de distribuição de pressão (*i*). Se a vazão for suficientemente baixa, o escoamento será subsônico e essencialmente incompressível em todos os pontos sobre esta curva. Nessas condições, o bocal C-D comportar-se-á como um venturi, com o escoamento acelerando na parte convergente até que um ponto de velocidade máxima e pressão mínima seja atingido na garganta, e desacelerando em seguida na parte divergente até a saída do bocal. (Esse comportamento é descrito com exatidão pela equação de Bernoulli, Eq. 6.18.)

À medida que se abre mais a válvula e a vazão é aumentada, uma pressão mínima definida ocorre de forma mais acentuada, conforme mostrado pela curva (*ii*). Embora os efeitos de compressibilidade tornem-se importantes, o escoamento é ainda subsônico em toda parte e desacelerado na seção divergente. (Claramente, esse comportamento *não* é descrito com exatidão pela equação de Bernoulli.) Finalmente, à medida que a válvula é aberta ainda mais, resulta a curva (*iii*). Na seção de área mínima, o escoamento finalmente atinge $M = 1$ e o bocal é bloqueado — a vazão é a máxima possível para o bocal e as condições de estagnação dados.

Todos os escoamentos com distribuições de pressão (*i*), (*ii*) e (*iii*) são isoentrópicos; cada curva está associada a uma única vazão mássica. Finalmente, quando a curva (*iii*) é atingida, as condições críticas estão presentes na garganta. Para essa vazão, o escoamento é bloqueado, e

$$\dot{m} = \rho^* V^* A^*$$

onde $A^* = A_t$, conforme foi para o bocal convergente, e, para essa máxima vazão possível, a Eq. 12.9 aplica-se (com A_e substituída pela área de garganta A_t),

$$\dot{m}_{\text{bloqueado}} = A_t p_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.10}$$

Para o ar, $\dot{m}_{\text{bloqueado}} = 0{,}04 A_t p_0 / \sqrt{T_0}$ ($\dot{m}_{\text{bloqueado}}$ em kg/s, A_t em m², p_0 em Pa e T_0 em K), ou $\dot{m}_{\text{bloqueado}} = 76{,}6 A_t p_0 / \sqrt{T_0}$ ($\dot{m}_{\text{bloqueado}}$ em lbm/s, A_t em ft², p_0 em psia e T_0 em R). A vazão máxima no bocal C-D

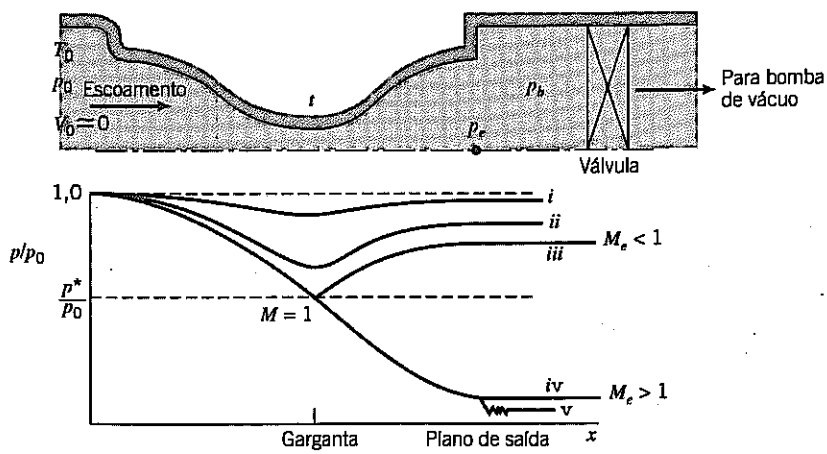


Fig. 12.8 Distribuições de pressão para escoamento isoentrópico em um bocal convergente-divergente.

depende do gás (k e R), do tamanho da área da garganta (A_t), e das condições no reservatório (p_0, T_0). Qualquer tentativa de aumentar a vazão por meio de uma redução adicional na contrapressão não surtirá efeito, pelas duas razões que discutimos anteriormente: uma vez atingidas as condições sônicas, as variações a jusante não podem mais ser transmitidas para montante, e as condições sônicas não podem ser excedidas na garganta, porque isto exigiria uma passagem através do estado sônico em algum lugar na seção convergente, o que é impossível no escoamento isoentrópico.

Com condições sônicas na garganta, consideramos o que *pode* acontecer ao escoamento na seção divergente. Já discutimos previamente (veja Fig. 12.3) que uma seção divergente desacelerará um escoamento subsônico ($M < 1$), mas acelerará um escoamento supersônico ($M > 1$) — comportamentos muito diferentes! Surge, então, a seguinte questão: "Um escoamento sônico comporta-se como um escoamento subsônico ou como um escoamento supersônico quando ele entra em uma seção divergente?" A resposta a esta questão é que ele pode se comportar como qualquer um dos outros dois, dependendo da pressão a jusante! Já vimos o comportamento do escoamento subsônico [curva (*iii*)]: a contrapressão aplicada leva a um aumento gradual na pressão a jusante, desacelerando o escoamento. Vamos agora considerar a aceleração do escoamento bloqueado.

A aceleração do escoamento em uma seção divergente requer uma diminuição de pressão. Esta condição é ilustrada pela curva (*iv*) da Fig. 12.8. O escoamento será acelerado isoentropicamente no bocal desde que a pressão na saída seja ajustada em p_{iv}. Vemos então que, com um número de Mach na garganta igual à unidade, existem duas condições possíveis de escoamento isoentrópico no bocal convergente-divergente. Isso é consistente com os resultados na Fig. 12.5, onde encontramos dois números de Mach para cada A/A^* no escoamento isoentrópico.

A redução da contrapressão abaixo da condição (*iv*), digamos para a condição (*v*), não causa efeito algum sobre o escoamento no bocal. O escoamento é isoentrópico do pleno até a saída do bocal [como na condição (*iv*)] e, em seguida, ele submete-se a uma expansão tridimensional e irreversível até a contrapressão mais baixa. Um bocal operando nessas condições é dito *subexpandido,* visto que uma expansão adicional ocorre fora do bocal.

Um bocal convergente-divergente é, em geral, solicitado para produzir escoamento supersônico no plano de saída. Se a contrapressão for ajustada em p_{iv}, o escoamento será isoentrópico através do bocal e supersônico na saída do bocal. Bocais operando com $p_b = p_{iv}$ [correspondendo à curva (*iv*) na Fig. 12.8] são ditos operando nas *condições de projeto.*

O escoamento saindo de um bocal C-D é supersônico quando a contrapressão está na pressão de projeto do bocal ou abaixo dela. O número de Mach na saída é fixo, uma vez especificada a razão de área, A/A^*. Todas as outras propriedades no plano de saída (para escoamento isoentrópico) estão relacionadas unicamente às propriedades de estagnação pelo número de Mach fixo no plano de saída.

A hipótese de escoamento isoentrópico para um bocal real nas condições de projeto é razoável. Entretanto, o modelo de escoamento unidimensional é inadequado para o projeto de bocais relativamente curtos com vistas a produzir escoamento supersônico uniforme na saída.

Veículos de propulsão a jato usam bocais C-D para acelerar os gases de exaustão à velocidade máxima possível para produzir empuxo elevado. Um bocal de propulsão está sujeito a condições ambientais variáveis durante o vôo através da atmosfera, de forma que é impossível obter o máximo empuxo teórico em toda a faixa de operação. Como somente um número de Mach pode ser obtido para cada razão de área, os bocais para túneis de ventos supersônicos são construídos, em geral, com seções de teste intercambiáveis, ou com geometria variável.

Sem dúvida, você notou que nada foi dito sobre a operação de bocais convergentes-divergentes com contrapressão na faixa $p_{iii} > p_b > p_{iv}$. Para tais casos, o escoamento não pode expandir isoentropicamente até p_b. Sob essas condições, um choque (que pode ser tratado como uma descontinuidade irreversível envolvendo aumento de entropia) ocorre em algum lugar dentro do escoamento. Após uma discussão sobre choques normais na Seção 12-5, completaremos a discussão de escoamento em bocais convergentes-divergentes na Seção 12-6.

Bocais operando com $p_{iii} > p_b > p_{iv}$ são ditos *sobre-expandidos*, porque a pressão em algum ponto no bocal é menor do que a contrapressão. Obviamente, um bocal sobre-expandido poderia ser modificado para operar em uma nova condição de projeto, removendo a parte da seção divergente.

No Problema-Exemplo 12.4, consideramos o escoamento isoentrópico em um bocal C-D; no Problema-Exemplo 12.5, abordamos o escoamento bloqueado em um bocal C-D.

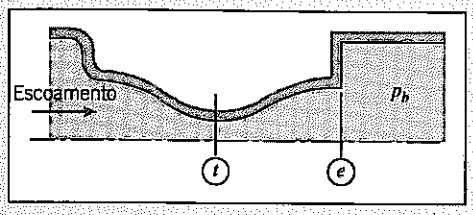
EXEMPLO 12.4 Escoamento Isoentrópico em um Bocal Convergente-Divergente

Ar escoa isoentropicamente em um bocal convergente-divergente, com área de saída de 0,001 m². O bocal é alimentado a partir de uma grande câmara pleno, onde as condições de estagnação são 350 K e 1,0 MPa (abs). A pressão de saída é 954 kPa (abs) e o número de Mach na garganta é 0,68. As propriedades do fluido e a área na garganta do bocal, bem como o número de Mach na saída, devem ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.4

DADOS: Escoamento isoentrópico de ar num bocal C-D conforme mostrado:

$T_0 = 350$ K
$p_0 = 1{,}0$ MPa
$p_b = 954$ kPa (abs)
$M_t = 0{,}68 \qquad A_e = 0{,}001$ m²



DETERMINAR: (a) As propriedades e a área na garganta do bocal.
(b) M_e.

SOLUÇÃO:

A temperatura de estagnação é constante para escoamento isoentrópico. Logo, visto que

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

segue que

$$T_t = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2} = \frac{350\text{ K}}{1 + 0{,}2(0{,}68)^2} = 320\text{ K} \longleftarrow T_t$$

Também, uma vez que p_0 é constante no escoamento isoentrópico, segue que

$$p_t = p_0\left(\frac{T_t}{T_0}\right)^{k/(k-1)} = p_0\left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$p_t = 1{,}0 \times 10^6\text{ Pa}\left[\frac{1}{1 + 0{,}2(0{,}68)^2}\right]^{3{,}5} = 734\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_t$$

logo

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = 7{,}34 \times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{320\text{ K}} = 7{,}99\ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_t$$

e

$$V_t = M_t c_t = M_t\sqrt{kRT_t}$$

$$V_t = 0{,}68\left[1{,}4 \times 287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 320\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 244\text{ m/s} \longleftarrow V_t$$

Da Eq. 12.7d, podemos obter o valor de A_t/A^*

$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{1}{M_t}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}68}\left[\frac{1 + 0{,}2(0{,}68)^2}{1{,}2}\right]^{3{,}00} = 1{,}11$$

mas, nesse ponto, A^* não é conhecido.

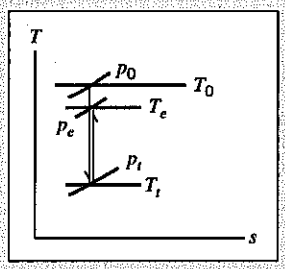
Como $M_t > 1$, o escoamento na saída deve ser subsônico. Por conseguinte, $p_e = p_b$. As propriedades de estagnação são constantes, logo

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_e, resulta em

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0 \times 10^6}{9{,}54 \times 10^5}\right)^{0{,}286} - 1\right](5)\right\}^{1/2} = 0{,}26 \longleftarrow M_e$$

O diagrama *Ts* para esse escoamento é



Uma vez que A_e e M_e são conhecidos, podemos calcular A^*. Da Eq. 12.7d,

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_e^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}26}\left[\frac{1 + 0{,}2(0{,}26)^2}{1{,}2}\right]^{3{,}00} = 2{,}317$$

Então,

$$A^* = \frac{A_e}{2{,}317} = \frac{0{,}001\,\text{m}^2}{2{,}317} = 4{,}32 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

e

$$A_t = 1{,}110A^* = (1{,}110)(4{,}32 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 4{,}80 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \longleftarrow A_t$$

Este problema ilustra o uso das equações isoentrópicas, Eqs. 12.7, para escoamento em um bocal C-D que não está bloqueado.

✓ Note que o uso da Eq. 12.7d nos permitiu obter a área da garganta, sem primeiro calcular as outras propriedades.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos (usando ou as equações isoentrópicas ou as equações básicas).

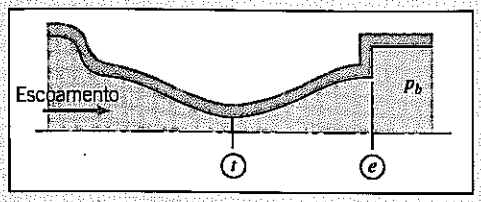
EXEMPLO 12.5 Escoamento Isoentrópico em um Bocal Convergente-Divergente: Escoamento Bloqueado

O bocal do Exemplo 12.4 tem uma contrapressão de projeto de 87,5 kPa (abs), mas é operado com uma contrapressão de 50,0 kPa (abs). Admita que o escoamento dentro do bocal é isoentrópico. Determine o número de Mach na saída e a vazão mássica.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.5

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal C-D conforme mostrado:

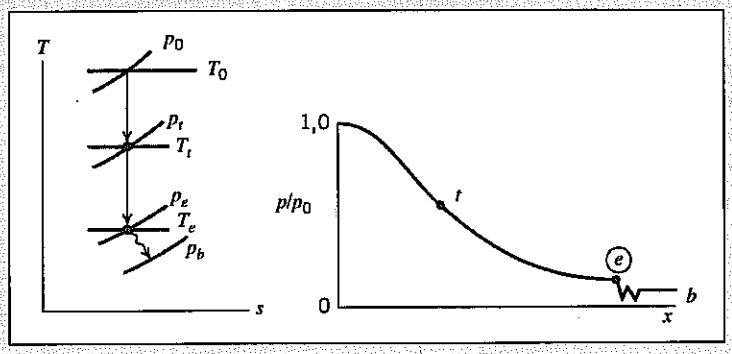
$T_0 = 350$ K
$p_0 = 1{,}0$ MPa (abs)
p_e(projeto) = 87,5 kPa (abs)
$p_b = 50{,}0$ kPa(abs)
$A_e = 0{,}001$ m²
$A_t = 4{,}8 \times 10^{-4}$ m² (Problema-Exemplo 12.4)



DETERMINAR: (a) M_e. (b) $\dot{m}$.

SOLUÇÃO:

A contrapressão de operação está *abaixo* da pressão de projeto. Desse modo, o bocal está subexpandido e o diagrama *Ts* e a distribuição de pressão serão conforme mostrado:



O escoamento *dentro* do bocal será isoentrópico, mas a expansão irreversível de p_e para p_b causará um aumento de entropia; $p_e = p_e$(projeto) = 87,5 kPa (abs).

Como as propriedades de estagnação são constantes para escoamento isoentrópico, o número de Mach de saída pode ser calculado a partir da razão de pressão. Assim,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

ou

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0 \times 10^6}{8{,}75 \times 10^4}\right)^{0{,}286} - 1\right]\frac{2}{0{,}4}\right\}^{1/2} = 2{,}24 \longleftarrow \underline{M_e}$$

Visto que o escoamento é bloqueado, podemos usar a Eq. 12.10 para a vazão mássica,

$$\dot{m}_{\text{bloqueado}} = A_t p_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)} = 0{,}04\,\frac{A_t p_0}{\sqrt{T_0}} \qquad (12.10)$$

(com $\dot{m}_{\text{bloqueado}}$ em kg/s, A_t em m², p_0 em Pa e T_0 em K), logo

$$\dot{m}_{\text{bloqueado}} = 0{,}04 \times 4{,}8 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^6/\sqrt{350}$$

$$\dot{m} = \dot{m}_{\text{bloqueado}} = 1{,}04 \text{ kg/s} \longleftarrow \underline{\dot{m}}$$

Este problema ilustra o uso das equações isoentrópicas, Eqs. 12.7, para escoamento em um bocal C-D que está bloqueado.

✓ Note que usamos a Eq. 12.10 na forma de uma "equação de engenharia" — ou seja, uma equação contendo um coeficiente que tem unidades. Embora útil aqui, essas equações são pouco usadas em engenharia, porque sua aplicação correta depende do uso dos valores das variáveis de entrada em unidades específicas.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos (usando ou as equações isoentrópicas ou as equações básicas).

Agora, completamos nosso estudo de escoamento idealizado, unidimensional e isoentrópico, em canais de área variável. Em canais reais, teremos atrito e, muito provavelmente, transferência de calor. As nossas próximas tarefas consistem em estudar os efeitos desses fenômenos sobre um escoamento. Conforme mencionamos no início deste capítulo, neste texto introdutório não podemos estudar escoamentos que experimentam *todos* esses fenômenos: Na próxima seção, vamos considerar o efeito isolado do atrito, na Seção 12-4, estudaremos o efeito isolado da transferência de calor e, na Seção 12-5, abordaremos o efeito de choques normais (e veja na Seção 12-6 como eles afetam o bocal C-D, com mais detalhes do que apresentamos aqui).

12-3 ESCOAMENTO EM UM DUTO DE ÁREA CONSTANTE, COM ATRITO

Escoamentos de gases em dutos de área constante são comumente encontrados em diversas aplicações da engenharia. Nesta seção, consideraremos escoamentos nos quais o atrito de parede é responsável por mudanças nas propriedades dos fluidos.

Assim como para o escoamento isoentrópico com variação de área (Seção 12-2), nosso ponto de partida na análise de escoamentos com atrito é o conjunto de equações básicas (Eqs. 12.1), descrevendo um movimento unidimensional afetado por vários fenômenos: variação de área, atrito, transferência de calor e choques normais. As equações são:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{12.1a}$$

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.1b}$$

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12.1c}$$

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.1d}$$

$$p = \rho R T \tag{12.1e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1) \tag{12.1f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.1g}$$

A Eq. 12.1a é a *continuidade*, a Eq. 12.1b é a equação da *quantidade de movimento*, a Eq. 12.1c é uma equação de *energia*, a Eq. 12.1d é a *segunda lei da termodinâmica*, e as Eqs. 12.1e, 12.1f e 12.1g são *relações de propriedades* úteis para um gás ideal com calores específicos constantes.

Devemos simplificar estas equações para um escoamento em um duto de área constante com atrito. O primeiro problema está em o que fazer com o calor que o atrito gera. Existem dois casos óbvios que podemos considerar: No primeiro, admitimos que o escoamento é *adiabático*, de forma que o calor gerado permanece no fluido como uma energia interna adicional; no segundo, admitimos que o escoamento é *isotérmico*, de forma que o fluido rejeita ou recebe calor quando necessário. Enquanto alguns escoamentos podem ser nem adiabáticos nem isotérmicos, muitos escoamentos no mundo real o são. O escoamento em um duto relativamente curto será aproximadamente adiabático; o escoamento em um duto muito longo (p. ex., uma tubulação de gás natural não isolada termicamente) será aproximadamente isotérmico (a tubulação estará à temperatura ambiente). Consideraremos, primeiro, o escoamento adiabático.

Equações Básicas para o Escoamento Adiabático

As Eqs. 12.1 podem ser simplificadas para um escoamento adiabático, com atrito, em um duto de área constante, de um gás ideal com calores específicos constantes, conforme mostrado na Fig. 12.9.

Temos, então, $A_1 = A_2 = A$. Além disso, quando não existe transferência de calor, temos $\delta Q/dm = 0$. Finalmente, a força R_x deve-se agora somente ao atrito (nenhuma componente x da força superficial é causada pela pressão sobre os lados paralelos do canal). Assim, para esse escoamento, nossas equações tornam-se

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \rho V \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} = \text{constante} \tag{12.11a}$$

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.11b}$$

$$h_{0_1} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{0_2} = h_0 \tag{12.11c}$$

$$s_2 > s_1 \tag{12.11d}$$

$$p = \rho R T \tag{12.11e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1) \tag{12.11f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.11g}$$

As Eqs. 12.11 podem ser usadas para analisar escoamento adiabático, com atrito, em um canal de área constante. Por exemplo, se nós conhecermos as condições na seção ① (i. e., p_1, ρ_1, T_1, s_1, h_1 e V_1), podemos utilizar estas equações para encontrar as condições em uma nova seção ② após o fluido ter experimentado uma força total de atrito R_x. É o efeito do atrito que causa a variação das propriedades do fluido ao longo do duto. Para uma força de atrito conhecida, temos seis equações (não incluindo a restrição da Eq. 12.11d) e seis incógnitas (p_2, ρ_2, T_2, s_2, h_2 e V_2). Na prática, esse procedimento é trabalhoso — como para o escoamento isoentrópico, temos um conjunto de equações algébricas não-lineares, acopladas, para resolver.

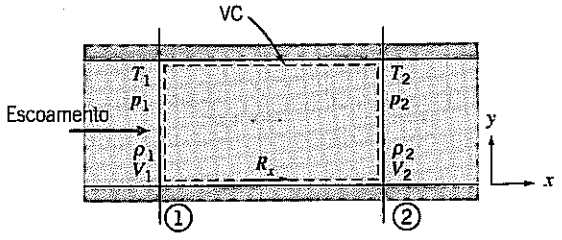


Fig. 12.9 Volume de controle usado na análise integral de escoamento adiabático com atrito.

Escoamento Adiabático: A Linha de Fanno

Se tentássemos os cálculos descritos, conforme o escoamento avança no duto (i. e., para valores crescentes de R_x), desenvolveríamos uma relação entre T e s como aquela mostrada qualitativamente na Fig. 12.10 para duas possibilidades: um escoamento que era inicialmente subsônico (iniciando em algum ponto ①), e um escoamento que era inicialmente supersônico (iniciando em algum ponto ①'). O lugar geométrico de todos os possíveis estados a jusante no escoamento é referido como a *linha de Fanno*. Cálculos detalhados mostram algumas características interessantes do escoamento de linha de Fanno. No ponto de máxima entropia, o número de Mach é a unidade. No ramo superior da curva, o número de Mach é sempre menor do que a unidade, e ele aumenta monotonamente conforme prosseguimos para a direita ao longo da curva.

Para qualquer estado inicial sobre a linha de Fanno, cada ponto sobre a linha representa um estado matematicamente possível a jusante no escoamento. Na verdade, determinamos o lugar geométrico de todos os estados possíveis a jusante, deixando variar a força de atrito R_x e calculando as propriedades correspondentes. Note as setas na Fig. 12.10, indicando que, como requerido pela Eq. 12.11d, a entropia deve aumentar para esse escoamento. De fato, é a *presença do atrito* (uma irreversibilidade) em um escoamento adiabático que faz com que a entropia aumente. Referindo novamente à Fig. 12.10, vemos que, para um escoamento inicialmente subsônico (estado ①), o efeito do atrito é aumentar o número de Mach no sentido da unidade. Para um escoamento inicialmente supersônico (estado ①'), o efeito do atrito é diminuir o número de Mach no sentido da unidade.

No desenvolvimento da forma simplificada da primeira lei para o escoamento de linha de Fanno, Eq. 12.11c, verificamos que a entalpia de estagnação permanece constante. Conseqüentemente, quando o fluido é um gás ideal com calores específicos constantes, a temperatura de estagnação também deve permanecer constante. O que acontece com a pressão de estagnação? O atrito causa a diminuição da pressão de estagnação isoentrópica local para todos os escoamentos de linha de Fanno, conforme mostrado na Fig. 12.11. Como a entropia deve aumentar no sentido do escoamento, o processo de escoamento deve prosseguir para a direita sobre o diagrama Ts. Na Fig. 12.11, um trajeto do estado ① para o estado ② é mostrado sobre a porção subsônica da curva. As pressões locais de estagnação isoentrópica correspondentes, p_{0_1} e p_{0_2}, mostram claramente que $p_{0_2} < p_{0_1}$. Um resultado idêntico é obtido para o processo de ramo supersônico da curva do estado ①' para o estado ②'. Novamente $p_{0_{2'}} < p_{0_{1'}}$. Portanto, p_0 decresce para qualquer escoamento de linha de Fanno.

Os efeitos do atrito sobre as propriedades do escoamento para escoamento de linha Fanno estão resumidos na Tabela 12.1.

Na dedução do efeito do atrito sobre as propriedades do escoamento para escoamento de linha de Fanno, usamos a forma da linha de Fanno sobre o diagrama Ts e as equações básicas (Eqs. 12.11). Você deve se guiar pela lógica indicada na coluna à direita na tabela. Note que o efeito do atrito é o

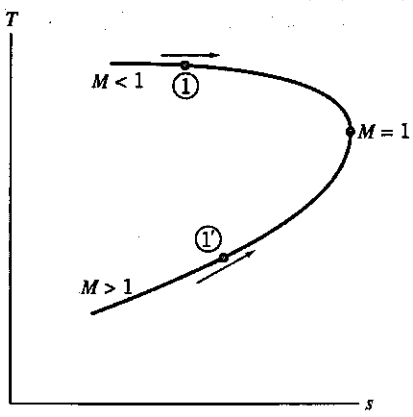


Fig. 12.10 Diagrama esquemático Ts para escoamento adiabático com atrito (de linha de Fanno) em um duto de área constante.

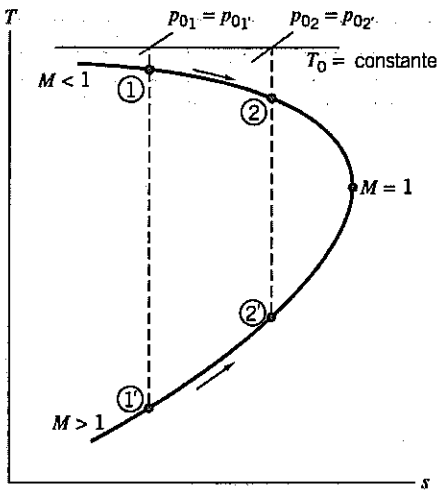


Fig. 12.11 Diagrama esquemático de escoamento de linha de Fanno no plano Ts, mostrando a redução na pressão de estagnação isoentrópica local causada pelo atrito.

de acelerar um escoamento subsônico! Isso parece um quebra-cabeças real — uma violação da segunda lei de Newton — até percebermos que a pressão está caindo muito rapidamente, de modo que o gradiente de pressão mais do que cancela o arrasto devido ao atrito. Podemos notar, também, que a massa específica está decrescendo nesse escoamento (principalmente por causa da queda de pressão), obrigando (pela continuidade) a velocidade a também diminuir. Todas as propriedades afetam simultaneamente umas às outras (conforme expresso no conjunto de equações acopladas, Eqs. 12.11), de forma que não é possível concluir que a variação em uma propriedade qualquer seja responsável sozinha por variações em qualquer uma das outras.

Verificamos que a entropia deve aumentar no sentido do escoamento: É o efeito do atrito que causa a variação nas propriedades do escoamento ao longo da curva da linha de Fanno. Observando a Fig. 12.11, notamos que existe um ponto máximo de entropia correspondente a $M = 1$ para cada linha de Fanno. O ponto de entropia máxima é atingido aumentando a quantidade de atrito (por meio do aumento no comprimento do duto) o suficiente para produzir um número de Mach igual à unidade (escoamento bloqueado) na saída. Se insistirmos em adicionar duto além do comprimento crítico, para o qual o escoamento é bloqueado, uma das duas coisas acontece: se o escoamento de entrada é subsônico, o comprimento adicional força a condição sônica a mover para baixo para a nova saída, e a vazão no duto (e o número de Mach em cada local) decresce; se o escoamento de entrada é supersônico, o comprimento adicional causa o aparecimento de um choque normal em algum local no duto, e o choque move-se mais para montante à medida que mais duto é adicionado (para maiores detalhes veja Seção 12-6).

Tabela 12.1 Resumo dos Efeitos de Atrito sobre Propriedades em Escoamento de Linha de Fanno

Propriedade	Subsônico $M < 1$	Supersônico $M > 1$	Obtido de:
Temperatura de estagnação, T_0	Constante	Constante	Equação da energia
Entropia, s	Aumenta	Aumenta	Equação $T\,ds$
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diminui	T_0 = constante s aumenta
Temperatura, T	Diminui	Aumenta	Forma de linha de Fanno
Velocidade, V	Aumenta	Diminui	Equação da energia, e tendência de T
Número de Mach, M	Aumenta	Diminui	Tendências de V e T, e definição de M
Massa específica, ρ	Diminui	Aumenta	Equação da continuidade, e efeito sobre V
Pressão, p	Diminui	Aumenta	Equação de estado, e efeitos sobre ρ e T

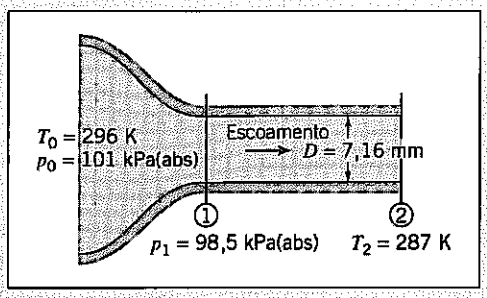
Para calcular o comprimento crítico do duto, devemos analisar o escoamento detalhadamente, levando em consideração o atrito. Esta análise requer que comecemos com um volume de controle diferencial, desenvolvamos expressões em função do número de Mach e integremos ao longo do duto até a seção onde $M = 1$. Essa é a nossa próxima tarefa, que envolverá um pouco de manipulação algébrica, de forma que, primeiramente, vamos demonstrar o uso de algumas das Eqs. 12.11 no Problema-Exemplo 12.6.

EXEMPLO 12.6 Escoamento Adiabático com Atrito em um Duto de Área Constante

Escoamento de ar é induzido, por uma bomba de vácuo, para dentro de um tubo de 7,16 mm de diâmetro, termicamente isolado. O ar é extraído de um ambiente, onde p_0 = 101 kPa (abs) e T_0 = 23°C, através de um bocal convergente de contorno suave. Na seção ①, onde o bocal se une ao tubo de área constante, a pressão estática é 98,5 kPa (abs). Na seção ②, localizada a alguma distância a jusante no tubo de área constante, a temperatura do ar é 14°C. Determine a vazão mássica, a pressão de estagnação isoentrópica local na seção ②, e a força de atrito sobre a parede do duto entre as seções ① e ②.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.6

DADOS: Escoamento de ar em um duto termicamente isolado.



DETERMINAR: (a) $\dot{m}$.
(b) A pressão de estagnação na seção ②.
(c) A força sobre a parede do duto.

SOLUÇÃO:
A vazão mássica pode ser obtida das propriedades na seção ①. Para escoamento isoentrópico através de um bocal convergente, as propriedades de estagnação isoentrópica local permanecem constantes. Assim,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

e

$$M_1 = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{0{,}4}\left[\left(\frac{1{,}01\times10^5}{9{,}85\times10^4}\right)^{0{,}286} - 1\right]\right\}^{1/2} = 0{,}190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} = \frac{(273+23)\,\text{K}}{1 + 0{,}2(0{,}190)^2} = 294\ \text{K}$$

Para um gás ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9{,}85\times10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{k}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{294\ \text{K}} = 1{,}17\ \text{kg/m}^3$$

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1\sqrt{kRT_1} = (0{,}190)\left[1{,}4 \times 287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 294\ \text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 65{,}3\ \text{m/s}$$

A área, A_1, é

$$A_1 = A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4}(7{,}16\times10^{-3})^2\ \text{m}^2 = 4{,}03\times10^{-5}\ \text{m}^2$$

Da continuidade,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 1{,}17\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 65{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 4{,}03\times10^{-5}\ \text{m}^2$$

$$\dot{m} = 3{,}08\times10^{-3}\ \text{kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

O escoamento é adiabático, logo T_0 é constante, e

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 296\ \text{K} \longleftarrow T_{0_2}$$

Então,

$$\frac{T_{0_2}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2}M_2^2$$

Resolvendo para M_2, vem

$$M_2 = \left[\frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{0_2}}{T_2} - 1\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{2}{0{,}4}\left(\frac{296}{287} - 1\right)\right]^{1/2} = 0{,}396 \longleftarrow M_2$$

$$V_2 = M_2 c_2 = M_2\sqrt{kRT_2} = (0{,}396)\left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_2 = 134\ \text{m/s} \longleftarrow V_2$$

Da continuidade, Eq. 12.11a, $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, logo

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 1{,}17\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{65{,}3}{134} = 0{,}570\ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

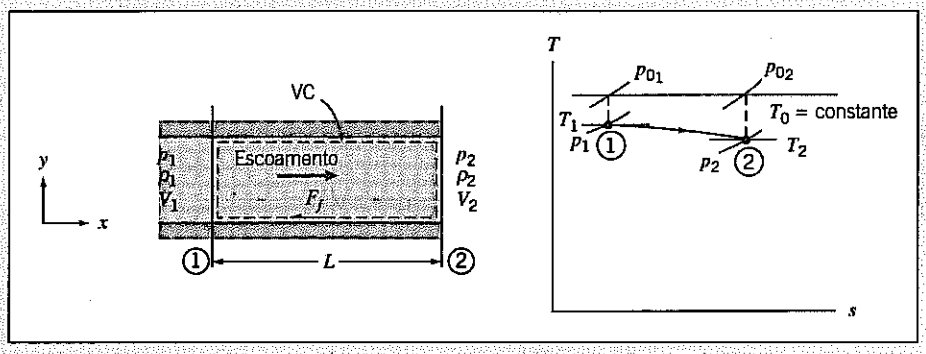
e

$$p_2 = \rho_2 R T_2 = 0{,}570\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\,\text{K} = 47{,}0\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

A pressão de estagnação isoentrópica local é

$$p_{0_2} = p_2\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{k/(k-1)} = 4{,}70 \times 10^4\ \text{Pa}[1 + 0{,}2(0{,}396)^2]^{3{,}5}$$

$$p_{0_2} = 52{,}4\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$



A força de atrito pode ser obtida usando a equação da quantidade de movimento (Eq. 12.11b),

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_2 \tag{12.11b}$$

que aplicamos ao volume de controle mostrado (exceto que R_x, da Fig. 12.9, foi substituído por $-F_f$, porque sabemos que a força de atrito F_f sobre o fluido age no sentido negativo de x).

$$-F_f = (p_2 - p_1)A + \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$-F_f = (4{,}70 - 9{,}85)10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 4{,}03 \times 10^{-5}\ \text{m}^2 + 3{,}08 \times 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} \times (134 - 65{,}3)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

ou

$$F_f = 1{,}86\ \text{N (para a esquerda, conforme mostrado)}$$

Esta é a força exercida sobre o volume de controle pela parede do duto. A força do *fluido* sobre o *duto* é

$$K_x = -F_f = 1{,}86\ \text{N} \quad \text{(para a direita)} \longleftarrow K_x$$

Este problema ilustra o uso das equações básicas, Eqs. 12.11, para escoamento em um duto com atrito.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos.

Funções de Escoamento de Linha de Fanno para o Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

A variável independente primária no escoamento de linha de Fanno é a força de atrito, F_f. O conhecimento da força de atrito total entre dois pontos quaisquer em um escoamento de linha de Fanno nos permite prever as condições a jusante a partir de condições conhecidas a montante. A força de atrito total é a integral da tensão de cisalhamento de parede sobre a área da superfície do duto. Como a tensão de cisalhamento na parede varia ao longo do duto, devemos desenvolver uma equação diferencial e, em seguida, integrá-la para determinar as variações de propriedades. Para estabelecer a equação diferencial, usamos o volume de controle diferencial mostrado na Fig. 12.12.

Comparando a Fig. 12.12 com a Fig. 12.9, verificamos que as equações básicas, Eqs. 12.11, podem ser utilizadas para o escoamento com atrito no interior de um duto, se substituirmos T_1, p_1, ρ_1, V_1 por T, p, ρ, V e T_2, p_2, ρ_2, V_2 por $T + dT$, $p + dp$, $\rho + d\rho$, $V + dV$ e, também, R_x por $-dF_f$.

A equação da continuidade (Eq. 12.11a) torna-se

$$\rho V = (\rho + d\rho)(V + dV) = \frac{\dot{m}}{A}$$

então,

$$\rho V = \rho V + \rho\, dV + d\rho V + d\rho\, dV$$

que se reduz a

$$\rho\, dV + V d\rho = 0 \tag{12.12a}$$

alguns produtos de diferenciais são desprezíveis. A equação da quantidade de movimento (Eq. 12.11b) torna-se

$$-dF_f + pA - (p + dp)A = \dot{m}(V + dV) - \dot{m}V$$

que se reduz a

$$-\frac{dF_f}{A} - dp = \rho V dV \tag{12.12b}$$

após aplicar a equação da continuidade ($\dot{m} = \rho AV$). A primeira lei da termodinâmica (Eq. 12.11c) torna-se

$$h + \frac{V^2}{2} = (h + dh) + \frac{(V + dV)^2}{2}$$

que se reduz a

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{12.12c}$$

visto que os produtos de diferenciais podem ser desprezados.

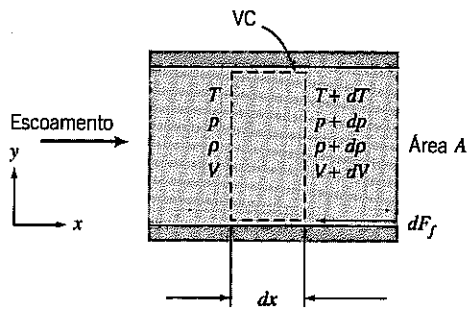


Fig. 12.12 Volume de controle diferencial usado na análise de escoamento de linha de Fanno.

As Eqs. 12.12 são equações diferenciais que podemos integrar para desenvolver relações úteis, mas, antes disto, precisamos relacionar a força de atrito F_f com outras propriedades do escoamento. Primeiro, notamos que

$$dF_f = \tau_w \, dA_w = \tau_w P \, dx \tag{12.13}$$

onde P é o perímetro molhado do tubo. Para obter uma expressão para τ_w em termos das variáveis do escoamento em cada seção transversal, admitimos que as variações nas variáveis do escoamento na direção x são graduais, e utilizamos as correlações desenvolvidas no Capítulo 8 para escoamento incompressível e completamente desenvolvido em um duto. Para escoamento incompressível, a tensão local de cisalhamento de parede pode ser escrita em termos das propriedades do escoamento e do fator de atrito. Das Eqs. 8.16, 8.32 e 8.34, obtemos para um escoamento incompressível

$$\tau_w = -\frac{R}{2}\frac{dp}{dx} = \frac{\rho R}{2}\frac{dh_l}{dx} = \frac{f\rho V^2}{8} \tag{12.14}$$

onde f é o fator de atrito para escoamento no interior de tubo dado pela Eq. 8.36 para escoamento laminar e Eq. 8.37 para escoamento turbulento, traçado na Fig. 8.12. (Admitimos que essa correlação de dados experimentais aplica-se, também, ao escoamento compressível. Esta hipótese, quando verificada contra dados experimentais, mostra uma concordância surpreendentemente boa para escoamentos subsônicos; os dados para escoamentos supersônicos são esparsos.)

Dutos com formatos diferentes do circular podem ser incluídos em nossa análise introduzindo o diâmetro hidráulico

$$D_h = \frac{4A}{P} \tag{8.50}$$

(Lembre-se de que o fator 4 foi incluído na Eq. 8.50 para que D_h se reduza ao diâmetro D para dubos circulares.)

Combinando as Eqs. 8.50, 12.13, e 12.14, obtemos

$$dF_f = \tau_w P \, dx = f\frac{\rho V^2}{8}\frac{4A}{D_h}\,dx$$

ou

$$dF_f = \frac{fA}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}\,dx \tag{12.15}$$

Substituindo esse resultado na equação da quantidade de movimento (Eq. 12.12b), obtemos

$$-\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}\,dx - dp = \rho V \, dV$$

ou, após dividir por p,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2p}\,dx - \frac{\rho V \, dV}{p}$$

Notando que $p/\rho = RT = c^2/k$, e $V\,dV = d(V^2/2)$, obtemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}\,dx - \frac{k}{c^2}\,d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

e, finalmente,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}\,dx - \frac{kM^2}{2}\frac{d(V^2)}{V^2} \tag{12.16}$$

Para relacionar M com x, devemos eliminar dp/p e $d(V^2)/V^2$ da Eq. 12.16. Da definição do número de Mach, $M = V/c$, segue que $V^2 = M^2c^2 = M^2kRT$ e, após diferenciar esta equação e dividir pela equação original,

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{dT}{T} + \frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.17a}$$

Da equação da continuidade, Eq. 12.12a, $d\rho/\rho = -dV/V$ e, então,

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{d(V^2)}{V^2}$$

Da equação de estado para um gás ideal, $p = \rho RT$,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

Combinando essas três equações, obtemos

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.17b}$$

Substituindo as Eqs. 12.17 na Eq. 12.16, resulta em

$$\frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{kM^2}{2}\frac{dT}{T} - \frac{kM^2}{2}\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$\left(\frac{1+kM^2}{2}\right)\frac{dT}{T} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx + \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.18}$$

Tivemos êxito em reduzir consideravelmente o número de variáveis. Contudo, para relacionar M e x, devemos obter uma expressão para dT/T em termos de M. Tal expressão pode ser obtida mais prontamente da equação para a temperatura de estagnação

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{11.20b}$$

Uma vez que a temperatura de estagnação é constante para escoamento de linha de Fanno,

$$T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) = \text{constante}$$

e, após diferenciar esta equação e dividir pela equação original,

$$\frac{dT}{T} + \frac{M^2\dfrac{(k-1)}{2}}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = 0$$

Substituindo dT/T na Eq. 12.18, resulta

$$\frac{M^2\dfrac{(k-1)}{2}\left(\dfrac{1+kM^2}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = \frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Combinando termos, obtemos

$$\frac{(1-M^2)}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{kM^4} = \frac{f}{D_h}dx \tag{12.19}$$

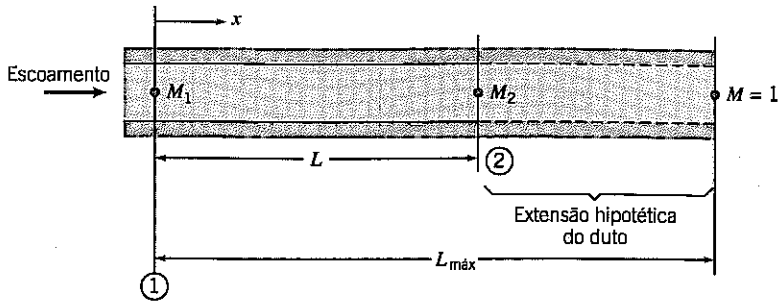


Fig. 12.13 Coordenadas e notação usadas na análise de escoamento de linha de Fanno.

Obtivemos (finalmente!) uma equação diferencial que relaciona variações em M com x. Devemos agora integrar essa equação para determinar M em função de x.

A integração da Eq. 12.19 entre os estados ① e ② produziria uma função complicada tanto de M_1 quanto de M_2. A função teria que ser avaliada numericamente para cada nova combinação de M_1 e M_2 encontrada em um problema. Os cálculos podem ser consideravelmente simplificados usando as condições críticas (onde, por definição, $M = 1$). Todos os escoamentos de linha de Fanno tendem para $M = 1$ e, desse modo, a integração cai entre uma seção onde o número de Mach é M e a seção onde as condições sônicas ocorrem (condições críticas). O número de Mach atingirá a unidade quando o comprimento máximo possível de duto for utilizado, conforme mostrado esquematicamente na Fig. 12.13.

A tarefa é realizar a integração

$$\int_M^1 \frac{(1-M^2)}{kM^4\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\,d(M^2) = \int_0^{L_{máx}} \frac{f}{D_h}\,dx \tag{12.20}$$

O lado esquerdo pode ser integrado por partes. No lado direito, o fator de atrito, f, pode variar com x, pois o número de Reynolds variará ao longo do duto. Note, entretanto, que, como ρV é constante ao longo do duto (da continuidade), a variação no número de Reynolds é causada unicamente por variações na viscosidade do fluido.

Para um fator de atrito médio, $\bar{f}$, definido sobre o comprimento do duto por

$$\bar{f} = \frac{1}{L_{máx}}\int_0^{L_{máx}} f\,dx$$

a integração da Eq. 12.20 conduz a

$$\frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\right] = \frac{\bar{f}\,L_{máx}}{D_h} \tag{12.21a}$$

A Eq. 12.21a dá o máximo $\bar{f}L/D_h$ correspondente a qualquer número de Mach inicial.

Como $\bar{f}L_{máx}/D_h$ é uma função de M, o comprimento do duto, L, necessário para que o número de Mach mude de M_1 para M_2 (conforme ilustrado na Fig. 12.13) pode ser obtido a partir de

$$\frac{\bar{f}L}{D_h} = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_{M_1} - \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_{M_2}$$

As condições críticas são condições de referência apropriadas para se usar no desenvolvimento de funções de escoamento de razões de propriedades em termos do número de Mach local. Assim, por exemplo, posto que T_0 é constante, podemos escrever

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T/T_0}{T^*/T_0} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{12.21b}$$

De modo análogo,

$$\frac{V}{V^*} = \frac{M\sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}} = \left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2}$$

Da continuidade, $V/V^* = \rho/\rho^*$, então

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21c}$$

Da equação de estado de gás ideal,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*}\frac{T}{T^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21d}$$

A razão entre a pressão de estagnação local e a pressão de estagnação de referência é dada por

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}\frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2}\frac{1}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k/(k-1)}}$$

ou

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.21e}$$

As Eqs. 12.21 formam um conjunto completo para análise do escoamento de um gás ideal em um duto com atrito, que utilizamos usualmente no lugar das (ou em adição às) equações básicas, Eqs. 12.11. Por conveniência, listamos essas equações juntas:

$$\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\right] \tag{12.21a}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{12.21b}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21c}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21d}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.21e}$$

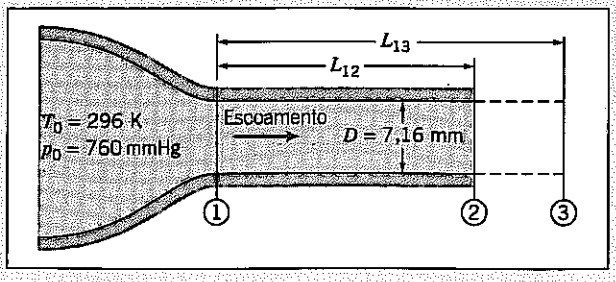
As Eqs. 12.21, as relações de linha de Fanno, fornecem relações de propriedades em termos do número de Mach local e das condições críticas. Elas são, obviamente, bastante complicadas algebricamente, mas, diferentemente das Eqs. 12.11, não são acopladas. É uma boa idéia programar essas equações em sua calculadora. Elas são, também, muito fáceis de definir em planilhas de cálculo computacional como as do *Excel*. É importante lembrar que, conforme demonstrado na Fig. 11.3, as propriedades em um estado, em qualquer processo de escoamento, podem ser relacionadas com as propriedades do estado de estagnação isoentrópica por meio da utilização das Eqs. 11.20. O Apêndice E-2 lista funções de escoamento de linha de Fanno em termos de M, para um gás ideal, para as razões de propriedades p_0/p_0^*, T/T^*, p/p^*, ρ/ρ^*, (V^*/V) e para $\bar{f}L_{máx}/D_h$. Uma tabela de valores, bem como um gráfico destas razões de propriedades, é apresentada para o ar ($k = 1{,}4$), para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha *Excel* associada, *Relações de Linha de Fanno*, pode ser usada para gerar uma tabela maior de valores para o ar e para outros gases ideais.

EXEMPLO 12.7 Escoamento Adiabático com Atrito em um Duto de Área Constante: Solução Usando as Funções de Escoamento de Linha de Fanno

Escoamento de ar é induzido, por meio de uma bomba de vácuo, para dentro de um tubo liso com 7,16 mm de diâmetro interno, termicamente isolado. O ar é extraído de uma ambiente, onde $p_0 = 760$ mmHg (abs) e $T_0 = 23°C$, através de um bocal convergente de contorno suave e liso. Na seção ①, onde o bocal se une ao tubo de área constante, a pressão estática é –18,9 mmHg (manométrica). Na seção ②, localizada a uma certa distância a jusante no tubo de seção transversal constante, a pressão estática é – 412 mmHg (manométrica). As paredes do duto são lisas; considere que o valor do fator de atrito médio, $\bar{f}$, é aquele da seção ①. Determine o comprimento de duto, a partir da seção ①, requerido para causar o bloqueio, o número de Mach na seção ②, e o comprimento do duto, L_{12}, entre as seções ① e ②. Esboce o processo em um diagrama *Ts*.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.7

DADOS: Escoamento de ar (com atrito) em um duto circular de área constante, termicamente isolado.



Pressões manométricas: $p_1 = -18{,}9$ mmHg e $p_2 = -412$ mmHg. $M_3 = 1{,}0$.

DETERMINAR: (a) L_{13}. (b) M_2. (c) L_{12}. (d) Esboce o diagrama Ts.

SOLUÇÃO:

O escoamento no tubo de área constante é adiabático e com atrito, um escoamento de linha de Fanno. Para determinar o fator de atrito, precisamos conhecer as condições do escoamento na seção ①. Se admitirmos que o escoamento no bocal é isoentrópico, as propriedades locais na saída do bocal podem ser calculadas usando as relações isoentrópicas. Desse modo,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_1, obtemos

$$M_1 = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{0{,}4}\left[\left(\frac{760}{760-18{,}9}\right)^{0.286} - 1\right]\right\}^{1/2} = 0{,}190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{296\,\text{K}}{1 + 0{,}2(0{,}190)^2} = 294\,\text{K}$$

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1\sqrt{kRT_1} = 0{,}190\left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 294\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 65{,}3\,\text{m/s}$$

Usando a massa específica do mercúrio à temperatura da sala (23°C),

$$p_1 = g\rho_{\text{Hg}}h_1 = g\,\text{SG}\,\rho_{\text{H}_2\text{O}}h_1$$

$$= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 13{,}5 \times 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (760 - 18{,}9)10^{-3}\,\text{m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_1 = 98{,}1\,\text{kPa (abs)}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9{,}81 \times 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\,\text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{294\,\text{K}} = 1{,}16\,\text{kg/m}^3$$

Para $T = 294$ K (21°C), $\mu = 1{,}82 \times 10^{-5}$ kg/(m · s) da Tabela A.10, Apêndice A. Logo,

$$Re_1 = \frac{\rho_1 V_1 D_1}{\mu_1} = 1{,}16\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 65{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}00716\,\text{m} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}82 \times 10^{-5}\,\text{kg}} = 2{,}98 \times 10^4$$

Da Eq. 8.37 (escoamento turbulento), para tubo liso, $f = 0{,}0235$.

Do Apêndice E-2, para $M_1 = 0{,}190$, $p/p^* = 5{,}745$ (Eq. 12.21d), e $\bar{f}L_{\text{máx}}/D_h = 16{,}38$ (Eq. 12.21a). Assim, considerando $\bar{f} = f_1$,

$$L_{13} = (L_{\text{máx}})_1 = \left(\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h}\right)_1 \frac{D_h}{f_1} = 16{,}38 \times \frac{0{,}00716\,\text{m}}{0{,}0235} = 4{,}99\,\text{m} \longleftarrow L_{13}$$

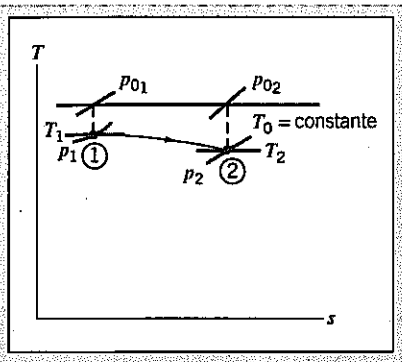
Uma vez que p^* é constante para todos os estados sobre uma mesma linha de Fanno, as condições na seção ② podem ser determinadas a partir da razão de pressões, $(p/p^*)_2$. Assim,

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_2 = \frac{p_2}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p}{p^*}\right)_1 = \left(\frac{760-412}{760-18{,}9}\right)5{,}745 = 2{,}698$$

onde a Eq. 12.21d foi usada para obter o valor de p/p^* na seção ①. Para $p/p^* = 2{,}698$ na seção ②, a Eq. 12.21d resulta em $M_2 = 0{,}400$ (após obter um valor inicial aproximado no gráfico do Apêndice E-2 e iterar).

$$M_2 = 0{,}400 \longleftarrow M_2$$

O diagrama Ts para esse escoamento é



Para $M_2 = 0{,}400$, $\bar{f}L_{máx}/D_h = 2{,}309$ (Eq. 12.21a, Apêndice E-2). Logo,

$$L_{23} = (L_{máx})_2 = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_2 \frac{D_h}{f_1} = 2{,}309 \times \frac{0{,}00716\ \text{m}}{0{,}0235} = 0{,}704\ \text{m}$$

Finalmente,

$$L_{12} = L_{13} - L_{23} = (4{,}99 - 0{,}704)\ \text{m} = 4{,}29\ \text{m} \longleftarrow L_{12}$$

Este problema ilustra o uso das equações de linha de Fanno, Eqs. 12.21.

✓ Essas equações dão o mesmo resultado que as equações básicas, Eqs. 12.11, como pode ser visto comparando, por exemplo, o valor de M_2 obtido neste Problema-Exemplo e no Problema-Exemplo 12.6.

✓ Os cálculos podem ser muito trabalhosos sem o uso de relações de linha de Fanno pré-programadas.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos, usando ou as relações de linha de Fanno ou as equações básicas.

Escoamento Isotérmico

O escoamento de gás em dutos longos e de área constante, tais como as tubulações de gás natural, é essencialmente isotérmico. Os números de Mach em tais escoamentos são geralmente baixos, porém variações significativas de pressão podem ocorrer como resultado de efeitos do atrito agindo sobre dutos de grandes comprimentos. Por isso, tais escoamentos não podem ser tratados como incompressíveis. A hipótese de escoamento isotérmico é muito mais apropriada.

Para escoamento isotérmico com atrito (como oposto ao escoamento adiabático com atrito que discutimos anteriormente), a transferência de calor $\delta Q/dm$ não é zero. Por outro lado, temos a simplificação de que a temperatura é constante em todo lugar. Assim como para o escoamento adiabático, podemos começar com o nosso conjunto de equações básicas (Eqs. 12.1), descrevendo um escoamento unidimensional afetado por variação de área, atrito, transferência de calor e choque normal,

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{12.1a}$$

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.1b}$$

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12.1c}$$

BIBLIOTECA - FACULDADE PITÁGORAS

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.1d}$$

$$p = \rho RT \tag{12.1e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \tag{12.1f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.1g}$$

Podemos simplificar estas equações fazendo $\Delta T = 0$, de forma que $T_1 = T_2$, e $A_2 = A_1 = A$. Além disso, lembramos da Seção 12-1 que a combinação $h + V^2/2$ é a *entalpia de estagnação*, h_0. Utilizando isso, o nosso conjunto final de equações (renumerado por conveniência) é

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \rho V \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} = \text{constante} \tag{12.22a}$$

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.22b}$$

$$q = \frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \tag{12.22c}$$

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.22d}$$

$$p = \rho RT \tag{12.22e}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.22f}$$

As Eqs. 12.22 podem ser utilizadas para analisar um escoamento isotérmico com atrito em um canal de área constante. Por exemplo, se as condições na seção ① (i. e., p_1, ρ_1, T_1, s_1, h_1 e V_1) são conhecidas, podemos usar essas equações para determinar as condições em uma nova seção ②, após o fluido ter experimentado uma força total de atrito, R_x. Temos cinco equações (não incluindo a restrição da Eq. 12.22d) e cinco incógnitas (p_2, ρ_2, s_2, V_2 e a transferência de calor q necessária para manter a condição de temperatura constante). Conforme vimos anteriormente, na prática esse procedimento é muito trabalhoso — mais uma vez temos para resolver um conjunto de equações algébricas não-lineares acopladas.

Antes de fazermos qualquer cálculo, podemos verificar que o diagrama *Ts* para esse processo será simplesmente uma linha horizontal passando através do estado ①. Para ver em detalhes o que acontece com o escoamento, em adição às Eqs. 12.22, podemos desenvolver relações de propriedades em termos do número de Mach. Para escoamento isotérmico, c = constante, de modo que $V_2/V_1 = M_2/M_1$, e da Eq. 12.22a temos

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

Combinando com a equação para um gás ideal, Eq. 12.22e, obtemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \tag{12.23}$$

Para cada estado, podemos relacionar a temperatura local com a temperatura de estagnação correspondente usando a Eq. 11.20b,

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \tag{11.20b}$$

Aplicando isto aos estados ① e ②, mais o fato de que $T_1 = T_2$, resulta

$$\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \tag{12.24}$$

Para determinar a variação no número de Mach ao longo do comprimento do duto, é necessário considerar a equação diferencial da quantidade de movimento para escoamento com atrito. A análise levando a Eq. 12.18 é válida para escoamento isotérmico. Posto que T = constante para escoamento isotérmico, segue, da Eq. 12.18 com $dT = 0$, que

$$\frac{f}{D_h} \frac{kM^2}{2} dx = \left(\frac{1 - kM^2}{2}\right) \frac{d(M^2)}{M^2}$$

e

$$\frac{f}{D_h} dx = \frac{(1 - kM^2) d(M^2)}{kM^4} \tag{12.25}$$

A Eq. 12.25 mostra (fazendo $dx = 0$) que o número de Mach no qual o comprimento máximo $L_{máx}$ é atingido é $M = 1/\sqrt{k}$. Como T é constante, segue que o fator de atrito, $f = f(R_e)$, também é constante. A integração da Eq. 12.25 entre os limites de $M = M$ para $x = 0$ e $M = 1/\sqrt{k}$ para $x = L_{máx}$, onde $L_{máx}$ é a distância além da qual o escoamento não pode prosseguir, resulta em

$$\frac{f L_{máx}}{D_h} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln kM^2 \tag{12.26}$$

O comprimento de duto, L, necessário para que o número de Mach do escoamento varie de M_1 para M_2 pode ser obtido de

$$f \frac{L}{D_h} = f \frac{L_{máx_1} - L_{máx_2}}{D_h}$$

$$f \frac{L}{D_h} = \frac{1 - kM_1^2}{kM_1^2} - \frac{1 - kM_2^2}{kM_2^2} + \ln \frac{M_1^2}{M_2^2} \tag{12.27}$$

A distribuição da transferência de calor ao longo do duto requerida para manter o escoamento isotérmico pode ser determinada a partir da forma diferencial da Eq. 12.22c como

$$dq = dh_0 = c_p dT_0 = c_p d\left[T\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)\right]$$

ou, como T = constante,

$$dq = c_p T\left(\frac{k-1}{2}\right) dM^2 = \frac{c_p T_0 (k-1)}{2\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} dM^2$$

Substituindo dM^2 da Eq. 12.25,

$$dq = \frac{c_p T_0 (k-1) kM^4}{2\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)(1 - kM^2)} \frac{f}{D_h} dx \tag{12.28}$$

Da Eq. 12.28 notamos que quando $M \to 1/\sqrt{k}$, $dq/dx \to \infty$. Portanto, uma taxa infinita de transferência de calor é requerida para manter o escoamento isotérmico quando o número de Mach se aproxima do valor limite. Desse modo, concluímos que a aceleração isotérmica do escoamento em um duto de área constante somente é possível fisicamente para escoamentos com baixos números de Mach.

Resumimos o conjunto de equações baseadas no número de Mach (Eqs. 12.23, 12.24 e 12.27, respectivamente renumeradas) que podemos usar para análise de escoamento isotérmico de um gás ideal em um duto com atrito:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \tag{12.29a}$$

$$\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \tag{12.29b}$$

$$\frac{fL}{D_h} = \frac{1 - kM_1^2}{kM_1^2} - \frac{1 - kM_2^2}{kM_2^2} + \ln \frac{M_1^2}{M_2^2} \tag{12.29c}$$

12-4 ESCOAMENTO SEM ATRITO EM UM DUTO DE ÁREA CONSTANTE, COM TROCA DE CALOR

Para explorar os efeitos da troca de calor em um escoamento compressível, aplicamos as equações básicas ao escoamento unidimensional, permanente, sem atrito, de um gás ideal com calores específicos constantes, através do volume de controle finito mostrado na Fig. 12.14.

Como na Seção 12-2 (somente efeitos de variação de área) e na Seção 12-3 (somente efeitos do atrito), o nosso ponto de partida na análise de escoamentos sem atrito com transferência de calor é o conjunto de equações básicas (Eqs. 12.1), descrevendo um movimento unidimensional afetado por diversos fenômenos: variação de área, atrito, transferência de calor e choques normais. Essas equações são:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{12.1a}$$

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.1b}$$

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12.1c}$$

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.1d}$$

$$p = \rho R T \tag{12.1e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1) \tag{12.1f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.1g}$$

Relembramos que a Eq. 12.1a é a *continuidade*, a Eq. 12.1b é a *equação da quantidade de movimento*, a Eq. 12.1c é uma *equação de energia*, a Eq. 12.1d é a *segunda lei da termodinâmica*, e as Eqs. 12.1e, 12.1f, 12.1g são *relações de propriedades* úteis para um gás ideal com calores específicos constantes.

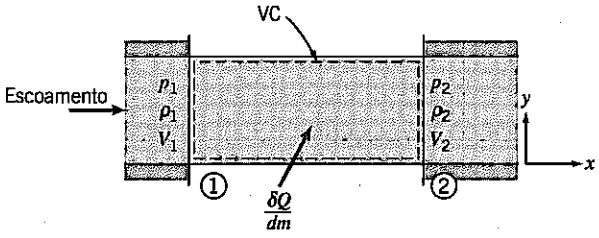


Fig. 12.14 Volume de controle usado na análise integral de escoamento sem atrito, com troca de calor.

Equações Básicas para Escoamento com Troca de Calor

Simplificamos as Eqs. 12.1 utilizando os fatos de que $A_1 = A_2 = A$ e que $R_x = 0$. Em adição, temos a relação $h_0 = h + V^2/2$. As Eqs. 12.1 para esse escoamento tornam-se

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \rho V A \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} = \text{constante} \tag{12.30a}$$

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.30b}$$

$$\frac{\delta Q}{dm} = \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = h_{0_2} - h_{0_1} \tag{12.30c}$$

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.30d}$$

$$p = \rho R T \tag{12.30e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1) \tag{12.30f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.30g}$$

Note que a Eq. 12.30c indica que a transferência de calor muda a energia total (cinética mais interna) do escoamento. A Eq. 12.30d não é muito útil aqui. A desigualdade ou a igualdade aplica-se de acordo com a natureza da troca de calor, porém *não* podemos concluir que, em qualquer evento, a entropia necessariamente aumenta nesse escoamento. Por exemplo, para um resfriamento gradual ela diminuirá!

As Eqs. 12.30 podem ser usadas para analisar um escoamento sem atrito em um canal de área constante, com transferência de calor. Por exemplo, se conhecermos as condições na seção ① (i. e., p_1, ρ_1, s_1, h_1 e V_1), podemos usar essas equações para encontrar as condições em uma nova seção ②, após o fluido ter experimentado a transferência de calor total $\delta Q/dm$. Para uma dada transferência de calor, temos seis equações (não incluindo a restrição da Eq. 12.30d) e seis incógnitas (p_2, ρ_2, s_2, h_2 e V_2). É o efeito da transferência de calor que causa variação nas propriedades do fluido ao longo do tubo. Na prática, conforme vimos para outros escoamentos, esse procedimento é inviável — temos novamente um conjunto de equações algébricas acopladas para resolver. Usaremos as Eq. 12.30 no Problema-Exemplo 12.8. Também vamos desenvolver algumas relações baseadas no número de Mach para suplementar ou substituir as equações básicas, e mostraremos como usá-las no Problema-Exemplo 12.9.

A Linha de Rayleigh

Se utilizarmos as Eqs. 12.30 para calcular os valores das propriedades para um dado processo de escoamento, com uma taxa de transferência de calor prescrita, obteremos uma curva como aquela mostrada qualitativamente no plano *Ts* na Fig. 12.15. O lugar geométrico de todos os estados possíveis a jusante no escoamento é chamado *linha de Rayleigh*. Os cálculos mostram algumas características interessantes do escoamento de linha de Rayleigh. No ponto de temperatura máxima (ponto *a* na Fig. 12.15), o número de Mach para um gás ideal é $1/\sqrt{k}$. No ponto de entropia máxima (ponto *b* na Fig. 12.15), $M = 1$. No ramo superior da curva, o número de Mach é sempre menor que a unidade, e ele aumenta monotonamente à medida que prosseguimos para a direita ao longo da curva. Em cada ponto sobre a porção inferior da curva, o número de Mach é maior do que a unidade, e ele decresce monotonamente à medida que prosseguimos para a direita ao longo da curva. A despeito do número de Mach inicial, com adição de calor, o estado do escoamento prossegue para a direita e, com rejeição de calor, o estado do escoamento prossegue para a esquerda ao longo da linha de Rayleigh.

Para qualquer estado inicial em um escoamento de linha de Rayleigh, qualquer ponto sobre a linha de Rayleigh representa um estado a jusante matematicamente possível. Embora a linha de Rayleigh represente todos os estados a jusante matematicamente possíveis, serão eles fisicamente alcançáveis?

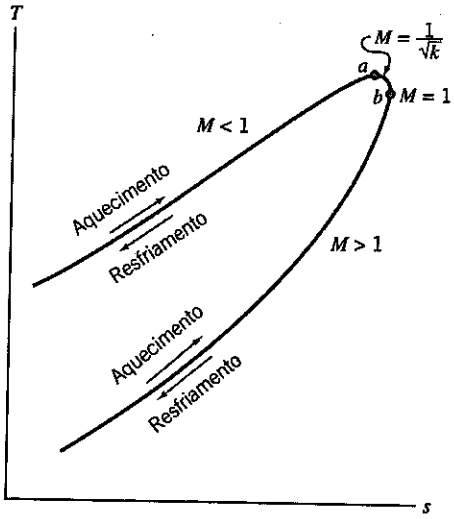


Fig. 12.15 Diagrama esquemático *Ts* para escoamento sem atrito em um duto de área constante, com troca de calor (escoamento de linha de Rayleigh).

Um momento de reflexão e concluímos que sim. Visto que estamos considerando um escoamento com troca de calor, a segunda lei (Eq. 12.30d) não impõe qualquer restrição quanto ao sinal da variação de entropia.

Os efeitos da troca de calor sobre as propriedades em um escoamento compressível, permanente, sem atrito, de um gás ideal, estão resumidos na Tabela 12.2; a base de cada tendência indicada é discutida nos próximos parágrafos.

O sentido de variação da entropia é sempre determinado pela troca de calor; a entropia aumenta com o aquecimento e diminui com o resfriamento. Similarmente, a primeira lei, Eq. 12.30c, mostra que o aquecimento aumenta a entalpia de estagnação e o resfriamento a diminui; como $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$, o efeito sobre a temperatura de estagnação é o mesmo.

Tabela 12.2 Resumo dos Efeitos de Troca de Calor sobre Propriedades do Fluido

	Aquecimento		Resfriamento		
Propriedade	$M < 1$	$M > 1$	$M < 1$	$M > 1$	**Obtido de:**
Entropia, s	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui	Equação $T\,ds$
Temperatura de estagnação, T_0	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui	Primeira lei, e $\Delta h_0 = c_p\,\Delta T_0$
Temperatura, T	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Aumenta	Aumenta	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Diminui	Diminui	Forma de linha de Rayleigh
	$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Diminui		$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Aumenta		
Número de Mach, M	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta	Tendência de linha de Rayleigh
Pressão, p	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui	Tendência de linha de Rayleigh
Velocidade, V	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta	Equação da quantidade de movimento, e efeito sobre p
Massa específica, ρ	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui	Equação da continuidade, e efeito sobre V
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diminui	Aumenta	Aumenta	Fig. 12.16

O efeito do aquecimento e do resfriamento sobre a temperatura pode ser deduzido a partir da forma da linha de Rayleigh na Fig. 12.15. Vemos que, exceto para a região em que $1/\sqrt{k} < M < 1$ (para o ar, $1/\sqrt{k} \approx 0{,}85$), o aquecimento causa um aumento em T e o resfriamento uma diminuição em T. Contudo, verificamos, também, o resultado inesperado que, para $1/\sqrt{k} < M < 1$, a *adição de calor* causa um *decréscimo* na temperatura da corrente, e a *rejeição de calor* causa um *aumento* na temperatura da corrente!

Para escoamento subsônico, o número de Mach aumenta monotonamente com o aquecimento até que $M = 1$ seja atingido. Para condições de entrada dadas, todos os estados possíveis a jusante situam-se em uma única linha de Rayleigh. Por conseguinte, o ponto $M = 1$ determina a máxima adição de calor possível sem bloqueio. Se o escoamento for inicialmente supersônico, o aquecimento reduzirá o número de Mach. Novamente, a máxima adição de calor possível, sem bloqueio, é aquela que reduz o número de Mach para $M = 1{,}0$.

O efeito da troca de calor sobre a pressão estática é obtido a partir das formas da linha de Rayleigh e das linhas de pressão constante sobre o plano Ts (veja Fig. 12.16). Para $M < 1$, a pressão cai com o aquecimento, e para $M > 1$, a pressão aumenta, conforme mostrado pelas formas das linhas de pressão constante. Uma vez determinada a variação de pressão, o efeito sobre a velocidade pode ser encontrado a partir da equação da quantidade de movimento,

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \tag{12.30b}$$

ou

$$p + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)V = \text{constante}$$

Assim, posto que $\dot{m}/A$ é uma constante positiva, as tendências de p e de V devem ser opostas. Da equação da continuidade, Eq. 12.30a, a tendência de ρ é oposta àquela de V.

A pressão de estagnação isoentrópica local sempre diminui com o aquecimento. Isto é ilustrado esquematicamente na Fig. 12.16. Uma redução na pressão de estagnação tem implicações práticas óbvias para processos de aquecimento, tais como câmaras de combustão. A adição de uma mesma quantidade de energia por unidade de massa (mesma variação em T_0) causa uma variação maior em p_0 para o escoamento supersônico; como o aquecimento ocorre a uma temperatura mais baixa no escoamento supersônico, o aumento de entropia é maior.

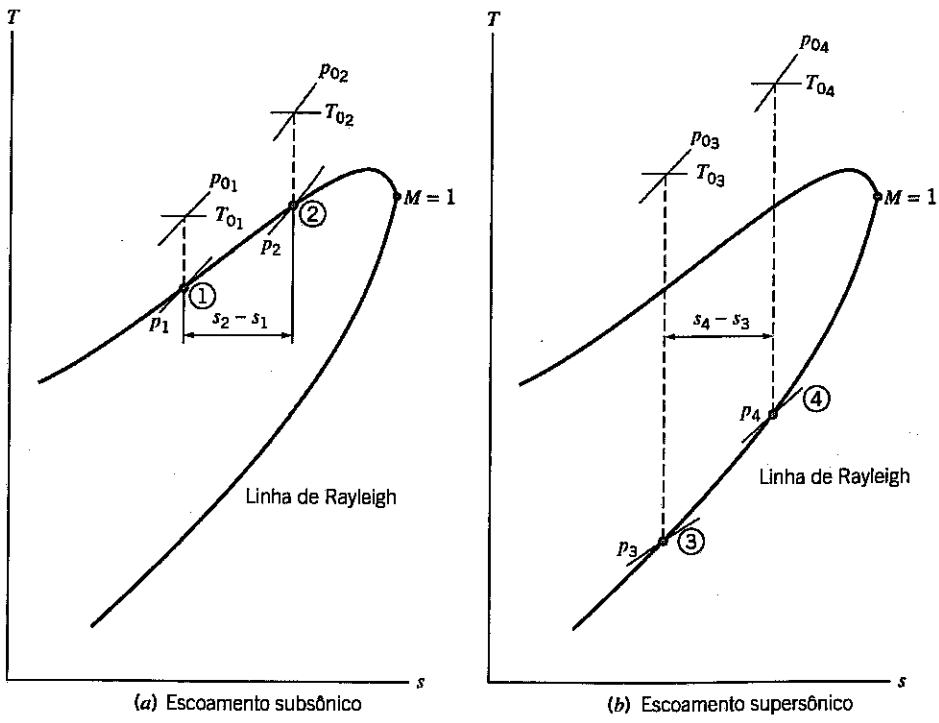


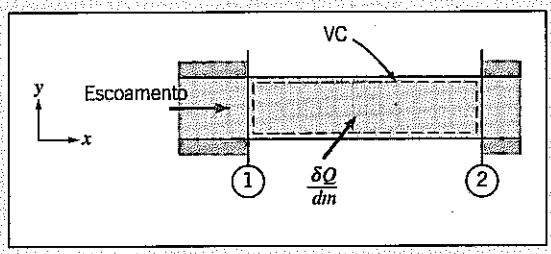
Fig. 12.16 Redução na pressão de estagnação devido à adição de calor para dois casos de escoamento.

EXEMPLO 12.8 Escoamento sem Atrito em um Duto de Área Constante, com Adição de Calor

Ar escoa com atrito desprezível através de um duto de área $A = 0{,}25\ \text{ft}^2$. Na seção ①, as propriedades do escoamento são $T_1 = 600°\text{R}$, $p_1 = 20$ psia e $V_1 = 360$ ft/s. Na seção ②, $p_2 = 10$ psia. O escoamento é aquecido entre as seções ① e ②. Determine as propriedades na seção ②, a energia adicionada, e a variação de entropia. Finalmente, trace o processo em um diagrama *Ts*.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.8

DADOS: Escoamento sem atrito de ar no duto mostrado:
$T_1 = 600°\text{R}$
$p_1 = 20$ psia $\quad p_2 = 10$ psia
$V_1 = 360$ ft/s $\quad A_1 = A_2 = A = 0{,}25\ \text{ft}^2$



DETERMINAR: (a) Propriedades na seção ②.
(b) $\delta Q/dm$.
(c) $s_2 - s_1$.
(d) O diagrama *Ts*.

SOLUÇÃO:
A equação da quantidade de movimento (Eq. 12.30b) é

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \tag{12.30b}$$

ou

$$p_1 - p_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

Resolvendo para V_2, fornece

$$V_2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 V_1} + V_1$$

Para um gás ideal, Eq. 12.30e,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{20\ \text{lbf}}{\text{in}^2} \times \frac{144\ \text{in}^2}{\text{ft}^2} \times \frac{\text{lbm}\cdot°\text{R}}{53{,}3\ \text{ft}\cdot\text{lbf}} \times \frac{1}{600°\ \text{R}} = 0{,}0901\ \text{lbm/ft}^3$$

$$V_2 = (20 - 10)\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} \times \frac{144\ \text{in}^2}{\text{ft}^2} \times \frac{\text{ft}^3}{0{,}0901\ \text{lbm}} \times \frac{\text{s}}{360\ \text{ft}} \times \frac{32{,}2\ \text{lbm}}{\text{slug}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{ft}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2} + \frac{360\ \text{ft}}{\text{s}}$$

$$V_2 = 1790\ \text{ft/s} \longleftarrow V_2$$

Da continuidade, Eq. 12.30a, $G = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, logo

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}0901\ \text{lbm}}{\text{ft}^3}\left(\frac{360}{1790}\right) = 0{,}0181\ \text{lbm/ft}^3 \longleftarrow \rho_2$$

Resolvendo para T_2, obtemos

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R} = \frac{10\ \text{lbf}}{\text{in}^2} \times \frac{144\ \text{in}^2}{\text{ft}^2} \times \frac{\text{ft}^3}{0{,}0181\ \text{lbm}} \times \frac{\text{lbm}\cdot°\text{R}}{53{,}3\ \text{ft}\cdot\text{lbf}} = 1490°\text{R} \longleftarrow T_2$$

A temperatura de estagnação isoentrópica local é dada pela Eq. 11.20b,

$$T_{0_2} = T_2\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)$$

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = 1890 \text{ ft/s}; \qquad M_2 = \frac{V_2}{c_2} = \frac{1790}{1890} = 0{,}947$$

$$T_{0_2} = 1490°\text{R}[1 + 0{,}2(0{,}947)^2] = 1760°\text{R} \longleftarrow T_{0_2}$$

e

$$p_{0_2} = p_2\left(\frac{T_{0_2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = 10 \text{ psia}\left(\frac{1760}{1490}\right)^{3,5} = 17{,}9 \text{ psia} \longleftarrow p_{0_2}$$

A adição de calor é obtida a partir da equação de energia (Eq. 12.30c),

$$\frac{\delta Q}{dm} = \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = h_{0_2} - h_{0_1} \tag{12.30c}$$

ou

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

Já obtivemos T_{0_2}. Para T_{0_1}, temos

$$T_{0_1} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = 1200 \text{ ft/s}; \qquad M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{360}{1200} = 0{,}3$$

$$T_{0_1} = 600°\text{R}[1 + 0{,}2(0{,}3)^2] = 611°\text{R}$$

logo

$$\frac{\delta Q}{dm} = 0{,}240 \frac{\text{Btu}}{\text{lbm} \cdot °\text{R}}(1760 - 611)°\text{R} = 276 \text{ Btu/lbm} \longleftarrow \delta Q/dm$$

Para a variação de entropia (Eq. 12.30g),

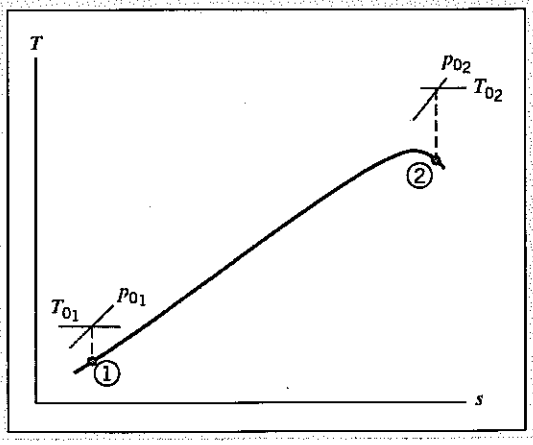
$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - (c_p - c_v)\ln\frac{p_2}{p_1} \tag{12.30g}$$

Então,

$$s_2 - s_1 = 0{,}240 \frac{\text{Btu}}{\text{lbm} \cdot °\text{R}} \times \ln\left(\frac{1490}{600}\right) - (0{,}240 - 0{,}171)\frac{\text{Btu}}{\text{lbm} \cdot °\text{R}} \times \ln\left(\frac{10}{20}\right)$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}266 \text{ Btu/(lbm} \cdot °\text{R)} \longleftarrow s_2 - s_1$$

O processo segue uma linha de Rayleigh:



Para completar nossa análise, examinemos a variação em p_0 comparando p_{0_2} com p_{0_1}.

$$p_{0_1} = p_1\left(\frac{T_{0_1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 20{,}0\text{ psia}\left(\frac{611}{600}\right)^{3{,}5} = 21{,}3\text{ psia} \longleftarrow p_{0_1}$$

Comparando, vemos que p_{0_2} é menor que p_{0_1}.

Este problema ilustra o uso das equações básicas, Eqs. 12.30, para analisar escoamento sem atrito de um gás ideal em um duto, sem troca de calor.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos.

Funções de Escoamento de Linha de Rayleigh para Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

As Eqs. 12.30 são as equações básicas para escoamento de linha de Rayleigh entre dois estados arbitrários ① e ② no escoamento. Para reduzir o trabalho na resolução de problemas, é conveniente deduzir funções de escoamento para razões de propriedades em termos do número de Mach local, assim como fizemos para o escoamento de linha de Fanno. O estado de referência é tomado novamente como a condição crítica em que $M = 1$; as propriedades na condição crítica são denotadas por (*).

As propriedades adimensionais (tais como p/p^* e T/T^*) podem ser obtidas escrevendo as equações básicas entre um ponto no escoamento no qual as propriedades são M, T, p etc., e o estado crítico ($M = 1$, com propriedades denotadas como T^*, p^* etc.).

A razão entre pressões, p/p^*, pode ser obtida da equação de quantidade de movimento, Eq. 12.30b,

$$pA - p^*A = \dot{m}V^* - \dot{m}V$$

ou

$$p + \rho V^2 = p^* + p^*V^{*2}$$

Substituindo $\rho = p/RT$ e colocando em evidência as pressões, resulta em

$$p\left[1 + \frac{V^2}{RT}\right] = p^*\left[1 + \frac{V^{*2}}{RT^*}\right]$$

Notando que $V^2/RT = k(V^2/kRT) = kM^2$, encontramos

$$p[1 + kM^2] = p^*[1 + k]$$

e, finalmente,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{12.31a}$$

Da equação de estado de gás ideal,

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*}\frac{\rho^*}{\rho}$$

Da equação da continuidade, Eq. 12.30a,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = M\frac{c}{c^*} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Em seguida, substituindo ρ^*/ρ, obtemos

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*} M \sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Elevando ao quadrado e substituindo da Eq. 12.30a, temos

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{p}{p^*} M\right]^2 = \left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \tag{12.31b}$$

Da continuidade, usando a Eq. 12.31b,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} \tag{12.31c}$$

A temperatura de estagnação adimensional, T_0/T_0^*, pode ser determinada de

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T_0^*} &= \frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*} \\ &= \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \frac{1}{\left(\frac{k+1}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1+kM^2)^2} \tag{12.31d}$$

De modo similar,

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{p_0^*} &= \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*} \\ &= \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\frac{1}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k/(k-1)}}\end{aligned}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/(k-1)} \tag{12.31e}$$

Por conveniência, apresentamos as equações em conjunto:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{12.31a}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \tag{12.31b}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} \tag{12.31c}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}{\left(1+kM^2\right)^2} \tag{12.31d}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/k-1} \tag{12.31e}$$

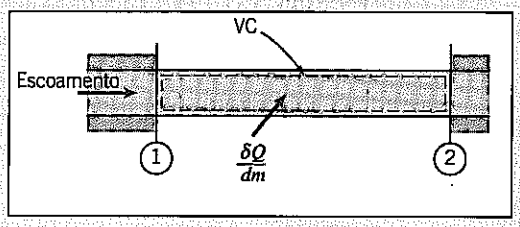
As Eqs. 12.31, as relações da linha de Rayleigh, fornecem razões de propriedades em termos do número de Mach local e das condições críticas. Obviamente, elas são complicadas, mas podem ser programadas em sua calculadora. Elas são, também, relativamente fáceis de definir em uma planilha computacional como a do *Excel*. No Problema-Exemplo 12.9, exploraremos o seu uso. O Apêndice E-3 lista funções de escoamento para razões de propriedades, T_0/T_0^*, p_0/p_0^*, T/T^*, p/p^*, e ρ^*/ρ (V/V^*), em termos de M para escoamento de linha de Rayleigh de um gás ideal. Uma tabela de valores, bem como um gráfico destas razões de propriedades, é apresentada para o ar ($k = 1{,}4$) para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha *Excel* associada, *Relações de Linha de Rayleigh*, pode ser usada para imprimir uma tabela maior de valores para o ar e para outros gases ideais.

EXEMPLO 12.9 Escoamento sem Atrito em um Duto de Área Constante, com Adição de Calor: Solução Usando Funções de Escoamento de Linha de Rayleigh

Ar escoa com atrito desprezível em um duto de área constante. Na seção ①, as propriedades são $T_1 = 60°C$, $p_1 = 135$ kPa (abs) e $V_1 = 732$ m/s. Calor é adicionado entre a seção ① e a seção ②, onde $M = 1{,}2$. Determine as propriedades na seção ②, a troca de calor por unidade de massa e a variação de entropia, e esboce o processo em um diagrama Ts.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.9

DADOS: Escoamento de ar, sem atrito, conforme mostrado:
$T_1 = 333$ K $\quad M_2 = 1{,}2$
$p_1 = 135$ kPa (abs)
$V_1 = 732$ m/s



DETERMINAR:
(a) Propriedades na seção ②.
(b) $\delta Q/dm$.
(c) $s_2 - s_1$.
(d) O diagrama Ts.

SOLUÇÃO:
Para obter as razões entre propriedades, precisamos de ambos os números de Mach.

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 333\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 366\,\text{m/s}$$

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = 732\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{366\,\text{m}} = 2{,}00$$

Das funções de escoamento de linha de Rayleigh do Apêndice E-3, encontramos o seguinte:

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
2,00	0,7934	1,503	0,5289	0,3636	1,455
1,20	0,9787	1,019	0,9119	0,7958	1,146

Usando estes dados e reconhecendo que as propriedades críticas são constantes, obtemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0{,}9119}{0{,}5289} = 1{,}72; \quad T_2 = 1{,}72T_1 = (1{,}72)333\text{ K} = 573\text{ K} \longleftarrow T_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = \frac{0{,}7958}{0{,}3636} = 2{,}19; \quad p_2 = 2{,}19p_1 = (2{,}19)135\text{ kPa}$$

$$p_2 = 296\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{1{,}146}{1{,}455} = 0{,}788; \quad V_2 = 0{,}788V_1 = (0{,}788)732\text{ m/s}$$

$$V_2 = 577\text{ m/s} \longleftarrow V_2$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2{,}96\times10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\text{ N}\cdot\text{m}}\times\frac{1}{573\text{ K}} = 1{,}80\text{ kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

A adição de calor pode ser determinada a partir da equação da energia, Eq. 12.30c, que reduz-se a (veja Problema-Exemplo 12.8)

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

Das funções de estagnação isoentrópica (Eq. 11.20b) para $M = 2{,}0$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_1}{T_{0_1}} = 0{,}5556; \qquad T_{0_1} = \frac{T_1}{0{,}5556} = \frac{333\text{ K}}{0{,}5556} = 599\text{ K}$$

e para $M = 1{,}2$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_2}{T_{0_2}} = 0{,}7764; \qquad T_{0_2} = \frac{T_2}{0{,}7764} = \frac{573\text{ K}}{0{,}7764} = 738\text{ K} \longleftarrow T_{0_2}$$

Substituindo, temos

$$\frac{\delta Q}{dm} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1}) = 1{,}00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times(738 - 599)\text{ K} = 139\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \delta Q/dm$$

Para a variação na entropia (Eq. 12.30g),

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= 1{,}00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times\ln\left(\frac{573}{333}\right) - 287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times\ln\left(\frac{2{,}96\times10^5}{1{,}35\times10^5}\right)\times\frac{\text{kJ}}{1000\text{ N}\cdot\text{m}}$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}317\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \longleftarrow s_2 - s_1$$

Finalmente, verifique o efeito sobre p_0. Da função de estagnação isoentrópica (Eq. 11.20a), para $M = 2{,}0$,

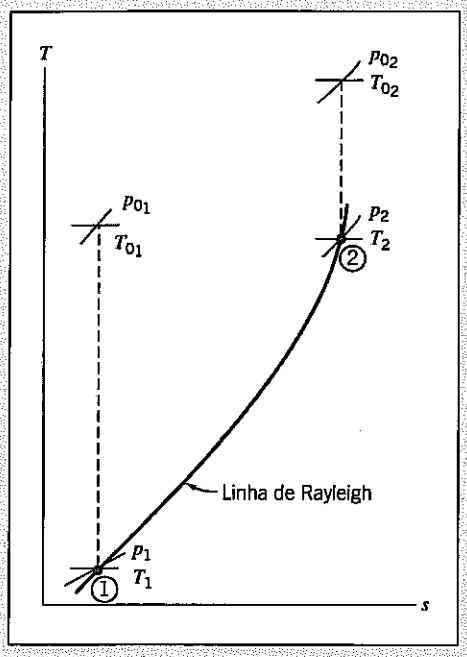
$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0{,}1278; \qquad p_{0_1} = \frac{p_1}{0{,}1278} = \frac{135\text{ kPa}}{0{,}1278} = 1{,}06\text{ MPa (abs)}$$

e para M = 1,2,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_2}{p_{0_2}} = 0{,}4124; \qquad p_{0_2} = \frac{p_2}{0{,}4124} = \frac{296\text{ kPa}}{0{,}4124} = 718\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

Assim, $p_{0_2} < p_{0_1}$, conforme esperado para um processo de aquecimento.

O processo segue o ramo supersônico de uma linha de Rayleigh:



Este problema ilustra o uso das equações de linha de Rayleigh, Eqs. 12.31, para analisar escoamento sem atrito de um gás ideal em um duto, com troca de calor.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos.

12-5 CHOQUES NORMAIS

Mencionamos anteriormente os choques normais na seção sobre escoamento em bocal. Na prática, essas descontinuidades irreversíveis podem ocorrer em qualquer campo do escoamento supersônico, tanto no escoamento interno quanto no escoamento externo.[1] O conhecimento das variações de propriedades através dos choques e do comportamento dos choques é importante para a compreensão do projeto de difusores supersônicos, por exemplo, para as tomadas de ar de aviões de alto desempenho, e de túneis de vento supersônicos. Isto posto, o propósito desta seção é analisar o processo de choque normal.

Antes de aplicar as equações básicas aos choques normais, é importante formar um quadro físico claro do choque em si. Embora seja fisicamente impossível ter descontinuidades nas propriedades dos fluidos, o choque normal é aproximadamente descontínuo. A espessura de um choque é cerca de 0,2 μm (10^{-5} polegada) ou, grosseiramente, quatro vezes o caminho livre médio das moléculas de gases [3]. Grandes variações na pressão, temperatura e em outras propriedades ocorrem através dessa pequena distância. As desacelerações locais do fluido atingem dezenas de milhões de *g*s! Essas considerações justificam tratar o choque normal como uma descontinuidade súbita; estamos mais interessados nas mudanças que ocorrem através do choque do que nos detalhes de sua estrutura.

Considere um pequeno volume de controle envolvendo um choque normal estabelecido numa passagem de forma arbitrária, conforme mostrado na Fig. 12.17. Neste momento, você pode estar cansado desse procedimento, mas, assim como para o escoamento isoentrópico com variação de área (Seção

[1] O filme da NCFMF *Channel Flow of a Compressible Fluid* mostra vários exemplos de formação de choque em escoamento interno.

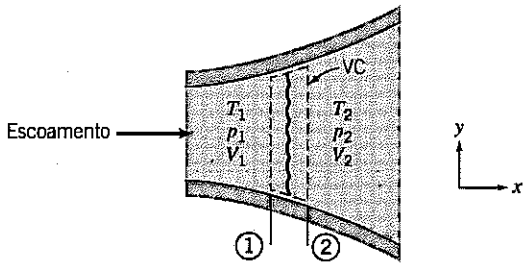


Fig. 12.17 Volume de controle usado na análise de choque normal.

12-2), o escoamento com atrito (Seção 12-3) e o escoamento com transferência de calor (Seção 12-4), o nosso ponto de partida na análise do choque normal é o conjunto de equações básicas (Eqs. 12.1), descrevendo um movimento unidimensional que pode ser afetado por diversos fenômenos: variação de área, atrito e transferência de calor. Essas equações são:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{12.1a}$$

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.1b}$$

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12.1c}$$

$$\dot{m}(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{12.1d}$$

$$p = \rho R T \tag{12.1e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1) \tag{12.1f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.1g}$$

Relembremos que a Eq. 12.1a é a *equação da continuidade*, a Eq. 12.1b é a *equação da quantidade de movimento*, a Eq. 12.1c é uma *equação de energia*, a Eq. 12.1d é a *segunda lei da termodinâmica* e as Eqs. 12.1e, 12.1f, e 12.1g são *relações de propriedades* úteis para um gás ideal com calores específicos constantes.

Devemos simplificar essas equações para um escoamento através de um choque normal.

Equações Básicas para um Choque Normal

Podemos agora simplificar as Eqs. 12.1 para escoamento de um gás ideal com calores específicos constantes através de um choque normal. O aspecto mais importante da simplificação é que a largura do volume de controle é infinitesimal (na realidade, cerca de 0,2 μm como já mencionado), então, $A_1 \approx A_2 \approx A$, a força devido às paredes $R_x \approx 0$ (porque a área da superfície da parede do volume de controle é infinitesimal) e a transferência de calor com as paredes $\delta Q/dm \approx 0$, pela mesma razão. Desse modo, para esse escoamento, nossas equações tornam-se

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{m}}{A} = \text{constante} \tag{12.32a}$$

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$$

ou, utilizando a Eq. 12.32a,

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{12.32b}$$

$$h_{0_1} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{0_2} \tag{12.32c}$$

$$s_2 > s_1 \tag{12.32d}$$

$$p = \rho RT \tag{12.32e}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \tag{12.32f}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{12.32g}$$

As Eqs. 12.32 podem ser usadas para analisar escoamento através de um choque normal. Por exemplo, se conhecermos as condições antes do choque, na seção ①, (i. e., p_1, ρ_1, T_1, s_1, h_1 e V_1), podemos utilizar essas equações para determinar as condições após o choque da seção ②. Temos seis equações (não incluindo a restrição da Eq. 12.32d) e seis incógnitas (p_2, ρ_2, T_2, s_2, h_2 e V_2). Portanto, para condições a montante dadas, existe um único estado singular a jusante. Na prática, esse procedimento é trabalhoso — conforme vimos em seções anteriores, temos um conjunto de equações algébricas não-lineares acopladas para resolver.

Podemos certamente usar essas equações para analisar choques normais, porém é mais útil, em geral, desenvolver funções para choques normais baseadas em M_1, o número de Mach a montante. Antes disso, vamos considerar o conjunto de equações. Temos afirmado repetidamente neste capítulo que variações em um escoamento unidimensional podem ser causadas por variação de área, atrito ou transferência de calor, porém, na dedução das Eqs. 12.32, eliminamos todas as três causas! Neste caso, portanto, o que está fazendo o escoamento mudar? Talvez não existam variações através de um choque normal! Na verdade, se examinarmos cada uma dessas equações, veremos que cada uma delas é satisfeita — tem uma "solução" possível — se todas as propriedades na posição ② forem iguais às propriedades correspondentes na posição ① (p. ex., $p_2 = p_1$, $T_2 = T_1$) *exceto* para a Eq. 12.32d, que expressa a segunda lei da termodinâmica. A natureza está nos dizendo que, na ausência de variação de área, atrito e transferência de calor, as propriedades do escoamento não variarão, *a não ser* de uma maneira muito abrupta, irreversível, em que a entropia aumenta. De fato, todas as propriedades, com exceção de T_0, *variam* através do choque. Devemos encontrar uma solução que satisfaça *todas* as Eqs. 12.32. (Incidentalmente, como todas as equações, exceto a Eq. 12.32d, são satisfeitas por $p_2 = p_1$, $T_2 = T_1$, e assim por diante, métodos numéricos de procura, tais como o *Resolvedor do Excel*, apresentam alguma dificuldade na determinação da solução correta!)

Um melhor entendimento das equações básicas para um choque normal, Eqs. 12.32, pode ser obtido relembrando nossa discussão de linha de Fanno (atrito) e de linha de Rayleigh (transferência de calor). Como todas as condições no estado ① são conhecidas, podemos localizar o estado ① em um diagrama *Ts*. Caso traçássemos uma curva de linha de Fanno através do estado ①, encontraríamos o lugar geométrico dos estados matemáticos que satisfazem as Eqs. 12.32a e 12.32c até 12.32g. (A linha de Fanno não satisfaz a Eq. 12.32b, que não considera força de atrito.) Traçando uma curva de linha de Rayleigh através do estado ① obtém-se o lugar geométrico dos estados matemáticos que satisfazem as Eqs. 12.32a, 12.32b e 12.32d até 12.32g. (A linha de Rayleigh não satisfaz a Eq. 12.32c, que não considera transferência de calor.) Essas curvas são mostradas na Fig. 12.18.

O choque normal deve satisfazer todas as sete equações, de 12.31a a 12.32g. Por conseguinte, para um dado estado ①, o estado final (estado ②) do choque normal deve situar-se sobre ambas as linhas, de Fanno e de Rayleigh, passando pelo estado ①. Desse modo, a interseção das duas linhas no estado ② representa as condições a jusante do choque correspondentes às condições a montante no estado ①. Na Fig. 12.18, o escoamento através do choque foi indicado como ocorrendo do estado ① para o estado ②. Esse é o único sentido possível para o processo de choque, conforme ditado pela segunda lei ($s_2 > s_1$).

Da Fig.12.18, notamos, também, que o escoamento através de um choque normal envolve uma mudança de velocidades supersônicas para subsônicas. Os choques normais só podem ocorrer em escoamentos que são inicialmente supersônicos.

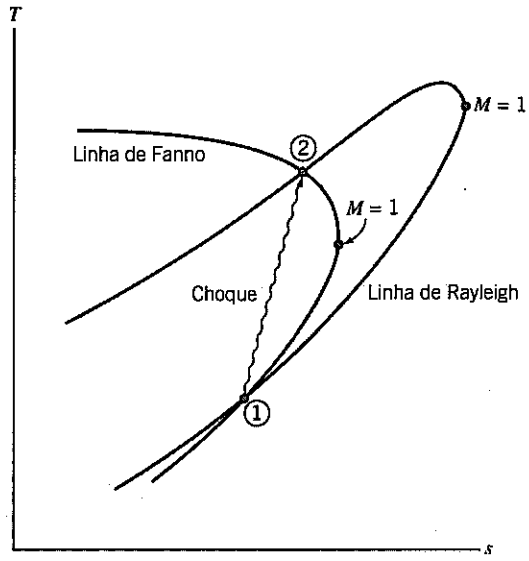


Fig. 12.18 Interseção de linha de Fanno e linha de Rayleigh como uma solução das equações de choque normal.

Para ajudar a resumir os efeitos de um choque normal sobre as propriedades do escoamento, um esquema do processo de choque normal é ilustrado no plano *Ts* da Fig. 12.19. Essa figura, juntamente com as equações básicas de governo, constitui a base para a Tabela 12.3. Você deve acompanhar a lógica indicada na tabela.

Note o paralelo entre choques normais (Tabela 12.3) e escoamento supersônico com atrito (Tabela 12.1). Ambos representam processos irreversíveis em escoamento supersônico, e todas as propriedades variam nos mesmos sentidos.

Funções de Escoamento de Choque Normal para Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

Mencionamos que as equações básicas, Eqs. 12.32, podem ser usadas para analisar escoamentos que experimentam um choque normal. Como nos escoamentos anteriores, é mais conveniente, em geral, utilizar as equações baseadas no número de Mach, neste caso baseadas no número de Mach inicial, M_1. Isso envolve três etapas: Primeiro, obtemos as razões de propriedades (p. ex., T_2/T_1 e p_2/p_1) em

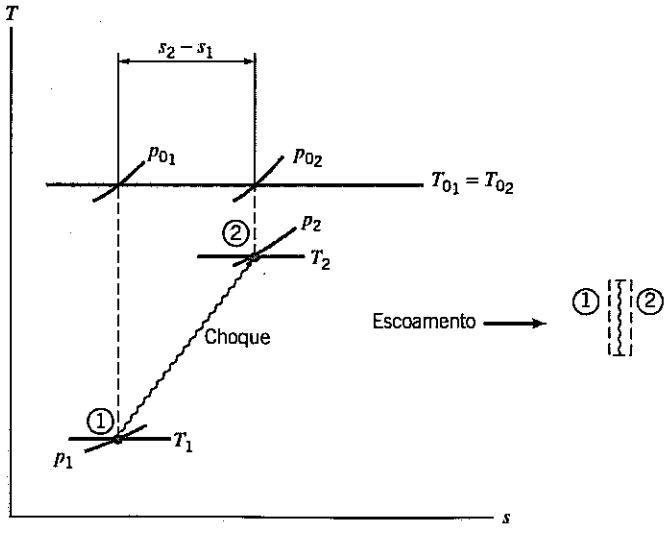


Fig. 12.19 Esquema do processo de choque normal no plano *Ts*.

Tabela 12.3 Resumo de Variações de Propriedades através de um Choque Normal

Propriedade	Efeito	Obtido de:
Temperatura de estagnação, T_0	Constante	Equação da energia
Entropia, s	Aumenta	Segunda lei
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diagrama Ts
Temperatura, T	Aumenta	Diagrama Ts
Velocidade, V	Diminui	Equação da energia, e efeito sobre T
Massa específica, ρ	Aumenta	Equação da continuidade, e efeito sobre V
Pressão p	Aumenta	Equação da quantidade de movimento, e efeito sobre V
Número de Mach, M	Diminui	$M = V/c$, e efeitos sobre V e T

termos de M_2 e M_1, em seguida desenvolvemos uma relação entre M_1 e M_2, e, finalmente, usamos esta relação para obter expressões para as razões de propriedades em termos do número de Mach a montante, M_1.

A razão de temperaturas pode ser expressa como

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{0_2}} \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} \frac{T_{0_1}}{T_1}$$

Visto que a temperatura de estagnação é constante através do choque, temos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \tag{12.33}$$

Uma razão de velocidades pode ser obtida usando

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{\sqrt{kRT_2}}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

ou

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right]^{1/2}$$

Uma razão de massas específicas pode ser obtida da equação da continuidade

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{12.32a}$$

de modo que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right]^{1/2} \tag{12.34}$$

Finalmente, temos a equação da quantidade de movimento,

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{12.32b}$$

Substituindo $\rho = p/RT$ e colocando as pressões em evidência, resulta em

$$p_1 \left[1 + \frac{V_1^2}{RT_1} \right] = p_2 \left[1 + \frac{V_2^2}{RT_2} \right]$$

Como

$$\frac{V^2}{RT} = k\frac{V^2}{kRT} = kM^2$$

então,

$$p_1\left[1 + kM_1^2\right] = p_2\left[1 + kM_2^2\right]$$

Finalmente,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \tag{12.35}$$

Para resolver para M_2 em termos de M_1, devemos obter uma outra expressão para uma das razões de propriedades dadas pelas Eqs. 12.33 a 12.35.

Da equação de estado de gás ideal, a razão de temperaturas pode ser escrita como

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2/\rho_2 R}{p_1/\rho_1 R} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Substituindo das Eqs. 12.34 e 12.35, resulta em

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right]\frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} \tag{12.36}$$

As Eqs. 12.33 e 12.36 são duas equações para T_2/T_1. Podemos combiná-las e resolver para M_2 em termos de M_1. Combinando e cancelando, obtemos

$$\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right]$$

Elevando ao quadrado, temos

$$\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1 + 2kM_1^2 + k^2M_1^4}{1 + 2kM_2^2 + k^2M_2^4}\right]$$

que pode ser resolvida explicitamente para M_2^2. Duas soluções são obtidas:

$$M_2^2 = M_1^2 \tag{12.37a}$$

e

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}M_1^2 - 1} \tag{12.37b}$$

Obviamente, a primeira delas é trivial. A segunda expressa a dependência singular de M_2 em relação a M_1.

Agora, tendo uma relação entre M_2 e M_1, podemos resolver para as razões de propriedades através de um choque. Conhecendo M_1, pode-se obter M_2 da Eq. 12.37b; as razões de propriedades podem ser determinadas subseqüentemente das Eqs. 12.33 a 12.35.

Uma vez que a temperatura de estagnação permanece constante, a razão de temperaturas de estagnação através do choque é a unidade. A razão de pressões de estagnação é avaliada como

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_{0_2}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)} \tag{12.38}$$

Combinando as Eqs. 12.35 e 12.37b, obtemos (após considerável álgebra)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.39}$$

Usando as Eqs. 12.37b e 12.39, verificamos que a Eq. 12.38 torna-se

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\frac{k+1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.40}$$

Após substituição para M_2^2 das Eqs. 12.37b nas Eqs. 12.33 e 12.34, resumimos o conjunto de equações baseadas no número de Mach (numeradas de novo por conveniência) para uso com um gás ideal passando através de um choque normal:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_1^2 - 1} \tag{12.41a}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\frac{k+1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.41b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\left(kM_1^2 - \frac{k-1}{2}\right)}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 M_1^2} \tag{12.41c}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.41d}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{k+1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} \tag{12.41e}$$

As Eqs. 12.41, embora bastante complexas algebricamente, fornecem relações de propriedades explícitas em termos do número de Mach inicial, M_1. Elas são tão úteis que algumas calculadoras têm algumas delas em suas bibliotecas internas (p. ex., as da série *HP 48G* [1]); é uma boa idéia programá-las em sua calculadora, caso você ainda não as tenha. Existem também páginas interativas da Internet que disponibilizam essas equações (veja, p. ex., [2]), sendo bem fáceis de definir em uma planilha computacional como a do *Excel*. O Apêndice E-4 lista funções de escoamento para M_2 e para as razões de propriedades p_{0_2}/p_{0_1}, T_2/T_1, p_2/p_1, e ρ_2/ρ_1 (V_1/V_2) em termos de M_1 para escoamento de um

gás ideal através de um choque normal. Uma tabela de valores, bem como um gráfico dessas razões de propriedades, é apresentada para o ar ($k = 1{,}4$) para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha associada do *Excel*, *Relações de Choque Normal*, pode ser usada para imprimir uma tabela maior para o ar e outros gases ideais.

Um problema envolvendo um choque normal encontra-se resolvido no Problema-Exemplo 12.10.

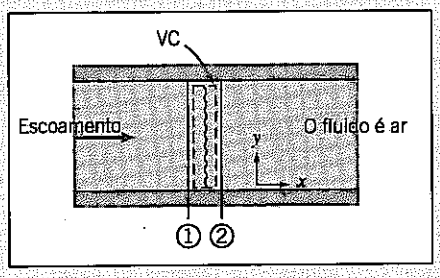
EXEMPLO 12.10 Choque Normal em um Duto

Um choque normal ocorre em um duto. O fluido é ar, que pode ser considerado um gás ideal. As propriedades a montante do choque são $T_1 = 5°C$, $p_1 = 65{,}0$ kPa (abs) e $V_1 = 668$ m/s. Determine as propriedades a jusante e $s_2 - s_1$. Esboce o processo em um diagrama *Ts*.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.10

DADOS: Choque normal em um duto, conforme mostrado:

$T_1 = 5°C$
$p_1 = 65{,}0$ kPa (abs)
$V_1 = 668$ m/s



DETERMINAR: (a) Propriedades na seção ②.
(b) $s_2 - s_1$.
(c) O diagrama *Ts*.

SOLUÇÃO:
Primeiro, calcule as propriedades restantes na seção ①. Para um gás ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 6{,}5\times10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}}\times\frac{1}{278\ \text{K}} = 0{,}815\ \text{kg/m}^3$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1{,}4\times287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times278\ \text{K}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 334\ \text{m/s}$$

Então,

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{668}{334} = 2{,}00, \text{ e (usando relações isoentrópicas de estagnação, Eqs. 11.20b e 11.20a)}$$

$$T_{0_1} = T_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 278\ \text{K}\left[1+0{,}2(2{,}0)^2\right] = 500\ \text{K}$$

$$p_{0_1} = p_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)} = 65{,}0\ \text{kPa}\left[1+0{,}2(2{,}0)^2\right]^{3{,}5} = 509\ \text{kPa (abs)}$$

A partir das funções de escoamento de choque normal, Eqs. 12.41 para $M_1 = 2{,}0$,

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	V_2/V_1
2,00	0,5774	0,7209	1,687	4,500	0,3750

Destes dados,

$$T_2 = 1{,}687T_1 = (1{,}687)278\ \text{K} = 469\ \text{K} \longleftarrow T_2$$

$$p_2 = 4{,}500p_1 = (4{,}500)65{,}0\ \text{kPa} = 293\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

$$V_2 = 0{,}3750V_1 = (0{,}3750)668\ \text{m/s} = 251\ \text{m/s} \longleftarrow V_2$$

Para um gás ideal,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2{,}93 \times 10^5 \ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287 \ \text{N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{469 \ \text{K}} = 2{,}18 \ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

A temperatura de estagnação é constante no escoamento adiabático. Portanto,

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 500 \ \text{K} \longleftarrow T_{0_2}$$

Usando as razões de propriedades para um choque normal, obtemos

$$p_{0_2} = p_{0_1} \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = 509 \ \text{kPa} \ (0{,}7209) = 367 \ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

Para a variação de entropia (Eq. 12.32g),

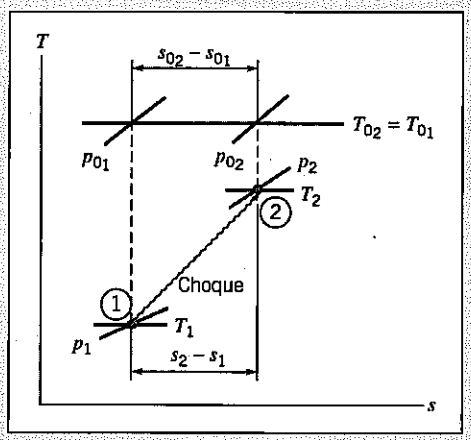
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Mas $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$, logo

$$s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1 = c_p \underbrace{\ln \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}}}_{=0} - R \ln \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = -0{,}287 \ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times \ln(0{,}7209)$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}0939 \ \text{kJ/(kg} \cdot \text{K)} \longleftarrow s_2 - s_1$$

O diagrama *Ts* é



Este problema ilustra o uso das relações de choque normal, Eqs. 12.41, para analisar escoamento de um gás ideal através de um choque normal.

A *planilha Excel* para este Problema-Exemplo é conveniente para realizar os cálculos.

12-6 ESCOAMENTO SUPERSÔNICO EM DUTOS, COM CHOQUE

A condição de ser um escoamento supersônico é necessária para que o choque normal ocorra. A possibilidade de ocorrência de um choque normal deve ser considerada em qualquer escoamento supersônico. Algumas vezes, um choque *deve* acontecer para atender uma condição de pressão a jusante; convém determinar se um choque ocorrerá e qual a sua localização quando ele ocorrer.

Na Seção 12-5, mostramos que a pressão de estagnação diminui notavelmente através de um choque: Quanto mais intenso for o choque, maior será o decréscimo na pressão de estagnação. É necessário controlar a posição do choque para obter desempenho aceitável de um difusor supersônico ou de um túnel de vento supersônico.

Nesta seção, o escoamento isoentrópico em um bocal convergente-divergente (Seção 12-2) é estendido para incluir choques. Tópicos adicionais (no CD) incluem operação de difusores e túneis de vento supersônicos, escoamentos com atrito e escoamentos com adição de calor.

Escoamento em um Bocal Convergente-Divergente

Tendo em vista que os choques normais já foram considerados, podemos agora completar nossa discussão, iniciada na Seção 12-2, sobre escoamento em um bocal convergente-divergente operando com contrapressões variáveis. A distribuição de pressão através do bocal, para diferentes contrapressões, é mostrada na Fig. 12.20.

Quatro regimes de escoamento são possíveis. No Regime I, o escoamento é totalmente subsônico. A vazão mássica aumenta com o decréscimo da contrapressão. Na condição (*iii*), que forma a linha divisória entre os Regimes I e II, o escoamento na garganta é sônico, $M_t = 1$.

À medida que a contrapressão é reduzida abaixo da condição (*iii*), um choque normal aparece a jusante da garganta, conforme mostrado pela condição (*vi*). Há um aumento de pressão através do choque. Como o escoamento é subsônico ($M < 1$) atrás do choque, ocorre uma desaceleração acompanhada de um aumento de pressão através do canal divergente. À medida que a contrapressão é reduzida ainda mais, o choque move-se para jusante até aparecer no plano de saída (condição *vii*). No Regime II, assim como no Regime I, o escoamento de saída é subsônico e, por conseguinte, $p_e = p_b$. Como as propriedades do escoamento na garganta são constantes para todas as condições no Regime II, a vazão mássica no Regime II não varia com a contrapressão.

No Regime III, conforme exemplificado pela condição (*viii*), a contrapressão é mais alta do que a pressão de saída, mas não o suficiente para sustentar um choque normal no plano de saída. O escoamento ajusta-se para a contrapressão através de uma série de choques de compressão oblíquos fora do bocal; esses choques oblíquos não podem ser tratados pela teoria unidimensional.

Conforme previamente assinalado na Seção 12-2, a condição (*iv*) representa a condição de projeto. No Regime IV, o escoamento ajusta-se para a contrapressão mais baixa através de uma série de ondas de expansão oblíquas fora do bocal; essas ondas de expansão oblíquas não podem ser tratadas pela teoria unidimensional.

O diagrama *Ts* para escoamento em um bocal convergente-divergente com um choque normal é mostrado na Fig. 12.21; o estado ① está localizado imediatamente a montante do choque e o estado ② imediatamente a jusante. O aumento de entropia através do choque move o escoamento subsônico a jusante para uma nova linha isoentrópica. A temperatura crítica é constante, de modo que p_2^* é menor

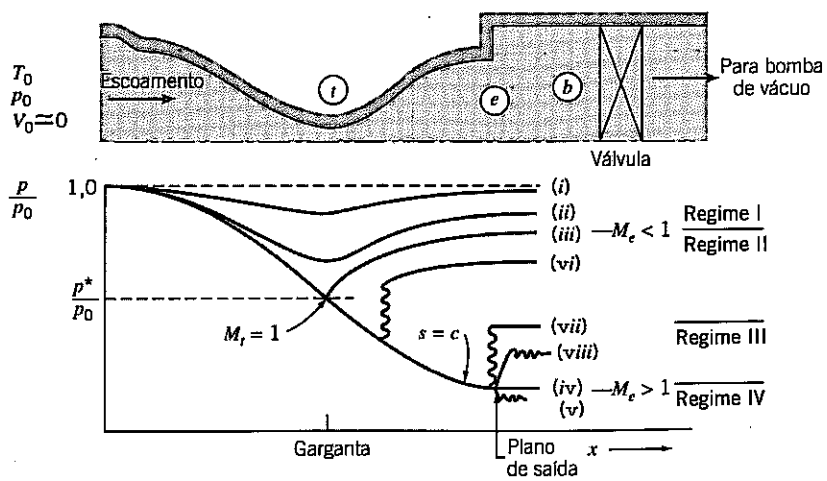


Fig. 12.20 Distribuições de pressão para escoamento em um bocal convergente-divergente para diferentes contrapressões.

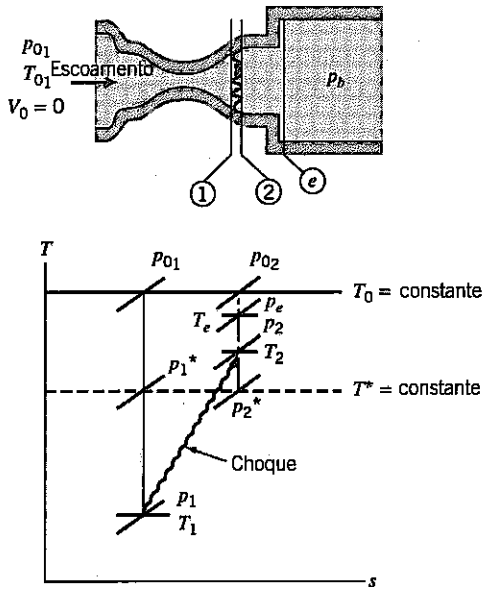


Fig. 12.21 Diagrama esquemático *Ts* para escoamento em um bocal convergente-divergente com um choque normal.

que p_1^*. Como $\rho^* = p^*/RT^*$, a massa específica crítica a jusante também é reduzida. Para transportar a mesma vazão em massa, o escoamento a jusante deve ter uma área crítica maior. Da continuidade (e da equação de estado), a razão de área crítica é o inverso da razão de pressão crítica, i. e., através de um choque, p^*A^* = constante.

Se o número de Mach (ou posição) do choque normal no bocal for conhecido, a pressão no plano de saída pode ser calculada diretamente. Na situação mais realista, a pressão no plano de saída é especificada, e a posição e intensidade do choque são desconhecidas. O escoamento subsônico a jusante deve deixar o bocal na contrapressão, de modo que $p_b = p_e$. Logo

$$\frac{p_b}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_2^*} \tag{12.42}$$

Porque o escoamento é isoentrópico do estado 2 (após o choque) ao plano da saída, $A_2^* = A_e^*$ e $p_{0_2} = p_{0_e}$. Assim, da Eq. 12.42, podemos escrever

$$\frac{p_e}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_2^*} = \frac{p_e}{p_{0_e}}\frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_e^*}$$

Rearranjando,

$$\frac{p_e}{p_{0_1}}\frac{A_e}{A_t} = \frac{p_e}{p_{0_e}}\frac{A_e}{A_e^*} \tag{12.43}$$

Na Eq. 12.43, o lado esquerdo possui quantidades conhecidas, e o lado direito é uma função somente do número de Mach na saída M_e. A razão de pressão é obtida a partir da relação de pressão de estagnação (Eq. 11.20a); a razão de área é obtida da relação de área isoentrópica (Eq. 12.7d). A determinação de M_e a partir da Eq. 12.43 normalmente requer iteração. (O problema 12.118 utiliza o método *Resolvedor do Excel* para realizar a iteração.) Conhecendo-se M_e, a magnitude e o local do choque normal podem ser determinados rearranjando a Eq. 12.43 (lembrando que $p_{0_2} = p_{0_e}$).

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_e^*} \tag{12.44}$$

Na Eq. 12.44, o lado direito é conhecido (a primeira razão de área é dada e a segunda é uma função apenas de M_e), e o lado esquerdo é uma função somente do número de Mach antes do choque, M_1

(Eq. 12.41b). Então, M_1, pode ser determinado. A área na qual esse choque ocorre pode, portanto, ser determinada a partir da relação de área isoentrópica (Eq. 12.7d, com $A^* = A_t$) para escoamento isoentrópico entre a garganta e o estado ①.

Difusor Supersônico

A análise dos efeitos de variação de área em um escoamento isoentrópico (Seção 12-2) mostrou que um canal convergente reduz a velocidade de uma corrente supersônica; um canal convergente é um *difusor supersônico*. Como a velocidade do escoamento decresce, a pressão aumenta na direção do escoamento, criando um gradiente adverso de pressão. O escoamento isoentrópico não é um modelo absolutamente preciso para um escoamento com gradiente adverso de pressão,[2] mas o modelo de escoamento isoentrópico com um choque normal pode ser usado para demonstrar as características básicas da difusão supersônica.

Para escoamento isoentrópico, um choque não pode permanecer em uma posição estável numa passagem convergente; um choque pode permanecer estável somente em uma passagem divergente. Escoamento real próximo de $M = 1$ é instável, de forma que não é possível reduzir um escoamento supersônico exatamente para velocidade sônica. O número de Mach mínimo que pode ser atingido na garganta é de 1,2 a 1,3.

Assim, em difusores supersônicos reais, o escoamento é desacelerado para $M \approx 1{,}3$ em uma passagem convergente. A jusante da seção de área mínima da garganta, é permitido ao escoamento acelerar para $M \approx 1{,}4$, onde ocorre um choque normal. Neste número de Mach, a perda de pressão de estagnação (da Eq. 12.41b) é de apenas 4% aproximadamente. Essa pequena perda é um compromisso aceitável em troca da estabilidade do escoamento.

A Fig. 12.22 mostra o processo idealizado de difusão supersônica, no qual o escoamento é isoentrópico exceto através de um choque normal. A ligeira redução na pressão de estagnação ocorre totalmente através do choque.

No escoamento real, perdas adicionais na pressão de estagnação ocorrem durante os processos de difusão subsônica e supersônica, antes e após o choque. Dados experimentais devem ser usados para predizer as perdas reais em difusores subsônicos e supersônicos [3,4].

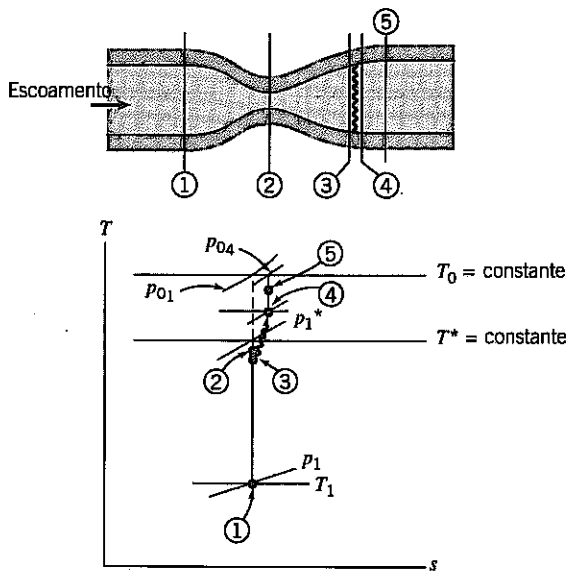
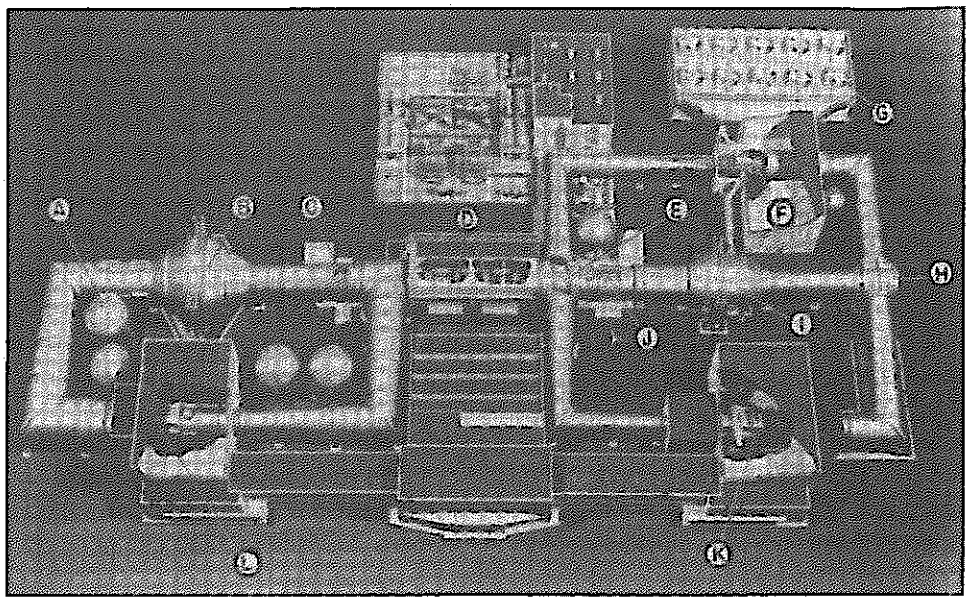


Fig. 12.22 Diagrama esquemático *Ts* para escoamento em um difusor supersônico com um choque normal.

[2] Camadas-limites desenvolvem-se rapidamente em gradientes adversos de pressão, de forma que os efeitos viscosos podem ser importantes ou mesmo dominantes. Na presença de camadas-limites delgadas, escoamentos supersônicos em difusores podem formar complicados sistemas de choques normais e oblíquos.



A. Esferas de Armazenamento de Ar Seco
B. Resfriador Posterior
C. Ventilador de Fluxo Axial de 3 Estágios
D. Motores de Acionamento
E. Válvula Direcional
F. Seção de Teste Supersônico de 8 por 7 pés
G. Torre de Resfriamento
H. Válvula Direcional
I. Resfriador Posterior
J. Compressor de Fluxo Axial de 11 Estágios
K. Seção de Teste Supersônico de 9 por 7 pés
L. Seção de Teste Transônico de 11 por 11 pés

Fig. 12.23 Vista esquemática do túnel de vento de alta velocidade da NASA-Ames, de circuito fechado, com instalações de apoio [9]. (Foto de cortesia da NASA.)

A difusão supersônica também é importante para aeronaves de alta velocidade, onde o escoamento da corrente livre externa supersônica deve ser eficientemente desacelerado para velocidade subsônica. Alguma difusão pode ocorrer fora da entrada por meio de um sistema de choque oblíquo fraco [5]. Geometria variável pode ser necessária para realizar difusão supersônica eficiente na entrada à medida que o número de Mach de vôo varia. Escoamentos multidimensionais compressíveis são discutidos na Seção 12-7, e tratados em detalhes em outros textos [6,7].

Operação de Túnel de Vento Supersônico

Para construir um túnel de vento supersônico eficiente, é necessário entender o comportamento de choque e controlar o local do choque. Os fenômenos físicos básicos são descritos por Coles no filme da NCFMF, *Channel Flow of a Compressible Fluid*. Além do *bloqueio* — escoamento sônico em uma garganta, com escoamento a montante independente das condições a jusante — Coles discute bloqueio e condições de partida para túneis de vento supersônicos.

Um túnel de vento supersônico de circuito fechado deve ter um bocal convergente-divergente para acelerar o escoamento até a velocidade supersônica, seguido de uma seção de teste de área aproximadamente constante e, em seguida, um difusor supersônico com uma segunda garganta. O circuito deve ser completado por máquinas de compressão, resfriadores e dispositivos de controle de vazão, conforme mostrado na Fig. 12.23 [9].

Considere o processo de aceleração de escoamento do repouso até velocidade supersônica na seção de teste. Logo após o escoamento na garganta do bocal tornar-se sônico, uma onda de choque forma-se na porção divergente. O choque atinge sua intensidade máxima quando ele alcança o plano de saída do bocal. Conseqüentemente, para *dar partida* no túnel e atingir escoamento supersônico permanente na seção de teste, o choque deve mover através da segunda garganta e para dentro do difusor subsônico. Quando isso ocorre, dizemos que o choque foi *engolido* pela segunda garganta.

Conseqüentemente, para dar partida no túnel, a garganta do difusor supersônico deve ser maior do que a garganta do bocal. A segunda garganta deve ser grande o suficiente para exceder a área crítica para escoamento a jusante do choque mais forte possível.

Obstrução ou *engasgamento* ocorre quando a segunda garganta não é grande o suficiente para engolir o choque. Quando o canal está obstruído ou engasgado, o escoamento é sônico nas duas gargantas e o escoamento na seção de teste é subsônico; o escoamento na seção de teste não pode ser controlado por variações nas condições a jusante do difusor supersônico.

Quando o túnel está *funcionando*, não existe choque no bocal ou na seção de teste, de forma que a dissipação de energia é muito reduzida. A área da segunda garganta pode ser levemente reduzida durante o funcionamento para melhorar a eficiência do difusor. A razão de pressão do compressor pode ser ajustada para mover o choque no difusor subsônico para um número de Mach menor. A combinação da segunda garganta e do controle da razão de pressão ajustáveis pode ser usada para atingir condições ótimas de funcionamento do túnel. Pequenas diferenças na eficiência são importantes quando o sistema de acionamento do túnel consome mais de meio milhão de kW [10]!

Escoamento Supersônico com Atrito em um Canal de Área Constante

O escoamento em um canal de área constante, com atrito, é dominado por efeitos viscosos. Mesmo quando o escoamento principal é supersônico, a condição de não-deslizamento na parede do canal garante escoamento subsônico próximo da parede. Conseqüentemente, o escoamento supersônico em canais de área constante pode formar sistemas complicados de choques normais e oblíquos. Contudo, o comportamento básico de escoamento adiabático supersônico, com atrito, em um canal de área constante é revelado pela consideração do caso mais simples de formação de choque normal em escoamento de linha de Fanno.

O escoamento supersônico de linha de Fanno torna-se bloqueado após um pequeno comprimento de duto apenas, porque os efeitos de atrito são pronunciados em altas velocidades. A Fig. E.2 (Apêndice E) mostra que o valor limite de $\bar{f}L_{\text{máx}}/D_h$ é menor do que um; os escoamentos subsônicos podem permanecer em comprimentos de dutos muito maiores. Portanto, quando o choque resulta de atrito e o comprimento do duto é aumentado ainda mais, o escoamento supersônico entra em choque até subsônico para ajustar-se às condições de jusante.

Os diagramas *Ts* nas Figs. 12.24*a* a 12.24*d* ilustram o que acontece quando o comprimento do duto de área constante, alimentado por um bocal convergente-divergente que, por sua vez, é suprido por um reservatório de condições de estagnação constantes, é aumentado. O escoamento supersônico sobre a linha de Fanno na Fig. 12.24*a* é bloqueado por atrito quando o comprimento do duto é L_a. Quando comprimento de duto é adicionado para produzir $L_b > L_a$, Fig. 12.24*b*, um choque normal aparece. O escoamento a montante do choque não varia, porque ele é supersônico (nenhuma variação na condição a jusante pode afetar o escoamento supersônico antes do choque).

Na Fig. 12.24*b*, o choque é mostrado em uma posição arbitrária. O choque move-se em direção à entrada do canal de área constante (no sentido do maior número de Mach inicial) à medida que mais duto é adicionado.

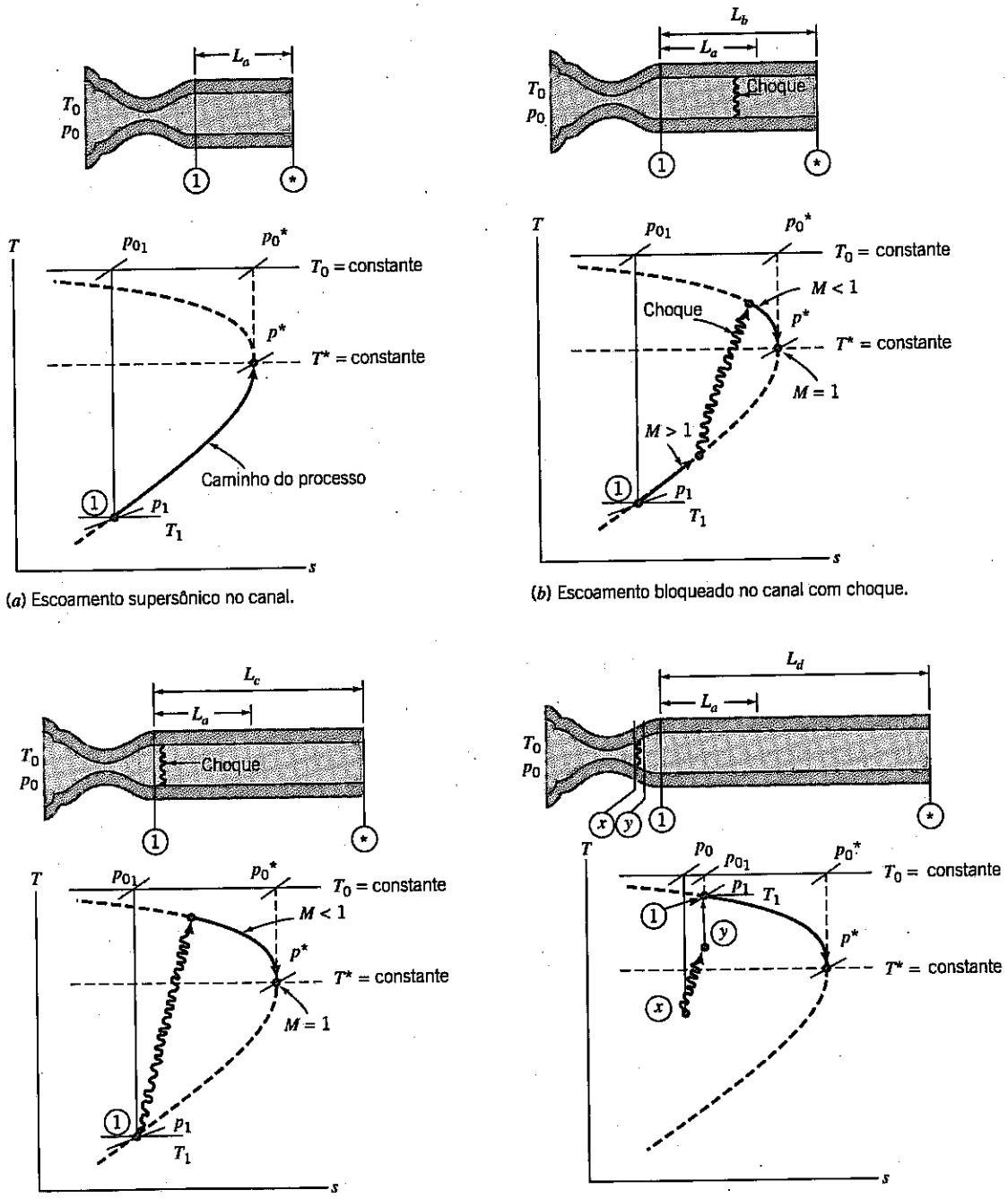
O escoamento permanece sobre a mesma linha de Fanno, quando o choque é dirigido a jusante para o estado ① pela adição de comprimento do duto; neste caso, a vazão mássica permanece constante. O comprimento de duto, L_c, que move o choque para dentro do plano de entrada do canal, Fig. 12.24*c*, pode ser calculado diretamente usando os métodos da Seção 12-3.

Quando o comprimento de duto, L_c, é excedido, o choque é dirigido de volta para dentro do bocal C-D, Fig. 12.24*d*. Neste caso, a vazão mássica permanece constante até que o choque atinja a garganta do bocal. Somente quando adicionado mais duto, após o choque ter atingido a garganta, é que a vazão mássica diminui e o escoamento desloca-se para uma nova linha de Fanno.

Se a posição do choque é conhecida, as propriedades do escoamento em cada seção e o comprimento do duto podem ser calculados diretamente. Quando o comprimento é especificado e o local do choque deve ser determinado, faz-se necessário um processo iterativo.

Escoamento Supersônico com Adição de Calor em um Canal de Área Constante

O escoamento supersônico com adição de calor em um canal de área constante, sem atrito, é mostrado na Fig. 12.25*a*. Considere que o canal seja alimentado por um bocal convergente-divergente, suprido por um reservatório de condições de estagnação constantes, e o escoamento supersônico no estado ①. A adição de calor faz com que os pontos de estado movam-se para cima e para a direita ao longo da linha de Rayleigh. A Fig. 12.25*a* ilustra a condição na qual a adição de calor é suficiente apenas para bloquear o escoamento. O escoamento é sônico na saída, de forma que $p_e = p^*$ e $T_e = T^*$; a adição de calor por unidade de massa, $\int_{s_1}^{s_e} T\,ds$, é representada pela área sombreada abaixo da linha de Rayleigh.



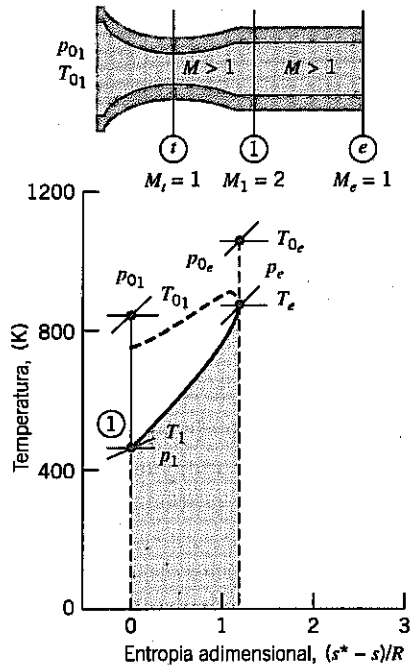
(*a*) Escoamento supersônico no canal.

(*b*) Escoamento bloqueado no canal com choque.

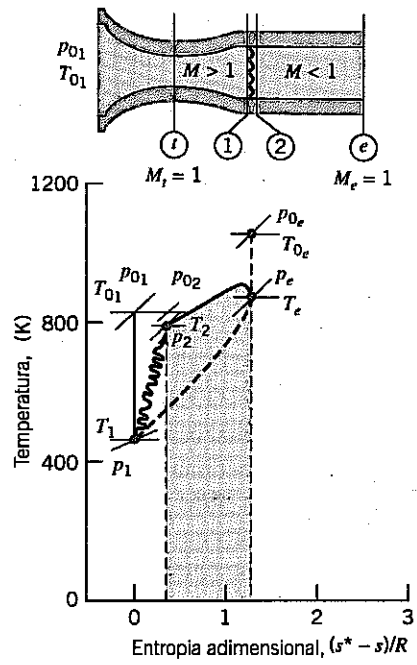
(*c*) Escoamento bloqueado com choque no plano de saída do bocal.

(*d*) Escoamento bloqueado com choque no bocal; escoamento subsônico no canal.

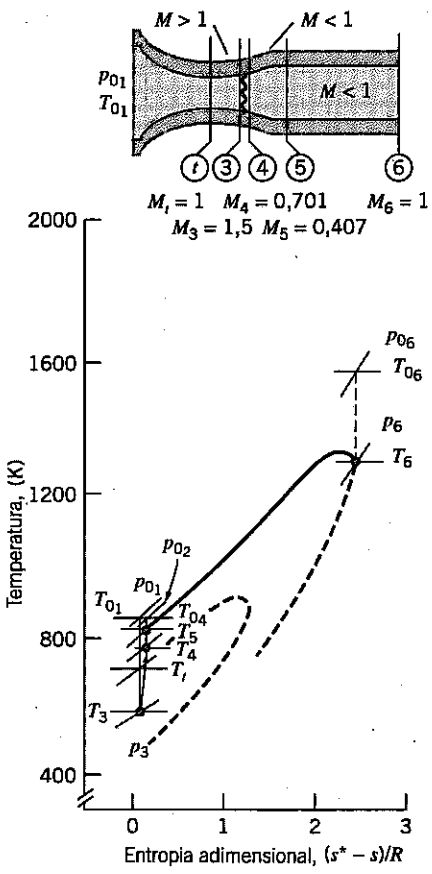
Fig. 12.24 Diagramas esquemáticos *Ts* para escoamentos supersônicos de linha de Fanno com choques normais.



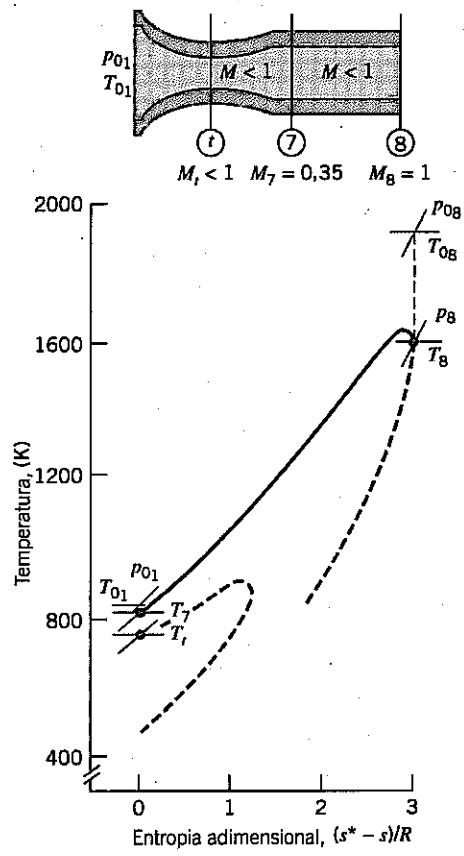
(*a*) Escoamento supersônico bloqueado.



(*b*) Escoamento bloqueado com choque no plano de saída do bocal.



(*c*) Escoamento bloqueado com choque no bocal; mesma vazão mássica, mas o escoamento desloca para uma nova linha de Rayleigh.



(*d*) Escoamento subsônico por toda parte; vazão diminuída e escoamento deslocado para uma nova linha de Rayleigh.

Fig. 12.25 Diagramas esquemáticos *Ts* para escoamentos supersônicos de linha de Rayleigh com choques normais.

Um choque normal não envolve adição de calor, de modo que T_0 é constante através de um choque. Conseqüentemente, um choque em um canal de área constante não variaria a adição de calor requerida para variar o estado do escoamento da condição de entrada para a de bloqueio. Quando o choque se estabelece na entrada do canal, Fig. 12.25*b*, a adição de calor necessária para atingir o número de Mach unitário na saída é a mesma que aquela na Fig. 12.25*a*; as áreas sombreadas também devem ser idênticas.

Se mais energia térmica é adicionada ao escoamento, nas condições mostradas na Fig. 12.25*b*, o choque será empurrado da entrada do duto de área constante de volta para dentro da porção divergente do bocal, onde o número de Mach é menor.

Com um choque no bocal, as condições na entrada do duto mudam, e a adição de calor ocorre ao longo de uma linha de Rayleigh diferente, conforme mostrado na Fig. 12.25*c*. Não existe variação em T_0 ou em T^* através do choque (assim, $T_{0_3} = T_{0_4}$ e $T_3^* = T_4^*$), mas o número de Mach a jusante varia. Difusão subsônica adicional ocorre do estado ④ para a saída do bocal (estado ⑤), movendo, assim, a condição de bloqueio para cima sobre o plano *Ts*, permitindo adição de calor aumentada sobre a nova linha de Rayleigh. Todas essas mudanças ocorrem à mesma vazão mássica, porque as condições na garganta do bocal permanecem invariáveis.

O número de Mach imediatamente a montante do choque (estado ③) é menor do que o M_1 da Fig. 12.25*b*; a temperatura correspondente, T_3, é maior do que T_1. Como a intensidade do choque é reduzida, o aumento de entropia através do choque é menor, $(s_4 - s_3) < (s_2 - s_1)$. A difusão subsônica que se segue ao choque resulta em um número de Mach menor e uma temperatura maior na entrada do duto. Assim, $M_5 < M_2$ e $T_5 > T_2$.

Quando a taxa de adição de calor aumenta o suficiente para dirigir o choque para a garganta do bocal, um acréscimo na adição de calor resultará em um decréscimo na vazão mássica. O número de Mach na entrada do canal é reduzido, $M_7 < M_5$, e o escoamento de canal desloca-se para uma outra nova linha de Rayleigh, conforme mostrado na Fig. 12.25*d*.

Portanto, para uma dada vazão mássica, existe uma taxa máxima de adição de calor para estabelecer escoamento supersônico por toda parte. Para taxas mais altas de adição de calor, um choque ocorre no bocal e o escoamento é subsônico no canal de área constante, porém o escoamento de saída permanece sônico. Se a posição do choque é especificada, a adição de calor ao longo da linha da Rayleigh pode ser calculada diretamente. Se a adição de calor é especificada, mas a posição do choque ou a vazão mássica desconhecida, um processo iterativo é requerido para obter a solução.

Considerações adicionais de escoamento com ondas de choque são dadas em [11].

12-7 CHOQUES OBLÍQUOS E ONDAS DE EXPANSÃO

Até aqui, temos considerado escoamentos compressíveis e unidimensionais. Com o conhecimento adquirido, estamos prontos para introduzir alguns conceitos básicos de escoamento bidimensional: *choques oblíquos* e *ondas de expansão*.

Choques Oblíquos

Na Seção 11-2, discutimos o cone de Mach, com ângulo de Mach α, que é gerado por uma aeronave voando a $M > 1$, conforme mostrado (em coordenadas da aeronave) na Fig. 12.26*a*. O cone de Mach é uma onda de pressão fraca (som), tão fraca que, conforme mostrado na Fig. 12.26*a*, mal perturba as linhas de corrente — é o caso limite de um choque oblíquo. Se focarmos no avião, vemos que no nariz da aeronave há um choque oblíquo — uma onda de choque que está alinhada, em algum ângulo $\beta < 90°$, em relação ao escoamento. Esse choque oblíquo causa uma variação brusca na direção das linhas de corrente (normalmente para seguir a superfície do avião ou do aerofólio do avião). Mais distante da aeronave, ainda existe um choque oblíquo, porém ele se torna progressivamente mais fraco (β decresce) e as linhas de corrente experimentam deflexões menores até que, bem distante da aeronave, o choque oblíquo torna-se um cone de Mach ($\beta \to \alpha$) e as linhas de corrente praticamente não são afetadas pela aeronave.

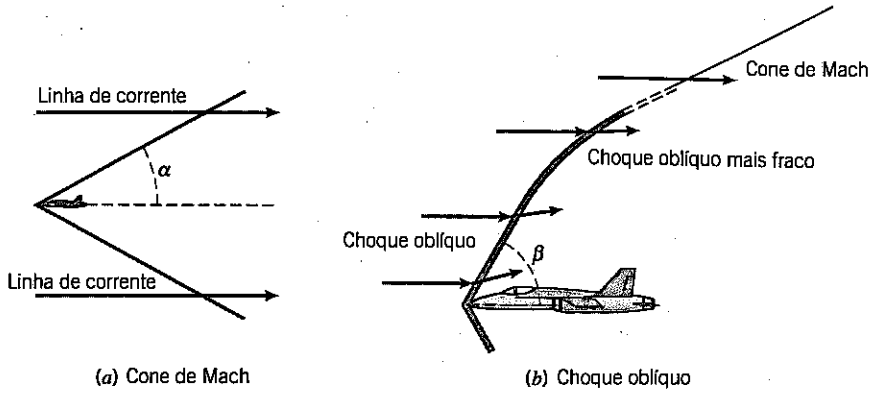


Fig. 12.26 Cone de Mach e choque oblíquo gerados por um avião.

Um avião supersônico não gera necessariamente um choque oblíquo que fica colado ao seu nariz — em vez de um choque normal separado, podemos tê-lo à frente do avião! De fato, como ilustrado na Fig. 12.27, à medida que uma aeronave é acelerada até a sua velocidade supersônica de cruzeiro, o escoamento progredirá de subsônico, passando por supersônico com um choque normal separado, até os choques oblíquos colados que tornam-se crescentemente "pressionados" contra a superfície do aeroplano.

Esses fenômenos de escoamento podem ser explicados usando os conceitos que desenvolvemos em nossas análises de choques normais. Considere o choque oblíquo mostrado na Fig. 12.28*a*. Ele está a um mesmo ângulo β em relação ao escoamento supersônico de chegada, com velocidade $\vec{V}_1$, e causa uma deflexão no escoamento de um ângulo θ, com velocidade $\vec{V}_2$ após o choque.

É conveniente orientar as coordenados ortogonais xy para o choque oblíquo e decompor $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ em suas componentes normal e tangencial ao choque, conforme mostrado na Fig. 12.28*b*, com subscritos apropriados. O volume de controle é considerado ter área arbitrária A antes e após o choque e espessura infinitesimal através do choque (as superfícies superior e inferior na Fig. 12.28*b*). Para esse volume de controle infinitesimal, podemos escrever as equações básicas: continuidade, quantidade de movimento, e primeira e segunda leis da termodinâmica.

A equação da continuidade é

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{VC} \rho \, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{4.12}$$

Consideração: (1) Escoamento permanente.

Portanto,

$$\left(-\rho_1 V_{1_n} A\right) + \left(\rho_2 V_{2_n} A\right) = 0$$

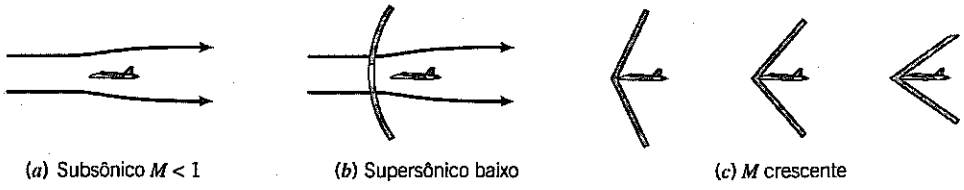
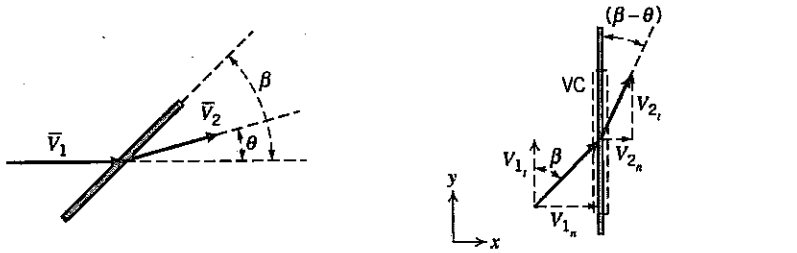


Fig. 12.27 Configurações de escoamento em aviões à medida que a velocidade aumenta.



(*a*) Choque oblíquo (*b*) Choque oblíquo em coordenadas de choque

Fig. 12.28 Volume de controle de choque oblíquo.

(As componentes tangenciais da velocidade V_{1_t} e V_{2_t} estão sobre uma área infinitesimal, de modo que não contribuem para a continuidade.) Então,

$$\rho_1 V_{1_n} = \rho_2 V_{2_n} \tag{12.45a}$$

Em seguida, vamos considerar a equação da quantidade de movimento para movimentos normal e tangencial ao choque. Chegamos a um resultado interessante se olharmos antes a componente tangencial y,

$$F_{S_y} + \underbrace{F_{B_y}}_{=0(2)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \underbrace{V_y}_{=0(1)} \rho \, d\forall + \int_{SC} V_y \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18b}$$

Consideração: (2) Forças de corpo desprezíveis.

Portanto,

$$0 = V_{1_t}\left(-\rho_1 V_{1_n} A\right) + V_{2_t}\left(\rho_2 V_{2_n} A\right)$$

ou, usando a Eq. 12.45a,

$$V_{1_t} = V_{2_t} = V_t$$

Assim, provamos que *o choque oblíquo não tem efeito sobre a componente da velocidade paralela ao choque* (um resultado que talvez não seja surpreendente). A equação da quantidade de movimento para a normal, direção x, é

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(2)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \underbrace{V_x}_{=0(1)} \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18a}$$

Para o nosso volume de controle, obtemos

$$p_1 A - p_2 A = V_{1_n}(-\rho_1 V_{1_n} A) + V_{2_n}(\rho_2 V_{2_n} A)$$

ou, novamente usando a Eq. 12.45a,

$$p_1 + \rho_1 V_{1_n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2_n}^2 \tag{12.45b}$$

A primeira lei da termodinâmica é

$$\underbrace{\dot{Q}}_{=0(4)} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(5)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}_{=0(5)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{outro}}}_{=0(5)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e \, \rho \, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} (e + pv) \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18a}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \cancelto{0(6)}{gz}$$

Considerações: (4) Escoamento adiabático.
(5) Termos de trabalho inexistentes.
(6) Efeito gravitacional desprezível.

Para o nosso volume de controle, obtemos

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\left(-\rho_1 V_{1_n} A\right) + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)(\rho_2 V_{2_n} A)$$

(Lembre-se de que v aqui representa o volume específico.) Isto pode ser simplificado usando $h \equiv u + pv$ e a continuidade (Eq. 12.45a),

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Aplicando a relação de Pitágoras aos triângulos de velocidades, vem

$$h_1 + \frac{V_{1_n}^2 + V_{1_t}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{2_n}^2 + V_{2_t}^2}{2}$$

Já sabemos que a velocidade tangencial é constante, $V_{1_t} = V_{2_t} = V_t$, logo a primeira lei simplifica-se para

$$h_1 + \frac{V_{1_n}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{2_n}^2}{2} \tag{12.45c}$$

Finalmente, a segunda lei da termodinâmica é

$$\frac{\partial}{\partial t}\cancelto{0(1)}{\int_{VC}} s\,\rho\, d\forall + \int_{SC} s\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \int_{SC} \cancelto{0(4)}{\frac{1}{T}\left(\frac{Q}{A}\right)} dA \tag{4.58}$$

O choque é irreversível, então a Eq. 4.58 para o nosso volume de controle é

$$s_1(-\rho_1 V_{1_n} A) + s_2(\rho_2 V_{2_n} A) > 0$$

e, novamente usando a continuidade,

$$s_2 > s_1 \tag{12.45d}$$

As equações da continuidade e da quantidade de movimento e a primeira e segunda leis da termodinâmica para um choque oblíquo são dadas pelas Eqs. 12.45a até 12.45d, respectivamente. O exame destas equações mostra que elas são *idênticas* às equações correspondentes para um choque normal, Eqs. 12.32a até 12.32d, exceto que V_1 e V_2 são substituídas pelas componentes normais da velocidade V_{1_n} e V_{2_n}, respectivamente! Assim, podemos utilizar todos os conceitos e equações da Seção 12-5 para choques normais, tão somente após substituir as velocidades por suas componentes normais. As componentes normais da velocidade são dadas por

$$V_{1_n} = V_1 \operatorname{sen}\beta \tag{12.46a}$$

e

$$V_{2_n} = V_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) \tag{12.46b}$$

Os números de Mach correspondentes são

$$M_{1_n} = \frac{V_{1_n}}{c_1} = M_1 \operatorname{sen} \beta \tag{12.47a}$$

e

$$M_{2_n} = \frac{V_{2_n}}{c_2} = M_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) \tag{12.47b}$$

As equações de choque oblíquo para um gás ideal com calores específicos constantes são obtidas diretamente das Eqs. 12.41:

$$M_{2_n}^2 = \frac{M_{1_n}^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1} M_{1_n}^2 - 1} \tag{12.48a}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2} M_{1_n}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1} M_{1_n}^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.48b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2\right)\left(k M_{1_n}^2 - \dfrac{k-1}{2}\right)}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2 M_{1_n}^2} \tag{12.48c}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_{1_n}^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.48d}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1_n}}{V_{2_n}} = \frac{\dfrac{k+1}{2} M_{1_n}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2} \tag{12.48e}$$

As Eqs. 12.48, juntamente com as Eqs. 12.46 e 12.47, podem ser usadas para analisar problemas de choques oblíquos. O Apêndice E-5 lista funções de escoamento para M_{2_n} e razões de propriedades p_{0_2}/p_{0_1}, T_2/T_1, p_2/p_1 e ρ_2/ρ_1 (V_1/V_2) em termos de M_{1_n} para um escoamento de choque oblíquo de um gás ideal. Uma tabela de valores dessas razões de propriedades é apresentada para o ar (k = 1,4), para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha associada do *Excel*, *Relações de Choques Oblíquos*, pode ser utilizada para imprimir uma tabela maior para o ar e outros gases ideais. Em essência, conforme demonstrado no Problema-Exemplo 12.11, um problema de choque oblíquo pode ser analisado como um problema de choque normal equivalente.

EXEMPLO 12.11 Comparação entre Choques Normal e Oblíquo

Ar a –2°C e 100 kPa está escoando a uma velocidade de 1650 m/s. Determine a pressão, temperatura e velocidade após o ar passar por um choque normal. Compare com a pressão, temperatura e velocidade (e determine o ângulo de deflexão θ) se o ar passasse por um choque oblíquo com ângulo $\beta = 30°$.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.11

DADOS: Escoamento de ar com:

$P_1 = 100$ kPa
$T_1 = -2°C$
$V_1 = 1650$ m/s

DETERMINAR: A pressão a jusante, a temperatura, e a velocidade se o ar sofresse (a) um choque normal e (b) um choque oblíquo a um ângulo $\beta = 30°$. Determine também o ângulo de deflexão θ.

SOLUÇÃO:

(a) Choque normal

Primeiro, calcule a velocidade do som,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 271\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{N}}} = 330\ \text{m/s}$$

Em seguida, o número de Mach a montante,

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{1650\ \text{m/s}}{330\ \text{m/s}} = 5{,}0$$

A partir das funções de choque normal, Eqs. 12.41, para $M_1 = 5{,}0$,

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	V_2/V_1
5,0	0,4152	29,00	5,800	0,2000

A partir destes dados,

$$T_2 = 5{,}800T_1 = (5{,}800)271\,\text{K} = 1572\,\text{K} = 1299°\,\text{C} \longleftarrow T_2$$

$$p_2 = 29{,}00p_1 = (29{,}00)100\,\text{kPa} = 2{,}9\,\text{MPa} \longleftarrow p_2$$

$$V_2 = 0{,}200V_1 = (0{,}200)1650\,\text{m/s} = 330\,\text{m/s} \longleftarrow V_2$$

(b) Choque oblíquo

Primeiro, calcule as componentes normal e tangencial da velocidade,

$$V_{1n} = V_1 \operatorname{sen}\beta = 1650\ \text{m/s} \times \operatorname{sen} 30° = 825\ \text{m/s}$$

$$V_{1t} = V_1 \cos\beta = 1650\ \text{m/s} \times \cos 30° = 1429\ \text{m/s}$$

Em seguida, o número de Mach *normal* a montante,

$$M_{1_n} = \frac{V_{1_n}}{c_1} = \frac{825\ \text{m/s}}{330\ \text{m/s}} = 2{,}5$$

A partir das funções de choque oblíquo, Eqs. 12.48, para $M_{1_n} = 2{,}5$,

M_{1n}	M_{2n}	p_2/p_1	T_2/T_1	V_{2n}/V_{1n}
2,5	0,5130	7,125	2,138	0,300

A partir destes dados,

$$T_2 = 2{,}138T_1 = (2{,}138)271\,\text{K} = 579\,\text{K} = 306°\,\text{C} \longleftarrow T_2$$

$$p_2 = 7{,}125 p_1 = (7{,}125)100\text{ kPa} = 712{,}5\text{ kPa} \longleftarrow p_2$$

$$V_{2_n} = 0{,}300 V_{1_n} = (0{,}300)825\text{ m/s} = 247{,}5\text{ m/s}$$

$$V_{2_t} = V_{1_t} = 1429\text{ m/s} \longleftarrow V_2$$

A velocidade a jusante é dada pela relação de Pitágoras para o triângulo de velocidades,

$$V_2 = \sqrt{\left(V_{2_n}^2 + V_{2_t}^2\right)} = \sqrt{\left(247{,}5^2 + 1429^2\right)}\text{ m/s} = 1450\text{ m/s}$$

Note que

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 579\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{N}}} = 482\text{ m/s}$$

então, o número de Mach a jusante é

$$M_2 = \frac{V_2}{c_2} = \frac{1450\text{ m/s}}{482\text{ m/s}} = 3{,}01$$

Embora o número de Mach normal a jusante deva ser subsônico, o número de Mach real a jusante pode ser subsônico ou supersônico (como neste caso).

O ângulo de deflexão pode ser obtido da Eq. 12.46b

$$V_{2_n} = V_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta)$$

ou

$$\theta = \beta - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{V_{2_n}}{V_2}\right) = 30° - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{247{,}5}{1450}\right) = 30° - 9{,}8° = 20{,}2° \longleftarrow \theta$$

Este Problema-Exemplo ilustra:

- ✓ Que um choque oblíquo envolve deflexão do escoamento através de um ângulo θ.
- ✓ O uso das funções de choque normal para solução de problemas de choque oblíquo.
- ✓ O importante resultado de que, para um dado escoamento supersônico, um choque oblíquo será sempre mais fraco do que um choque normal, porque $M_{1_n} < M_1$.
- ✓ Que, enquanto $M_{2_n} < 1$ sempre, M_2 pode ser subsônico ou supersônico (como nesse caso).

A *planilha Excel* para choques oblíquos é conveniente para realizar os cálculos.

Podemos buscar uma melhor compreensão do comportamento de choque oblíquo combinando algumas das equações anteriores de modo a relacionar o ângulo de deflexão θ, o número de Mach M_1 e o ângulo de choque β. Da geometria do choque oblíquo da Fig. 12.28*b*,

$$\frac{V_{1_n}}{V_{2_n}} = \frac{V_{1_t}\tan\beta}{V_{2_t}\tan(\beta - \theta)} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta - \theta)}$$

Podemos, também, relacionar as duas velocidades normais da Eq. 12.48e,

$$\frac{V_{1_n}}{V_{2_n}} = \frac{\dfrac{k+1}{2}M_{1_n}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_{1_n}^2} \tag{12.48e}$$

Equacionando as duas expressões para a razão de velocidade normal, resulta em

$$\frac{V_{1_n}}{V_{2_n}} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)} = \frac{\dfrac{k+1}{2}M_{1_n}^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_{1_n}^2}$$

e

$$\tan(\beta-\theta) = \frac{\tan\beta}{\dfrac{(k+1)}{2}M_{1_n}^2}\left(1+\frac{k-1}{2}M_{1_n}^2\right)$$

Finalmente, usando $M_{1_n} = M_1 \operatorname{sen}\beta$ nesta expressão e simplificando, obtemos (após utilizar uma identidade trigonométrica e mais álgebra)

$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta\left(M_1^2\operatorname{sen}^2\beta - 1\right)}{M_1^2(k+\cos 2\beta)+2} \tag{12.49}$$

A Eq. 12.49 relaciona o ângulo de deflexão θ ao número de Mach na entrada M_1 e ao ângulo de choque oblíquo β. Para um dado número de Mach, podemos calcular θ como uma função de β, conforme mostrado na Fig. 12.29 para o ar ($k = 1{,}4$).

O Apêndice E-5 apresenta uma tabela de valores do ângulo de deflexão θ como uma função do número de Mach M_1 e do ângulo de choque oblíquo β para o ar ($k = 1{,}4$), para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha associada do *Excel*, *Relações de Choques Oblíquos*, pode ser usada para imprimir uma tabela maior para o ar e outros gases ideais.

Note que utilizamos M_1 e o ângulo de choque β para calcular θ, mas, na realidade, as ocorrências são inversas: é a deflexão θ causada por um objeto, tal como a superfície da asa de um avião, que gera um choque oblíquo a um ângulo β. Podemos tirar algumas conclusões interessantes da Fig. 12.29:

✓ Para um número de Mach e um ângulo de deflexão dados, existem geralmente *dois* possíveis ângulos de choque oblíquo — pode ser gerado um choque fraco (o menor valor de β e, portanto, o menor número de Mach normal, M_{1_n}) ou um choque forte (o maior valor de β e, portanto, o maior número de Mach normal, M_{1_n}). Na maioria dos casos, o choque fraco aparece (exceções incluem situações onde a pressão a jusante é forçada a ter um grande valor como aquele causado, por exemplo, por uma obstrução).

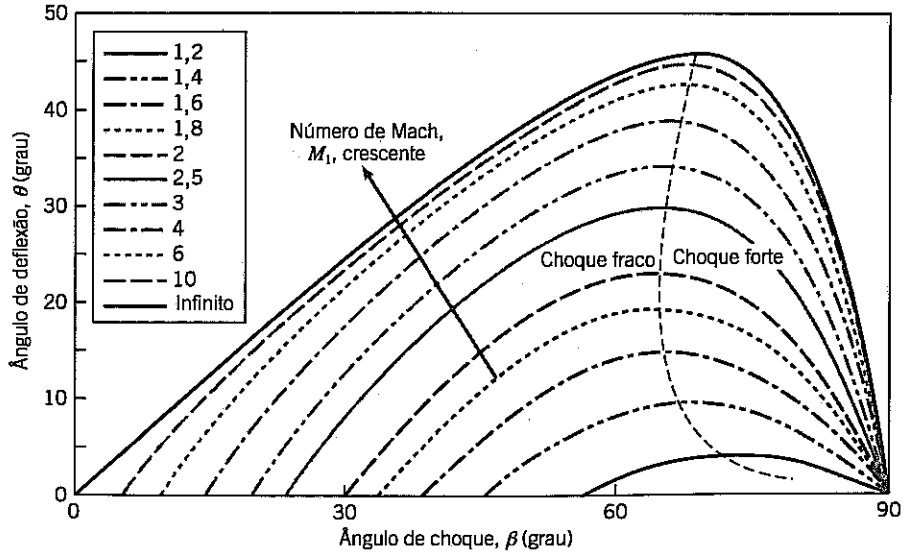


Fig. 12.29 Ângulo de deflexão de choque oblíquo.

✓ Para um dado número de Mach, existe um ângulo máximo de deflexão. Por exemplo, para o ar ($k = 1{,}4$), se $M_1 = 3$, o máximo ângulo de deflexão é $\theta_{máx} \approx 34°$. Qualquer tentativa de defletir o escoamento a um ângulo $\theta > \theta_{máx}$ causaria um choque normal separado ao invés de um choque oblíquo.

✓ Para deflexão zero, ($\theta \to 0$), o choque fraco torna-se uma onda de Mach e $\beta \to \alpha = \text{sen}^{-1}(1/M_1)$.

A Fig. 12.29 pode ser usada para explicar o fenômeno mostrado na Fig. 12.27. Se uma aeronave (ou uma asa dela), causando uma deflexão θ, é acelerada da velocidade sônica até a velocidade supersônica, a progressão da aeronave pode ser traçada na Fig. 12.29 como uma linha horizontal da direita para a esquerda, através de linhas de números de Mach crescentes. Por exemplo, para $\theta = 10°$, obtemos os seguintes resultados: Conforme M_1 aumenta do subsônico até cerca de 1,4, não existe solução de choque oblíquo — pode ser que não haja choque (escoamento subsônico) ou pode haver um choque normal separado; em algum número de Mach, o choque normal inicialmente conecta-se e, em seguida, torna-se um choque oblíquo (o problema 12.133 mostra que para $\theta = 10°$, o choque normal primeiro conecta-se e, em seguida, torna-se oblíquo em $M_1 \approx 1{,}42$, com $\beta \approx 67°$); conforme M_1 aumenta de 1,6 até 1,8; 2,0; 2,5; etc., até o infinito, da Fig. 12.29, $\beta \approx 51°$, 44°, 39°, 32°, até 12°, respectivamente — o ângulo do choque oblíquo diminui progressivamente, conforme vimos na Fig. 12.27.

Um problema envolvendo choques oblíquos é apresentado no Problema-Exemplo 12.12.

EXEMPLO 12.12 Choques Oblíquos sobre um Aerofólio

Um avião voa a uma velocidade de 600 m/s no ar a 4°C e 100 kPa. O aerofólio do avião possui uma borda dianteira aguda com ângulo incluso $\delta = 6°$ e um ângulo de ataque $\alpha = 1°$. Determine as pressões sobre as superfícies superior e inferior do aerofólio imediatamente após a borda dianteira.

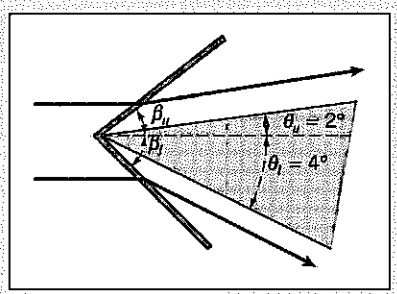
PROBLEMA-EXEMPLO 12.12

DADOS: Escoamento de ar sobre uma borda dianteira aguda com:

$P_1 = 100$ kPa $\quad \delta = 6°$

$T_1 = 4°C \quad \alpha = 1°$

$V_1 = 600$ m/s



DETERMINAR: A pressão sobre as superfícies superior e inferior.

SOLUÇÃO:

Para um ângulo de ataque de 1° de um aerofólio com ângulo de borda dianteira de 6°, os ângulos de deflexão são $\theta_u = 2°$ e $\theta_l = 4°$, conforme mostrado.

(a) Superfície superior

Primeiro, calcule a velocidade do som,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 277\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{N}}} = 334\,\text{m/s}$$

Em seguida, o número de Mach a montante é

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{600\,\text{m/s}}{334\,\text{m/s}} = 1{,}80$$

Para $M_1 = 1{,}8$ e $\theta_u = 2°$, obtemos β_u a partir de

$$\tan\theta_u = \frac{2\cot\beta_u\left(M_1^2\,\text{sen}^2\,\beta_u - 1\right)}{M_1^2(k + \cos 2\beta_u) + 2} \tag{12.49}$$

Isto pode ser resolvido para β_u utilizando iteração manual ou interpolação, ou utilizando, por exemplo, a função *Atingir Meta* (*Excel's Goal Seek*) do *Excel*,

$$\beta_u = 35{,}5°$$

Em seguida, podemos determinar $M_{1_{n\,(\text{superior})}}$,

$$M_{1_{n\,(\text{superior})}} = M_1 \operatorname{sen}\beta_u = 1{,}80 \times \operatorname{sen} 35{,}5° = 1{,}045$$

O número de Mach normal para o choque oblíquo superior está perto de 1 — o choque é muito fraco.

A partir da razão de pressão para o choque oblíquo, Eqs. 12.48d, para $M_{1_{n\,(\text{superior})}} = 1{,}045$,

$$\frac{p_{2_{(\text{superior})}}}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M^2_{1_{n(\text{superior})}} - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2 \times 1{,}4}{(1{,}4+1)}(1{,}045)^2 - \frac{(1{,}4-1)}{(1{,}4+1)} = 1{,}11$$

Portanto,

$$p_{2_{(\text{superior})}} = 1{,}11\, p_1 = (1{,}11)100\text{ kPa} = 111\text{ kPa} \longleftarrow p_{2_{(\text{superior})}}$$

(b) Superfície inferior

Para $M_1 = 1{,}80$ e $\theta_l = 4°$, obtemos β_l de

$$\tan\theta_l = \frac{2\cot\beta_l\left(M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta_l - 1\right)}{M_1^2(k + \cos 2\beta_l) + 2} \tag{12.49}$$

e encontramos

$$\beta_u = 37{,}4°$$

Em seguida, podemos determinar $M_{1_{n\,(\text{inferior})}}$,

$$M_{1_{n\,(\text{inferior})}} = M_1 \operatorname{sen}\beta_l = 1{,}80 \times \operatorname{sen} 37{,}4° = 1{,}093$$

O número de Mach normal para o choque oblíquo inferior é também próximo de um.

Para a razão de pressão do choque oblíquo, Eq. 12.48d, para $M_{1_{n\,(\text{inferior})}} = 1{,}093$,

$$\frac{p_{2_{(\text{inferior})}}}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M^2_{1_{n(\text{inferior})}} - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2 \times 1{,}4}{(1{,}4+1)}(1{,}093)^2 - \frac{(1{,}4-1)}{(1{,}4+1)} = 1{,}23$$

Então,

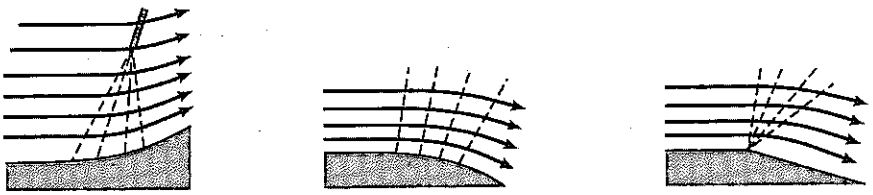
$$p_{2_{(\text{inferior})}} = 1{,}23\, p_1 = (1{,}23)100\text{ kPa} = 123\text{ kPa} \longleftarrow p_{2_{(\text{inferior})}}$$

Este Problema-Exemplo ilustra o uso da Eq. 12.49 para obter dados de choque oblíquo a partir da deflexão do escoamento.

A *planilha Excel* para choques oblíquos é conveniente para realizar os cálculos.

Ondas de Expansão Isoentrópicas

Ondas de choque oblíquas ocorrem quando um escoamento é subitamente comprimido à medida que ele é defletido. Podemos nos perguntar o que acontece se redirecionarmos *gradualmente* um escoamento supersônico, por exemplo, ao longo de uma superfície curva. A resposta é que ondas de expansão ou de compressão isoentrópica podem ser geradas, conforme ilustrado esquematicamente nas Figs. 12.30*a* e 12.30*b*, respectivamente. Da Fig. 12.30*a*, vemos que uma série de ondas de compressão eventualmente convergirão, e o efeito cumulativo possivelmente gerará um choque oblíquo não muito distante da superfície curva. Enquanto as ondas de compressão ocorrem, elas não são de grande interesse, porque os choques oblíquos que elas acarretam normalmente dominam a aerodinâmica — quando muito, as ondas são um fenômeno local. Por outro lado, conforme mostrado na Fig. 12.30*b*, as ondas de expansão em série são divergentes e não coalescem. A Fig. 12.30*c* mostra a expansão em torno de uma quina de borda-viva.



(*a*) Ondas de compressão isoentrópica (*b*) Ondas de expansão isoentrópica (*c*) Expansão isoentrópica em uma quina

Fig. 12.30 Compressão e ondas de expansão isoentrópicas.

Desejamos analisar essas ondas isoentrópicas para obter uma relação entre o ângulo de deflexão e o número de Mach. Primeiro, notamos que cada onda é uma onda de Mach, de modo que está a um ângulo $\alpha = \text{sen}^{-1}(1/M)$, onde M é o número de Mach imediatamente antes da onda. As ondas de compressão são convergentes, porque o ângulo de onda α aumenta conforme o número de Mach diminui. Por outro lado, as ondas de expansão são divergentes porque, conforme o escoamento se expande, o número de Mach aumenta, diminuindo o ângulo de Mach.

Considere uma onda isoentrópica, conforme mostrado na Fig. 12.31*a*. (Por acaso é uma onda de compressão, mas a análise que se segue aplica-se tanto a ondas de expansão quanto a ondas de compressão.) A velocidade varia de V para $V + dV$, com uma deflexão $d\theta$. Assim como para a análise do choque oblíquo pela Fig. 12.28*a*, é conveniente orientar as coordenadas ortogonais xy para a onda, conforme mostrado na Fig. 12.31*b*. Para esse volume de controle infinitesimal, podemos escrever as equações básicas (continuidade, quantidade de movimento, e primeira e segunda leis da termodinâmica). Comparando o volume de controle da onda isoentrópica da Fig. 12.31*b* com o volume de controle para um choque oblíquo mostrado na Fig. 12.28, verificamos que os volumes de controle têm características similares. Entretanto, uma onda isoentrópica difere de uma onda de choque oblíquo de duas formas importantes:

- ✓ O ângulo de onda é $\alpha = \text{sen}^{-1}(1/M)$, em vez do ângulo β para o choque oblíquo.
- ✓ As variações na velocidade e na massa específica, pressão, etc., e no ângulo de deflexão são todas infinitesimais.

Um outro fator importante é que o escoamento, que é adiabático, é isoentrópico.

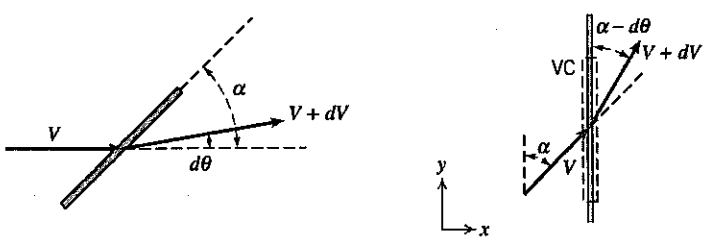
Com essas diferenças em mente, repetimos a análise que realizamos para o choque oblíquo. A equação da continuidade é

$$\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\int_{VC} \rho \, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{4.12}$$

Consideração: (1) Regime permanente.

Então,

$$\{-\rho V \text{sen}\,\alpha A\} + \{(\rho + d\rho)(V + dV)\text{sen}(\alpha - d\theta)A\} = 0$$



(*a*) Onda isoentrópica (*b*) Onda isoentrópica em coordenadas de onda

Fig. 12.31 Volume de controle de onda isoentrópica.

ou

$$\rho V \operatorname{sen}\alpha = (\rho + d\rho)(V + dV)\operatorname{sen}(\alpha - d\theta) \tag{12.50}$$

Em seguida, consideramos a equação da quantidade de movimento para movimento normal e tangencial ao choque. Primeiro, para a componente tangencial y,

$$F_{S_y} + \cancel{F_{B_y}}^{=0(2)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \cancel{V_y}^{=0(1)} \rho \, d\forall + \int_{SC} V_y \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18b}$$

Consideração: (2) Forças de corpo desprezíveis.

Então,

$$0 = V\cos\alpha\{-\rho V \operatorname{sen}\alpha A\} + (V + dV)\cos(\alpha - d\theta)\{(\rho + d\rho)(V + dV)\operatorname{sen}(\alpha - d\theta)A\}$$

ou, usando a continuidade (Eq. 12.50),

$$V\cos\alpha = (V + dV)\cos(\alpha - d\theta)$$

Expandindo e simplificando [usando as evidências de que, para primeira ordem, no limite conforme $d\theta \to 0$, $\cos(d\theta) \to 1$ e $\operatorname{sen}(d\theta) \to d\theta$], obtemos

$$d\theta = -\frac{dV}{V\tan\alpha}$$

Mas $\operatorname{sen}\alpha = 1/M$, de modo que $\tan\alpha = 1/\sqrt{M^2 - 1}$, e

$$d\theta = -\sqrt{M^2 - 1}\,\frac{dV}{V} \tag{12.51}$$

Vamos saltar a análise da componente normal x da quantidade de movimento e ir direto para a primeira lei da termodinâmica, que é

$$\cancel{\dot{Q}}^{=0(4)} - \cancel{\dot{W}_s}^{=0(5)} - \cancel{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}^{=0(5)} - \cancel{\dot{W}_{\text{outro}}}^{=0(5)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18a}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz}^{=0(6)}$$

Considerações: (4) Escoamento adiabático.
(5) Não existem termos de trabalho.
(6) O efeito gravitacional é desprezível.

Para nosso volume de controle, obtemos (utilizando $h \equiv u + pv$, onde v representa volume específico)

$$0 = \left\{h + \frac{V^2}{2}\right\}\{-\rho V \operatorname{sen}\alpha A\}$$
$$+ \left\{(h + dh) + \frac{(V + dV)^2}{2}\right\}\{(\rho + d\rho)(V + dV)\operatorname{sen}(\alpha - d\theta)A\}$$

Isto pode ser simplificado usando a continuidade (Eq. 12.50), para

$$h + \frac{V^2}{2} = (h + dh) + \frac{(V + dV)^2}{2}$$

Expandindo e simplificando, no limite para primeira ordem, obtemos

$$dh = -V\,dV$$

Se ficarmos restritos a gases ideais, $dh = c_p\,dT$, e

$$c_p\,dT = -V\,dV \tag{12.52}$$

A Eq. 12.52 relaciona variações diferenciais na temperatura e na velocidade. Podemos obter uma relação entre M e V usando $V = Mc = M\sqrt{kRT}$. Diferenciando (e dividindo o lado esquerdo por V e o direito por $M\sqrt{kRT}$),

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Eliminando dT usando a Eq. 12.52,

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2}\frac{V\,dV}{c_pT} = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2}\frac{dV}{V}\left(\frac{V^2}{c_pT}\right) = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2}\frac{dV}{V}\left(\frac{M^2c^2}{c_pT}\right)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2}\frac{dV}{V}\left(\frac{M^2kRT}{c_pT}\right) = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2}\frac{dV}{V}M^2(k-1)$$

Assim,

$$\frac{dV}{V} = \frac{2}{2 + M^2(k-1)}\frac{dM}{M} \tag{12.53}$$

Finalmente, combinando as Eqs. 12.51 e 12.53,

$$d\theta = -\frac{2\sqrt{M^2-1}}{2 + M^2(k-1)}\frac{dM}{M} \tag{12.54}$$

Em geral, aplicaremos a Eq. 12.54 para ondas de expansão, para as quais $d\theta$ é negativo, de forma que é conveniente trocar as variáveis $d\omega \equiv -d\theta$. A Eq. 12.54 relaciona a variação diferencial no número de Mach através de uma onda isoentrópica com o ângulo de deflexão. Essa equação pode ser integrada para obter a deflexão como uma função do número de Mach, a menos de uma constante de integração. Nós *poderíamos* integrar a Eq. 12.54 entre os números de Mach inicial e final de um dado escoamento, porém é mais conveniente integrar a partir de um estado de referência, a velocidade crítica ($M = 1$) até o número de Mach M, com ω arbitrado igual a zero para $M = 1$,

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_1^M \frac{2\sqrt{M^2-1}}{2 + M^2(k-1)}\frac{dM}{M}$$

levando à *função de expansão supersônica de Prandtl-Meyer*,

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M^2-1}\right) \tag{12.55}$$

Usamos a Eq. 12.55 para relacionar a deflexão total causada por uma expansão isoentrópica de M_1 até M_2,

$$\text{Deflexão} = \omega_2 - \omega_1 = \omega(M_2) - \omega(M_1)$$

O Apêndice E-6 apresenta uma tabela de valores da *função de expansão supersônica de Prandtl-Meyer*, ω, como uma função do número de Mach M para o ar ($k = 1{,}4$) para uma faixa limitada de números de Mach. A planilha associada do *Excel*, *Relações de Onda de Expansão Isoentrópica*, pode ser usada para imprimir uma tabela maior para o ar e outros gases ideais.

Como já mencionado, o escoamento é isoentrópico. Isso pode ser verificado utilizando a segunda lei da termodinâmica,

$$\overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} s\,\rho\,d\forall} + \int_{SC} s\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \overset{=0(4)}{\int_{SC}\frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)dA} \tag{4.58}$$

A onda é reversível, de modo que a Eq. 4.58 para nosso volume de controle é

$$s\{-\rho V \operatorname{sen}\alpha A\} + (s + ds)\{(\rho + d\rho)(V + dV)\operatorname{sen}(\alpha - d\theta)A\} = 0$$

e utilizando a continuidade (Eq. 12.50),

$$ds = 0$$

Demonstramos, assim, que o escoamento é isoentrópico. Portanto, as propriedades de estagnação são constantes e as equações das propriedades de estagnação isoentrópica local (Seção 11-3) serão úteis aqui.

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{11.20a}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{11.20b}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \tag{11.20c}$$

A Eq. 12.55, juntamente com as Eqs. 11.20a até 11.20c, pode ser usada para analisar ondas de expansão ou ondas de compressão isoentrópicas. (Não chegamos a deduzir a componente normal da quantidade de movimento — esta análise apresentada fornece um conjunto completo de equações.) Um problema envolvendo ondas de expansão está resolvido no Problema-Exemplo 12.13.

EXEMPLO 12.13 Onda de Expansão sobre um Aerofólio

O avião do Problema 12.12 (velocidade do 600 m/s no ar a 4°C e 100 kPa, com borda dianteira aguda com ângulo $\delta = 6°$) possui agora um ângulo de ataque $\alpha = 6°$. Determine as pressões nas superfícies superior e inferior do aerofólio imediatamente após a borda dianteira.

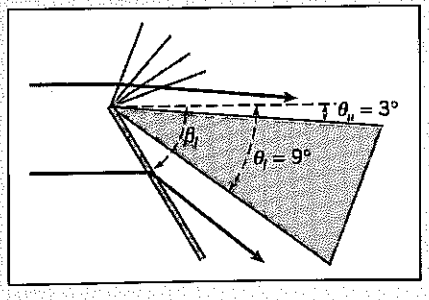
PROBLEMA-EXEMPLO 12.13

DADOS: Escoamento de ar sobre uma borda dianteira aguda com:

$P_1 = 100$ kPa $\quad \delta = 6°$

$T_1 = 4°C \quad \alpha = 6°$

$V_1 = 600$ m/s



DETERMINAR: As pressões sobre as superfícies superior e inferior.

SOLUÇÃO:

Para um ângulo de ataque de 6° de um aerofólio com ângulo de borda dianteira de 6°, os ângulos de deflexão são $\theta_u = 3°$ e $\theta_l = 9°$, conforme mostrado.

(a) Superfície superior — expansão isoentrópica

Primeiro, calcule a velocidade do som,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 277\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{N}}} = 334\ \text{m/s}$$

Em seguida, o número de Mach a jusante é

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{600\ \text{m/s}}{334\ \text{m/s}} = 1{,}80$$

Para $M_1 = 1{,}80$, a função de Prandtl-Meyer ω_1 é obtida de

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\left(M_1^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M_1^2-1}\right) \tag{12.55}$$

logo

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}(1{,}80^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{1{,}80^2-1}\right) = 20{,}7°$$

O valor da função de Prandtl-Meyer sobre a superfície superior, ω_u, é então

$$\omega_u = \omega_1 + \theta_u = 20{,}7° + 3° = 23{,}7°$$

Para este valor da função de Prandtl-Meyer, $M_{2(\text{superior})}$ é obtido a partir da Eq. 12.55:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\left(M_{2(\text{superior})}^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M_{2(\text{superior})}^2-1}\right)$$

Isto pode ser resolvido utilizando iteração manual ou interpolação, ou utilizando, por exemplo, a função *Atingir Meta* (*Excel's Goal Seek*) do *Excel*,

$$M_{2(\text{superior})} = 1{,}90$$

Finalmente, podemos determinar $p_{2(\text{superior})}$ utilizando novamente a Eq. 11.20a

$$p_{2(\text{superior})} = \frac{p_{2(\text{superior})}}{p_0}\frac{p_0}{p_1}p_1 = \left\{\left[1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} \Big/ \left[1+\frac{k-1}{2}M_{2(\text{superior})}^2\right]^{k/(k-1)}\right\}p_1$$
$$= \left\{\left[1+(0{,}2)1{,}80^2\right]^{3{,}5} \Big/ \left[1+(0{,}2)1{,}90^2\right]^{3{,}5}\right\} \times 100\ \text{kPa}$$

então,

$$p_{2(\text{superior})} = 85{,}8\ \text{kPa} \longleftarrow p_{2(\text{superior})}$$

(b) Superfície inferior — choque oblíquo

Para $M_1 = 1{,}80$ e $\theta_l = 9°$, obtemos β_l a partir de

$$\tan\theta_l = \frac{2\cot\beta_l(M_1^2\,\text{sen}^2\,\beta_l - 1)}{M_1^2(k+\cos 2\beta_l)+2} \tag{12.49}$$

e encontramos

$$\beta_l = 42{,}8°$$

Em seguida, podemos determinar $M_{1n(\text{inferior})}$,

$$M_{1_{n(\text{inferior})}} = M_1\,\text{sen}\,\beta_l = 1{,}80 \times \text{sen}\,42{,}8° = 1{,}223$$

Da razão de pressão para choque oblíquo, Eq. 12.48d, para $M_{1n(\text{inferior})} = 1{,}223$,

$$\frac{p_{2(\text{inferior})}}{p_1} = \frac{2k}{k+1}M_{1_{n(\text{inferior})}}^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2\times 1{,}4}{(1{,}4+1)}(1{,}223)^2 - \frac{(1{,}4-1)}{(1{,}4+1)} = 1{,}58$$

Assim,

$$p_{2_{(\text{inferior})}} = 1{,}58 p_1 = (1{,}58)100\,\text{kPa} = 158\,\text{kPa} \longleftarrow p_{2_{(\text{inferior})}}$$

Este Problema-Exemplo ilustra o uso da Eq. 12.55 e das relações de estagnação isoentrópica para analisar ondas de expansão isoentrópicas, e o uso da Eq. 12.49 para um choque oblíquo.

As *planilhas Excel* para ondas de expansão isoentrópicas e choques oblíquos são convenientes para realizar os cálculos.

O Problema-Exemplo 12.13 sugere uma aproximação que podemos utilizar para obter os coeficientes de sustentação e de arrasto de uma asa supersônica, ilustrada no Problema-Exemplo 12.14.

EXEMPLO 12.14 Coeficientes de Sustentação e de Arrasto de um Aerofólio Supersônico

O avião do Problema-Exemplo 12.13 possui uma seção transversal simétrica em losango (bordas dianteira e traseira agudas, com ângulo $\delta = 6°$). Para uma velocidade de 600 m/s no ar a 4°C e 100 kPa, determine a distribuição de pressão sobre as superfícies superior e inferior e os coeficientes de sustentação e de arrasto, para um ângulo de ataque $\alpha = 6°$.

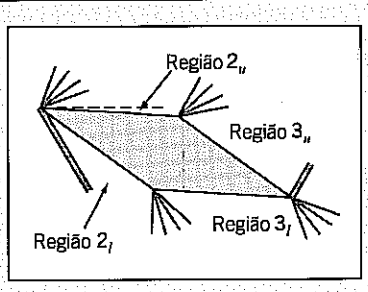
PROBLEMA-EXEMPLO 12.14

DADOS: Escoamento de ar sobre seção simétrica mostrada com:

$P_1 = 100$ kPa $\quad \delta = 6°$

$T_1 = 4°C \quad \alpha = 6°$

$V_1 = 600$ m/s



DETERMINAR: A distribuição de pressão e os coeficientes de sustentação e arrasto.

SOLUÇÃO:

Primeiro, necessitamos obter as pressões sobre as quatro superfícies do aerofólio. Já obtivemos no Problema-Exemplo 12.13 os dados para a Região 2_u e Região 2_l:

$$M_{2_{(\text{superior})}} = 1{,}90 \quad p_{2_{(\text{superior})}} = 85{,}8\,\text{kPa} \longleftarrow p_{2_{(\text{superior})}}$$

$$M_{2_{(\text{inferior})}} = 1{,}489 \quad p_{2_{(\text{inferior})}} = 158\,\text{kPa} \longleftarrow p_{2_{(\text{inferior})}}$$

(Note que $M_{2_{(\text{inferior})}} = 1{,}489$ é obtido de $M_{1_n} = 1{,}223$ no Problema-Exemplo 12.13 pelo uso direto das Eqs. 12.48a e 12.47b.) Além disso, para a Região 2_u, determinamos que a função de Prandtl-Meyer é 23,7°. Portanto, para a Região 3_u, podemos determinar o valor da função de Prandtl-Meyer a partir do ângulo de deflexão. Para as bordas dianteira e de fuga (traseira) de 6°, os ângulos do aerofólio nas superfícies superior e inferior são de 174° cada um. Desse modo, nas superfícies superior e inferior as deflexões são de 6° cada uma.

Para a Região 3_u,

$$\omega_{3_{(\text{superior})}} = \omega_{2_{(\text{superior})}} + \theta = 23{,}7° + 6° = 29{,}7°$$

Para este valor da função de Prandtl-Meyer, $M_{3_{(\text{superior})}}$ é obtido da Eq. 12.55,

$$\omega_{3_{(\text{superior})}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\left(M^2_{3_{(\text{superior})}} - 1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M^2_{3_{(\text{superior})}} - 1}\right)$$

Isto pode ser resolvido por meio de iteração manual ou por interpolação, ou usando, por exemplo, a função *Atingir Meta* (*Excel's Goal Seek*) do *Excel*,

$$M_{3_{(\text{superior})}} = 2{,}12$$

Finalmente, nós podemos determinar $p_{3(\text{superior})}$ usando repetidas vezes a Eq. 11.20a,

$$p_{3_{(\text{superior})}} = \frac{p_{3_{(\text{superior})}}}{p_0}\frac{p_0}{p_1}p_1 = \left\{\left[1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} \Big/ \left[1+\frac{k-1}{2}M_{3_{(\text{superior})}}^2\right]^{k/(k-1)}\right\}p_1$$

$$= \left\{\left[1+(0{,}2)1{,}80^2\right]^{3{,}5} \Big/ \left[1+(0{,}2)2{,}12^2\right]^{3{,}5}\right\} \times 100\ \text{kPa}$$

logo

$$p_{3_{(\text{superior})}} = 60{,}9\ \text{kPa} \longleftarrow p_{3_{(\text{superior})}}$$

Para a Região 3_l, primeiro precisamos determinar a função de Prandtl-Meyer na região anterior, Região 2_l. Para $M_{2(\text{inferior})} = 1{,}223$, determinamos a partir da Eq. 12.55,

$$\omega_{2_{(\text{inferior})}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\left(M_{2_{(\text{inferior})}}^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M_{2_{(\text{inferior})}}^2-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\left(1{,}489^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{1{,}489^2-1}\right)$$

logo

$$\omega_{2_{(\text{inferior})}} = 11{,}58°$$

Assim, para a Região 3_l,

$$\omega_{3_{(\text{inferior})}} = \omega_{2_{(\text{inferior})}} + \theta = 11{,}58° + 6° = 17{,}6°$$

e $M_{3(\text{inferior})}$ é obtido da Eq. 12.55,

$$\omega_{3_{(\text{inferior})}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\left(M_{3_{(\text{inferior})}}^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M_{3_{(\text{inferior})}}^2-1}\right)$$

Mais uma vez, isto pode ser resolvido por iteração manual, interpolação ou pela utilização, por exemplo, da função *Atingir Meta* (*Excel's Goal Seek*) do *Excel*,

$$M_{3_{(\text{inferior})}} = 1{,}693$$

Finalmente, podemos determinar $p_{3(\text{inferior})}$ usando repetidas vezes a Eq. 11.20a,

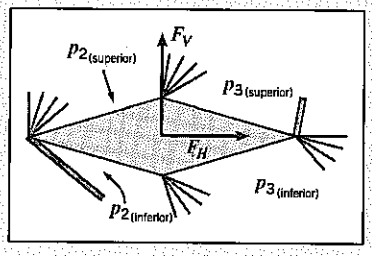
$$p_{3_{(\text{inferior})}} = \frac{p_{3_{(\text{inferior})}}}{p_{0_2}}\frac{p_{0_2}}{p_{2_{(\text{inferior})}}}p_{2_{(\text{inferior})}} = \left\{\left[1+\frac{k-1}{2}M_{2_{(\text{inferior})}}^2\right]^{k/(k-1)} \Big/ \left[1+\frac{k-1}{2}M_{3_{(\text{inferior})}}^2\right]^{k/(k-1)}\right\}p_{2_{(\text{inferior})}}$$

$$= \left\{\left[1+(0{,}2)1{,}489^2\right]^{3{,}5} \Big/ \left[1+(0{,}2)1{,}693^2\right]^{3{,}5}\right\} \times 158\ \text{kPa}$$

Então,

$$p_{3_{(\text{inferior})}} = 117\ \text{kPa} \longleftarrow p_{3_{(\text{inferior})}}$$

(Note que não podemos usar p_0, a pressão de estagnação do escoamento de entrada para o cálculo dessa pressão, porque o escoamento experimentou um choque antes de atingir a superfície inferior.)



Para calcular os coeficientes de sustentação e de arrasto, necessitamos das forças de sustentação e de arrasto.

Primeiro, determinamos as forças vertical e horizontal com respeito às coordenadas ortogonais ao aerofólio.

A força vertical (considerando que a corda c e a envergadura s são em metros) é dada por

$$F_V = s\frac{c}{2}\left\{\left(p_{2(\text{inferior})} + p_{3(\text{inferior})}\right) - \left(p_{2(\text{superior})} + p_{3(\text{superior})}\right)\right\}$$

$$F_V = s(\text{m})\frac{c(\text{m})}{2}\{(158 + 117) - (85{,}8 + 60{,}9)\}(\text{kPa}) = 64{,}2\ sc\ \text{kN}$$

e a força horizontal é dada por

$$F_H = s\frac{c}{2}\tan 3°\left\{\left(p_{2(\text{superior})} + p_{2(\text{inferior})}\right) - \left(p_{3(\text{superior})} + p_{3(\text{inferior})}\right)\right\}$$

$$F_H = s(\text{m})\frac{c(\text{m})}{2}\tan 3°\{(85{,}8 + 158) - (60{,}9 + 117)\}(\text{kPa}) = 1{,}73\ sc\ \text{kN}$$

As forças de sustentação e de arrasto (por unidade de área plana) são, portanto,

$$F_L = F_V \cos 6° - F_H \operatorname{sen} 6° = 63{,}6\, sc\ \text{kN}$$

e

$$F_D = F_V \operatorname{sen} 6° + F_H \cos 6° = 8{,}42\, sc\ \text{kN}$$

Os coeficientes de sustentação e de arrasto requerem a massa específica do ar,

$$\rho = \frac{p}{RT} = 100 \times 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{277\text{K}} = 1{,}258\ \text{kg/m}^3$$

O coeficiente de sustentação é, então,

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 sc} = 2 \times 63{,}6 \times 10^3\ \text{N} \times \frac{\text{m}^3}{1{,}258\ \text{kg}} \times \frac{\text{s}^2}{(600)^2\ \text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2} = 0{,}281 \longleftarrow C_L$$

e o coeficiente de arrasto é

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 sc} = 2 \times 8{,}42 \times 10^3\ \text{N} \times \frac{\text{m}^3}{1{,}258\ \text{kg}} \times \frac{\text{s}^2}{(600)^2\ \text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2} = 0{,}037 \longleftarrow C_D$$

(Note que, em vez de usar $^1/_2\,\rho V^2$ no denominador dos coeficientes, poderíamos ter usado $^1/_2 kp\, M^2$.)

A razão sustentação-arrasto é aproximadamente 7,6.

Este Problema-Exemplo ilustra o uso das equações de choque oblíquo e de onda de expansão isoentrópica para determinar a distribuição de pressão sobre um aerofólio.

- ✓ Nós não precisamos analisar o escoamento após as ondas de expansão de fuga e o choque oblíquo — diferentemente do escoamento subsônico, a condição a jusante não tem efeito sobre o aerofólio.
- ✓ Diferentemente de um escoamento subsônico, um escoamento supersônico pode gerar arrasto mesmo na ausência de camadas-limites e de separação de escoamento.
- ✓ Note que, diferentemente de um escoamento subsônico, um escoamento supersônico *pode* transpor uma quina de borda-viva, mesmo se incluirmos o efeito de uma camada-limite viscosa (o que não fizemos aqui). Isso ocorre porque um escoamento supersônico em expansão tem um gradiente de pressão negativo, i. e., *não* é adverso!
- ✓ Um aerofólio real não terá, provavelmente, superfícies planas, de modo que são necessárias técnicas mais sofisticadas do que as que cobrimos aqui. Contudo, este exemplo ilustra o tipo de resultado a ser esperado na análise de um aerofólio supersônico.

As *planilhas Excel* para choques oblíquos e para expansão de ondas isoentrópicas são convenientes para realizar os cálculos.

12-8 RESUMO

Neste capítulo, nós:

- ✓ Desenvolvemos um conjunto de equações de governo (continuidade, a equação da quantidade de movimento, a primeira e a segunda leis da termodinâmica, e equações de estado) para escoamento unidimensional de um fluido compressível (em particular, de um gás ideal), quando ele pode ser afetado por variação de área, atrito, transferência de calor, e choques normais.
- ✓ Simplificamos essas equações para escoamento isoentrópico afetado somente por variação de área, e desenvolvemos relações isoentrópicas para analisar tais escoamentos.
- ✓ Simplificamos as equações para escoamento afetado apenas por atrito, e desenvolvemos as relações de linha de Fanno para analisar tais escoamentos.
- ✓ Simplificamos as equações para escoamento afetado apenas por transferência de calor, e desenvolvemos as relações de linha de Rayleigh para analisar tais escoamentos.
- ✓ Simplificamos as equações para escoamento através de um choque normal, e desenvolvemos relações de choque normal para analisar tais escoamentos.
- ✓ Introduzimos alguns conceitos básicos de escoamento bidimensional: choques oblíquos e ondas de expansão.

Enquanto investigávamos os escoamentos supracitados, adquirimos conhecimento sobre alguns fenômenos interessantes dos escoamentos compressíveis, incluindo:

- ✓ O uso de gráficos *Ts* na visualização do comportamento do escoamento.
- ✓ O escoamento através, e a forma necessária de, bocais e difusores subsônicos e supersônicos.
- ✓ O fenômeno do escoamento bloqueado em bocais convergentes e bocais CD, e as circunstâncias sob as quais as ondas de choque são desenvolvidas em bocais CD.
- ✓ *O fenômeno de escoamento bloqueado em escoamentos com atrito e em escoamentos com transferência de calor.
- ✓ O cálculo de pressões e de coeficientes de sustentação e arrasto para um aerofólio supersônico.

REFERÊNCIAS

1. *HP 48G Series User's Guide*, Hewlett-Packard Company, Corvallis Division, 1000 N.E. Circle Blvd., Corvallis, OR 97330.
2. *Isentropic Calculator* (http://www.aoe.vt.edu/aoe3114/calc.html), William Devenport, Aerospace and Ocean Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University.
3. H R.,
nautical Division, 1956.
4. Runstadler, P.W., Jr., "Diffuser Data Book," Creare, Inc., Hanover, NH, Technical Note 186, 1975.
5. Seddon, J., and E. L. Goldsmith, *Intake Aerodynamics*. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985.
6. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. 1. New York: Ronald Press, 1953.
7. Zucrow, M. J., and J. D. Hoffman, *Compressible Flow*, Vol. 1. New York: Wiley, 1976.
8. Coles, D., *Channel Flow of a Compressible Fluid*, NCFMF video.
9. Baals, D. W., and W. R. Corliss, *Wind Tunnels of NASA*. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-440, 1981.
10. Pope, A., and K. L. Goin, *High-Speed Wind Tunnel Testing*. New York: Krieger. 1978.
11. Glass, I.I., "Some Aspects of Shock-Wave Research," *AIAA J., 25*, 2, February 1987, pp. 214–229.

* Este tópico aplica-se a seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

PROBLEMAS

A maioria dos problemas neste capítulo envolve cálculos de Fanno, Rayleigh, choque normal, choque oblíquo, isoentrópicos ou de efeitos de ondas de expansão isoentrópicas. O CD contém planilhas associadas do *Excel* para cada um desses fenômenos, e sua utilização é recomendada na solução de problemas (o CD também contém funções adicionais do *Excel* para instalação opcional). Para evitar duplicação desnecessária, o ícone do CD aparecerá marcando apenas os problemas para os quais o uso do *Excel* traz um benefício *adicional* (por exemplo, para a elaboração de gráficos).

12.1 Vapor escoa isoentropicamente através de um bocal, em regime permanente. Numa seção a montante, onde a velocidade é desprezível, a temperatura e a pressão são 880°F e 875 psia. Numa seção onde o diâmetro do bocal é 0,50 in, a pressão do vapor é 290 psia. Determine a velocidade e o número de Mach nesta seção e a vazão mássica de vapor. Esboce a forma do canal.

12.2 Vapor escoa isoentropicamente através de um bocal, em permanente. Numa seção a montante, onde a velocidade é desprezível, a temperatura e a pressão são 900°F e 900 psia. Numa seção onde o diâmetro do bocal é 0,188 in, a pressão do vapor é 600 psia. Determine a velocidade e o número de Mach nesta seção e a vazão em massa de vapor. Esboce a forma do canal.

12.3 Em uma seção de um canal, a pressão é 20 psia, a temperatura é 50°F, e a velocidade é 388 ft/s. Para o escoamento isoentrópico de ar, determine o número de Mach no ponto onde a pressão é 6 psia. Esboce a forma do canal.

12.4 Em uma seção de um canal, a pressão é 200 kPa (abs), a temperatura é 32°C e a velocidade é 525 m/s. Em uma seção a jusante, o número de Mach é 2. Determine a pressão no local a jusante para o escoamento isoentrópico de ar. Esboce a forma do canal.

12.5 Ar escoa isoentropicamente através de um canal, em regime permanente. Na seção ①, onde a área transversal é 0,02 m², o ar está a 40,0 kPa (abs), 60°C e $M = 2{,}0$. Na seção ② a jusante, a velocidade é 519 m/s. Calcule o número de Mach na seção ②. Esboce a forma do canal entre as seções ① e ②.

12.6 Ar, com pressão absoluta de 60,0 kPa e 27°C, entra em um canal a 486 m/s, onde $A = 0{,}02$ m². Na seção ② a jusante, $p = 78{,}8$ kPa (abs). Considerando escoamento isoentrópico, calcule o número de Mach na seção ②. Esboce a forma do canal.

12.7 Ar escoa isoentropicamente, em regime permanente, através de um canal a 65 kg/s, na seção onde $A = 0{,}513$ m², $M = 2$, $T = 0$°C e $p = 15{,}0$ kPa (abs). Determine a velocidade e a área da seção transversal a jusante, onde $T = 106$°C. Esboce a forma do canal.

12.8 Para o escoamento isoentrópico de ar, em uma seção de um canal onde $A = 0{,}25$ m², $p = 15{,}0$ kPa (abs), $T = 10$°C e $V = 590$ m/s, determine o número de Mach e a vazão mássica. Em uma seção a jusante, a temperatura é 137°C e o número de Mach é 0,75. Determine a área transversal e a pressão nesta seção. Esboce a forma do canal.

12.9 Um canal é projetado para expandir ar isoentropicamente até a pressão atmosférica, a partir de um grande tanque no qual as propriedades são mantidas constantes em 5°C e 304 kPa (abs). A vazão desejada é 1 kg/s. Considerando que a passagem tem 5 m de comprimento e que o número de Mach aumenta linearmente com a posição no canal, trace o gráfico da área da seção transversal e da pressão como funções da posição.

12.10 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente para dentro de um recipiente onde a pressão é 240 kPa. O ar entra no bocal com velocidade desprezível a uma pressão de 406 kPa (abs) e uma temperatura de 95°C. Determine a vazão mássica através do bocal para uma área de garganta de 0,01 m².

12.11 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente para dentro de um recipiente onde a pressão é 33 psia. Se a pressão é 50 psia e a velocidade é 500 ft/s na posição do bocal em que o número de Mach é 0,4, determine a pressão, a velocidade e o número de Mach na garganta do bocal.

12.12 Ar, escoando isoentropicamente através de um bocal convergente, descarrega para a atmosfera. Na seção onde a pressão absoluta é 250 kPa, a temperatura é 20°C e a velocidade do ar é 200 m/s. Determine a pressão na garganta do bocal.

12.13 Ar, escoando isoentropicamente através de um bocal convergente, descarrega para a atmosfera. Em uma seção, $A = 0{,}05$ m², $T = 3{,}3$°C e $V = 200$ m/s. Se o escoamento está bloqueado, determine a pressão e o número de Mach nessa seção. Qual é a área de garganta? Qual é a vazão mássica?

12.14 Ar escoa de um grande tanque (p = 650 kPa(abs), T = 550°C) através de um bocal convergente com área de garganta de 600 mm², e descarrega para a atmosfera. Determine a vazão mássica do escoamento isoentrópico através do bocal.

12.15 Ar, com p_0 = 650 kPa (abs) e T_0 = 350 K, escoa isoentropicamente através de um bocal convergente. Na seção em que a área do bocal é 2,6 × 10⁻³ m², o número de Mach é 0,5. O bocal descarrega para uma contrapressão de 270 kPa (abs). Determine a área de saída do bocal.

12.16 Um bocal convergente é conectado a um grande tanque que contém ar comprimido a 15°C. A área de saída do bocal é 0,001 m². A descarga é feita para a atmosfera. Para obter uma imagem fotográfica satisfatória da configuração do escoamento deixando o bocal, é necessário que a pressão no plano de saída seja superior a 325 kPa (manométrica). Que pressão é requerida no tanque? Que vazão mássica de ar deve ser fornecida para que o sistema funcione continuamente? Mostre os pontos dos estados de estagnação e estáticos num diagrama *Ts*.

12.17 Ar, a 0°C, está contido em um grande tanque sobre um foguete espacial. Uma seção convergente com área de saída de 10⁻³ m² está instalada no tanque, através da qual o ar sai para o espaço à taxa de 2 kg/s. Quais são a pressão no tanque e a pressão, temperatura e velocidade na saída?

12.18 Um grande tanque fornece ar para um bocal convergente que descarrega para a pressão atmosférica. Admita que o escoamento seja reversível e adiabático. Para qual faixa de pressões no tanque o escoamento na saída do bocal será sônico? Se a pressão no tanque for 600 kPa (abs) e a temperatura 600 K, qual será a vazão mássica através do bocal que tem área de saída de 1,29 × 10⁻³ m²?

12.19 Um grande tanque é inicialmente evacuado até 27 in Hg (vácuo). (As condições ambientes são 29,4 in Hg e 70°F.) Em t = 0, um orifício de 0,25 in de diâmetro é aberto na parede do tanque; a área da veia contraída é 65% da área geométrica. Calcule a vazão mássica pela qual o ar entra inicialmente no tanque. Mostre o processo num diagrama *Ts*. Faça um gráfico esquemático da vazão mássica como função do tempo. Explique por que a relação é não-linear.

12.20 Uma cavidade esférica de 18 in de diâmetro está evacuada inicialmente. A cavidade deve ser preenchida com ar para um experimento de combustão. A pressão deve ser 5 psia, medida após a temperatura atingir T_{atm}. Considere que a válvula na cavidade seja um bocal convergente com diâmetro da garganta de 0,05 in e que o ar ambiente está na condição padrão. Por quanto tempo deve a válvula permanecer aberta para que se obtenha a pressão final desejada na cavidade? Calcule a variação de entropia para o ar na cavidade.

12.21 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente instalado em um grande tanque onde a pressão absoluta é 171 kPa e a temperatura é 27°C. Na seção de entrada o número de Mach é 0,2. O bocal descarrega para a atmosfera; a área de descarga é 0,015 m². Determine a magnitude e o sentido da força que deve ser aplicada para manter o bocal no lugar.

12.22 Ar, escoando em um duto (A = 5 × 10⁻⁴ m²), está a p = 300 kPa (abs) e tem vazão $\dot{m}$ = 0,25 kg/s. Determine a temperatura de estagnação isoentrópica local. Se a área transversal da seção do duto fosse reduzida a jusante, determine a máxima redução percentual de área permitida, sem redução da vazão (considere escoamento isoentrópico). Determine a velocidade e a pressão no local de área mínima.

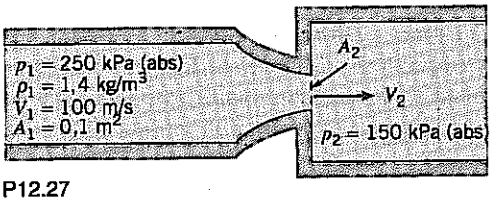
12.23 Considere um "carrinho foguete" de propulsão a jato que é suprido por um tanque de ar comprimido sobre o carrinho. Inicialmente, o ar no tanque está a 1,3 MPa (abs) e 20°C, e a massa do carrinho e tanque é M_0 = 25 kg. O ar é expelido através de um bocal convergente com área de saída A_e = 30 mm². A resistência de rolamento do carrinho é F_R = 6 N; a resistência aerodinâmica é desprezível. No instante seguinte ao início do fluxo de ar através do bocal: (a) calcule a pressão no plano de saída do bocal, (b) avalie a vazão mássica de ar através do bocal, e (c) calcule a aceleração do conjunto carrinho/tanque.

12.24 Um foguete experimental de propulsão a jato, de 25 kg, deve ser lançado no espaço por um lançador espacial. A temperatura do ar no tanque do foguete é 125°C. Uma seção convergente com área de saída de 25 mm² é instalada no tanque, através da qual o ar é descarregado no espaço a uma taxa de 0,05 kg/s. Quais são a pressão no tanque e a pressão, temperatura e velocidade do ar na saída, quando o foguete é lançado? Qual é a aceleração inicial do foguete?

12.25 Um cilindro de gás usado em soldagem contém hélio a 3000 psig na temperatura ambiente. O cilindro recebe uma pancada, a válvula é quebrada e o hélio escapa através de uma passagem convergente. A área mínima de escoamento é 0,10 in² na seção de saída, onde o escoamento de gás é uniforme. Determine (a) a vazão mássica na qual o gás sai do cilindro e (b) a aceleração instantânea do cilindro (considere que o eixo do cilindro é horizontal e que sua massa é 125 lb). Mostre os estados de estagnação e estáticos e o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

12.26 Um bocal convergente é aparafusado (flangeado) na lateral de um grande tanque. O ar dentro do tanque é mantido à pressão e temperatura constantes de 50 psia e 100°F. A área de entrada do bocal é 10 in² e a área de saída é 1 in². O bocal descarrega para a atmosfera. Para escoamento isoentrópico no bocal, determine a força total nos parafusos e indique se eles estão sob tração ou compressão.

12.27 Um gás ideal, com $k = 1{,}4$, escoa isoentropicamente através do bocal convergente mostrado e descarrega para dentro de um grande duto onde a pressão é $p_2 = 150$ kPa (abs). O gás *não* é ar e a sua constante, R, é desconhecida. O escoamento é permanente e uniforme em todas as seções transversais. Determine a área de saída do bocal, A_2, e a velocidade de saída do jato, V_2.



P12.27

12.28 Um tanque de ar, termicamente isolado, com $\forall = 107$ ft³, é usado em uma instalação de purga (*blow-down*). Inicialmente, o tanque é pressurizado até 400 psia, a 800°R. A vazão mássica do ar do tanque é uma função do tempo; durante os primeiros 30 segundos de purga, 64,5 lbm de ar deixam o tanque. Determine a temperatura do ar no tanque após 30 s de descarga. Estime a área da garganta do bocal.

12.29 Um avião de transporte a jato, com cabine pressurizada, viaja a 11 km de altitude. A temperatura e a pressão na cabine são, inicialmente, 25°C e o equivalente a 2,5 km de altitude. O volume interior da cabine é 25 m³. Ar escapa através de um pequeno orifício com área efetiva de escoamento de 0,002 m². Calcule o tempo requerido para que a pressão na cabine decresça de 40%. Trace um gráfico da pressão na cabine como uma função do tempo.

12.30 Um grande tanque termicamente isolado, pressurizado a 620 kPa (manométrica), fornece ar para um bocal convergente que descarrega para a atmosfera. A temperatura inicial no tanque é 127°C. Quando iniciado o escoamento através do bocal, qual é o número de Mach no plano de saída do bocal? Qual é a pressão no plano de saída quando iniciado o escoamento? Em que condição o número de Mach no plano de saída será modificado? Como variará a pressão no plano de saída com o tempo? Como variará a vazão através do bocal com o tempo? Qual a sua estimativa para a temperatura do ar no tanque quando a vazão de ar através do bocal aproxima-se de zero?

12.31 Ar escapa de um pneu de bicicleta de alta pressão através de um furo com diâmetro $d = 0{,}254$ mm. A pressão inicial no pneu é $p_1 = 620$ kPa (manométrica). (Considere temperatura constante em 27°C.) O volume interno do pneu é aproximadamente $4{,}26 \times 10^{-4}$ m³, e é constante. Estime o tempo necessário para a pressão no pneu cair para 310 kPa (manométrica). Calcule a variação na entropia específica do ar no pneu durante esse processo. Trace um gráfico da pressão no pneu como uma função do tempo.

12.32 Um bocal convergente-divergente está conectado a um tanque de ar muito grande no qual a pressão é 21 psia e a temperatura é 100°F. O bocal descarrega para a atmosfera onde a pressão é 14,7 psia. A área de saída do bocal é 1 in². Qual é a vazão através do bocal? Considere escoamento isoentrópico.

12.33 Na condição de projeto do sistema do Problema 12.32, o número de Mach na saída é $M_e = 2{,}0$. Determine a pressão no tanque do Problema 12.32 (mantendo a temperatura constante) para essa condição. Qual é a vazão? Qual é a área de garganta?

12.34 Um bocal convergente-divergente, projetado para expandir ar até $M = 3{,}0$, tem área de saída de 250 mm². O bocal está aparafusado na lateral de um grande tanque e descarrega para a atmosfera padrão. O ar no tanque está pressurizado a 4,5 MPa (manométrica), a 750 K. Considere escoamento isoentrópico no bocal. Avalie a pressão no plano de saída do bocal. Calcule a vazão mássica de ar através do bocal.

12.35 Um bocal convergente-divergente, com área de garganta de 2 in², está conectado a um grande tanque no qual o ar é mantido a uma pressão de 80 psia e a uma temperatura de 60°F. Sabendo que o bocal deve operar nas condições de projeto (o escoamento é isoentrópico) e que a pressão ambiente fora do bocal é 12,9 psia, calcule a área de saída do bocal e a vazão mássica.

12.36 Ar, com pressão de estagnação de 7,20 MPa (abs) e temperatura de estagnação de 1100 K, escoa isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente que tem área de garganta de 0,01 m². Determine a velocidade e a vazão mássica na seção a jusante onde o número de Mach é 4,0.

12.37 Ar deve ser expandido através de um bocal convergente-divergente em um processo adiabático, sem atrito, de uma pressão de 1,10 MPa (abs) e temperatura de 115°C para uma pressão de 141 kPa (abs). Determine as áreas de garganta e de saída para um bocal bem projetado, livre de choque, se a vazão mássica for de 2 kg/s.

12.38 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente conectado a um grande tanque no qual a pressão é 251 psia e a temperatura é 500°R. O bocal está operando nas condições de projeto para as quais a pressão na saída do bocal, p_e, é igual à pressão atmosférica local, p_a. A área de saída do bocal é $A_e = 1{,}575$ in². Calcule a vazão através do bocal. Trace um gráfico da vazão mássica para um aumento progressivo da temperatura do tanque até 2000°R (todas as pressões permanecendo as mesmas). Explique esse resultado (por exemplo, compare as vazões mássicas a 500°R e 2000°R).

12.39 Nitrogênio, à pressão e temperatura de 371 kPa (abs) e 400 K, entra com velocidade desprezível em um bocal. O jato de saída é dirigido contra uma grande placa plana perpendicular ao eixo do jato. O escoamento deixa o bocal à pressão atmosférica. A área de saída é 0,003 m². Determine a força requerida para manter a placa no lugar.

12.40 Um pequeno motor de foguete a combustível sólido é testado numa bancada de empuxo. A pressão e temperatura na câmara são 600 psia e 6000°R. O bocal de propulsão é projetado para expandir os gases de descarga, isoentropicamente, até uma pressão de 10,0 psia. A área de saída do bocal é 0,60 ft². Trate o gás como ideal com $k = 1{,}2$ e $R = 60{,}0$ ft·lbf/(lbm·°R). Determine a vazão mássica do gás propelente e a força de empuxo exercida contra a bancada.

12.41 O motor de um pequeno foguete, alimentado com hidrogênio e oxigênio, é testado em uma bancada de empuxo a uma altitude simulada de 10 km. O motor é operado nas condições de estagnação da câmara de 1500 K e 8,0 MPa (manométrica). O produto da combustão é vapor d'água, que pode ser tratado como um gás ideal. A expansão ocorre através de um bocal convergente-divergente com número de Mach de projeto de 3,5 e área de saída de 700 mm². Avalie a pressão no plano de saída do bocal. Calcule a vazão mássica de gás de descarga. Determine a força exercida pelo motor do foguete sobre a bancada de empuxo.

12.42 Um motor de foguete é alimentado com hidrogênio e oxigênio. A temperatura e a pressão absolutas na câmara são 3300 K e 6,90 MPa. O bocal é projetado para expandir os gases de descarga, isoentropicamente, até uma pressão correspondente a uma altitude de 10 km num dia padrão. O empuxo produzido pelo motor deve ser de 100 kN nas condições de projeto. Trate os gases de descarga como vapor d'água e considere comportamento de gás ideal. Determine a vazão mássica do propelente necessária para produzir o empuxo desejado, a área de saída do bocal e a razão de áreas, A_e/A_t.

12.43 Um cartucho de CO_2 é usado para propelir um "carrinho foguete". Gás comprimido, armazenado a 5000 psig e 65°F, é expandido através de um bocal convergente de contorno suave cuja garganta tem 0,020 in de diâmetro. A contrapressão é atmosférica. Calcule a pressão na garganta do bocal. Avalie a vazão mássica de dióxido de carbono através do bocal. Determine o empuxo disponível para impulsionar o carrinho. De quanto aumentaria o empuxo, se uma seção divergente fosse acrescentada ao bocal para expandir o gás até a pressão atmosférica? Qual é a área de saída? Mostre os estados de estagnação e estáticos e os processos em um diagrama *Ts*.

12.44 Considere a opção convergente-divergente do Problema 12.43. A que pressão o ar comprimido deveria ser submetido (mantendo a temperatura a 65°F) para desenvolver um empuxo de 3 lbf? Admita escoamento isentrópico.

12.45 Ar ambiente é insuflado para dentro de um duto de área constante, termicamente isolado, através de um bocal convergente de contorno suave. As condições ambientes são $T = 27$°C e $p = 101$ kPa (abs). O diâmetro do duto é $D = 25$ mm. A pressão na entrada do duto (saída do bocal) é $p_1 = 90{,}5$ kPa. Determine (a) a vazão mássica no duto e (b) a faixa de pressões de saída para as quais o escoamento na saída do duto estará bloqueado.

12.46 Um dispositivo de escoamento de linha de Fanno, em um laboratório de mecânica dos fluidos, consiste em um tubo de latão liso com 7,16 mm de diâmetro interno, alimentado por um bocal divergente. A temperatura no laboratório e a pressão não corrigida lida no barômetro são 23,5°C e 755,1 mmHg. A pressão na saída do bocal convergente (entrada do duto de área constante) é –20,8 mmHg (manométrica). Calcule o número de Mach na entrada do tubo de área constante. Calcule a vazão mássica no tubo. Avalie a pressão num local no tubo onde o número de Mach é 0,4.

12.47 Ar escoa através de um tubo liso de 4 in de diâmetro, bem isolado termicamente, a 600 lbm/min. Em uma seção, o ar está a 100 psia e 80°F. Determine a pressão mínima e a velocidade máxima que podem ocorrer no tubo.

12.48 Ar escoa de um grande tanque através de um bocal convergente conectado a um duto de área constante, termicamente isolado. O escoamento é adiabático e em regime permanente. O bocal pode ser considerado sem atrito. O ar no tanque está a $p = 1{,}00$ MPa (abs) e $T = 125°C$. A pressão absoluta na saída do bocal (entrada do duto) é 784 kPa. Determine a pressão na extremidade do duto, se a temperatura ali é 65°C. Determine o aumento de entropia.

12.49 Medições de escoamento compressível são feitas em um longo tubo, liso, com diâmetro interno de 7,16 mm. O ar é extraído do ambiente (20°C e 101 kPa) por uma bomba de vácuo à frente do tubo. As leituras de pressões ao longo do tubo tornam-se constantes quando a pressão de jusante é reduzida para 626 mmHg (vácuo) ou abaixo. Para essas condições, determine (a) a máxima vazão mássica possível através do tubo, (b) a pressão de estagnação do ar deixando o tubo, e (c) a variação de entropia do ar no tubo. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estáticos e o processo em um diagrama *Ts*.

12.50 Ar é extraído da atmosfera (20°C e 101 kPa) através de um bocal convergente para dentro de um tubo longo, termicamente isolado, de área constante e com diâmetro interno de 20 mm. O escoamento no bocal é isoentrópico. A pressão na entrada do tubo de seção constante é $p_1 = 99{,}4$ kPa. Avalie a vazão mássica através do tubo. Calcule T^* e p^* para o processo isoentrópico. Calcule T^* e p^* para o escoamento deixando o tubo de seção constante. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estáticos correspondentes num diagrama *Ts*.

12.51 Um bocal convergente-divergente descarrega ar para dentro de um tubo termicamente isolado com área $A = 650$ mm². Na entrada do tubo, $p = 128$ kPa (abs), $T = 39°C$ e $M = 2{,}0$. Para escoamento sem choque até um número de Mach unitário na saída do tubo, calcule a temperatura de saída, a força líquida do fluido sobre o tubo e a variação de entropia.

12.52 Considere o escoamento adiabático de ar em um tubo de área constante com atrito. Em uma seção do tubo, $p_0 = 100$ psia, $T_0 = 500°R$ e $M = 0{,}70$. Se a área da seção transversal for 1 ft² e o número de Mach na saída for $M_2 = 1$, qual será a força de atrito exercida pelo tubo sobre o fluido?

12.53 Ar escoa através de um bocal convergente e, em seguida, em um trecho de tubo isolado termicamente. O ar é fornecido por um tanque no qual a temperatura é constante em 15°C e a pressão é variável. A extremidade de saída do duto descarrega para a atmosfera. No momento em que o escoamento de saída torna-se bloqueado, medições de pressão mostram que a pressão na entrada do duto e o número de Mach são 53,2 psia e 0,30. Determine a pressão e a temperatura no tanque, a pressão de estagnação e a vazão mássica do escoamento de saída, sabendo que o diâmetro do tubo é 0,249 in. Mostre, num diagrama *Ts*, o efeito de elevar a pressão no tanque para 100 psia. Esboce a distribuição de pressão *versus* distância ao longo do canal para essa nova condição de escoamento.

12.54 Deseja-se construir um túnel de vento supersônico usando um conjunto de bocal termicamente isolado e duto de área constante. A operação deve ser livre de choque, com $M_1 = 2{,}1$ na entrada da seção de teste e $M_2 = 1{,}1$ na saída da seção de teste. As condições de estagnação são $T_0 = 295$ K e $p_0 = 101$ kPa (abs). Calcule a pressão e a temperatura de saída e a variação de entropia através da seção de teste.

12.55 Considere o canal de laboratório para escoamento de linha de Fanno do Problema 12.46. Admita que as condições no laboratório são 22,5°C e 760 mmHg (não corrigido). A leitura do manômetro, em uma tomada de pressão na extremidade do bocal convergente, é –11,8 mmHg (manométrica). Calcule o número de Mach nesse local. Determine o comprimento de duto requerido para atingir escoamento bloqueado. Calcule a temperatura e a pressão de estagnação no estado bloqueado no duto de área constante.

12.56 Para as condições do Problema 12.48, determine o comprimento, *L*, de tubo de aço comercial de 50 mm de diâmetro entre as seções 1 e 2.

12.57 Ar escoa em um duto termicamente isolado. Em uma seção, a temperatura, a pressão absoluta e a velocidade são 200°C, 2,00 MPa e 140 m/s. Determine a temperatura nesse duto onde a pressão caiu para 1,26 MPa (abs) como um resultado do atrito. Se o duto ($e/D = 0{,}0003$) tem 150 mm de diâmetro, determine a distância entre as duas seções.

12.58 Para as condições do Problema 12.52, determine o comprimento do duto. Considere que o duto é circular e feito de aço comercial. Trace as variações de pressão e do número de Mach *versus* a distância ao longo do duto.

12.59 Considere o escoamento descrito no Problema-Exemplo 12.7. Usando as funções para escoamento de linha de Fanno de um gás ideal, trace a pressão estática, a temperatura e o número de Mach *versus L/D* medido a partir da entrada do tubo; prossiga até que a condição de bloqueio seja alcançada.

12.60 Usando as coordenadas T/T_0 e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, trace a linha de Fanno começando com as condições de entrada especificadas no Problema-Exemplo 12.7. Prossiga até $M = 1$.

12.61 Usando as coordenadas T/T^* e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, trace a linha de Fanno para escoamento de ar para $0{,}1 < M < 3{,}0$.

12.62 Ar escoa através de um trecho de 40 ft de duto termicamente isolado e de área constante com $D = 2{,}12$ ft. A rugosidade relativa é $e/D = 0{,}002$. Na entrada do duto, $T_1 = 100°F$ e $p_1 = 17{,}0$ psia. Num local a jusante, $p_2 = 14{,}7$ psia e o escoamento é subsônico. Há informação suficiente para resolver para M_1 e M_2? Prove a sua resposta graficamente. Determine a vazão mássica no duto e T_2.

12.63 Ar, trazido para dentro de um tubo através de um bocal convergente-divergente, tem, inicialmente, temperatura e pressão de estagnação de 1000°R e 200 psia. O escoamento no bocal é isoentrópico; o escoamento no tubo é adiabático. Na junção entre o bocal e o tubo a pressão é 2,62 psia. O tubo tem 4 ft de comprimento e 1 in de diâmetro. Sabendo que o número de Mach na saída é igual a 1, determine o fator de atrito médio para todo o comprimento do tubo. Calcule a variação de pressão entre a entrada e a saída do tubo.

12.64 Para as condições do Problema 12.51, determine o comprimento do duto. Considere que o duto é circular e feito de aço comercial. Trace as variações de pressão e do número de Mach *versus* a distância ao longo do duto.

12.65 Começando com as condições de entrada do Problema 12.51, e usando as coordenadas T/T_0 e $(s - s^*)/c_p$, trace os ramos supersônico e subsônico da linha de Fanno.

12.66 Um duto liso de área constante ($D = 150$ mm) deve ser alimentado por um bocal convergente-divergente, a partir de um tanque contendo ar a 295 K e 1,0 MPa (abs). Uma operação livre de choque é desejada. O número de Mach na entrada do duto deve ser 2,1 e o número de Mach na saída deve ser 1,4. O conjunto todo será isolado termicamente. Determine (a) a pressão requerida na saída do duto, (b) o comprimento requerido do duto, e (c) a variação na entropia específica. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estático e a linha do processo em um diagrama Ts.

***12.67** Em gasodutos longos de área constante, como os usados para gás natural, a temperatura é praticamente constante. Considere que o gás deixa uma estação de bombeamento a 50 psia e 70°F, com $M = 0{,}10$. Para a seção ao longo do tubo onde a pressão caiu para 20 psia, calcule o número de Mach do escoamento. Calor é adicionado ou removido do gás no trecho entre as tomadas de pressão? Justifique a sua resposta: Esboce o processo em um diagrama Ts. Indique (qualitativamente) T_{0_1}, T_{0_2} e p_{0_2}.

***12.68** Ar entra em um canal horizontal de área constante a 200°F, 600 psia e 350 ft/s. Determine a pressão limite para escoamento isotérmico. Compare com a pressão limite para escoamento adiabático com atrito.

***12.69** Ar entra em um tubo de 6 in de diâmetro a 60°F, 200 psia e 190 ft/s. O fator de atrito médio é 0,016. O escoamento é isotérmico. Calcule o número de Mach local e a distância, a partir da entrada do canal, do ponto onde a pressão atinge 75 psia.

***12.70** Um tubo de aço limpo tem 950 ft de comprimento e 5,25 in de diâmetro interno. Ar a 80°F, 120 psia e 80 ft/s entra no tubo. Calcule e compare as quedas de pressão através do tubo para escoamento (a) incompressível, (b) isotérmico e (c) adiabático.

***12.71** Gás natural (massa molecular $M_m = 18$ e $k = 1{,}3$) deve ser bombeado através de um tubo com diâmetro interno de 36 in, que liga duas estações de compressores separadas por uma distância de 40 milhas. Na estação de montante a pressão não deve exceder 90 psig, e na estação de jusante deve ser de, pelo menos, 10 psig. Calcule a máxima vazão em volume permitida (ft³/dia a 70°F e 1 atm), considerando troca de calor suficiente através do tubo para manter o gás a 70°F.

12.72 Considere o escoamento sem atrito de ar em um duto de área constante. Na seção ①, $M_1 = 0{,}50$, $p_1 = 1{,}10$ MPa (abs) e $T_{0_1} = 333$ K. Devido ao efeito da troca de calor, o número de Mach na seção ② é $M_2 = 0{,}90$ e a temperatura de estagnação é $T_{0_2} = 478$ K. Determine o calor transferido por unidade de massa para o fluido, ou do fluido, entre as seções ① e ②, e a diferença de pressão, $p_1 - p_2$.

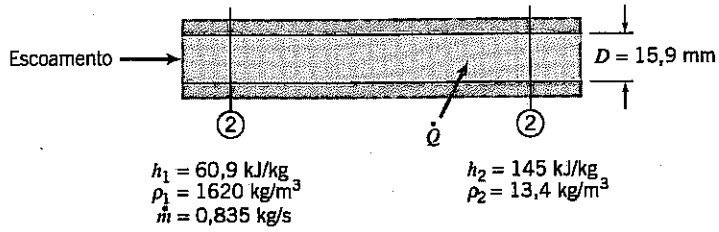
12.73 Ar escoa através de um tubo com diâmetro interno de 2 in, com atrito desprezível. As condições de entrada são $T_1 = 60°F$, $p_1 = 150$ psia e $M_1 = 0{,}30$. Determine a troca de calor por libra de ar necessária para produzir $M_2 = 1{,}0$ na saída do tubo onde $p_2 = 72{,}0$ psia.

---

*Estes problemas requerem material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

12.74 Ar escoa sem atrito através de um duto curto de área constante. Na entrada do duto, $M_1 = 0{,}30$, $T_1 = 50°C$ e $\rho_1 = 2{,}16$ kg/m³. Como resultado do aquecimento, o número de Mach e a pressão na saída do tubo são $M_2 = 0{,}60$ e $p_2 = 150$ kPa. Determine a adição de calor por unidade de massa e a variação de entropia para o processo.

12.75 Freon líquido, usado para resfriar componentes elétricos, escoa em regime permanente em um tubo horizontal de diâmetro constante, $D = 15{,}9$ mm. Calor é transferido para o escoamento e o líquido ferve, deixando o tubo como vapor. Os efeitos de atrito são desprezíveis comparados com os da adição de calor. As condições do escoamento são mostradas. Determine (a) a taxa de transferência de calor e (b) a diferença de pressão, $p_1 - p_2$.



P12.75

12.76 Ar escoa a uma taxa de 1,42 kg/s através de um duto de 100 mm de diâmetro. Na seção de entrada, a temperatura e a pressão absoluta são 52°C e 60,0 kPa. Na seção a jusante onde o escoamento é bloqueado, $T_2 = 45°C$. Determine a adição de calor por unidade de massa, a variação de entropia e a variação na pressão de estagnação para o processo, admitindo escoamento sem atrito.

12.77 Considere o escoamento sem atrito de ar num duto de área constante, $A = 0{,}087$ ft². Numa seção, as propriedades estáticas são 500°R e 15,0 psia e o número de Mach é 0,2. Numa seção a jusante, a pressão estática é 10,0 psia. Desenhe um diagrama *Ts* mostrando os estados de estagnação e estáticos. Calcule a velocidade do escoamento e a temperatura na seção a jusante. Avalie a taxa de troca de calor para o processo.

12.78 Um combustor de um motor a jato JT8D (como o usado no avião Douglas DC-9) tem uma vazão mássica de ar de 15 lbm/s. A área é constante e os efeitos de atrito são desprezíveis. As propriedades na entrada da câmara de combustão são 1260°R, 235 psia e 609 ft/s. Na saída do combustor, $T = 1840°R$ e $M = 0{,}476$. O poder calorífico do combustível é 18.000 Btu/lbm; a razão ar-combustível é grande o suficiente para que as propriedades sejam como as do ar. Calcule a pressão na saída do combustor. Determine a taxa de adição de energia à corrente de ar. Determine a vazão mássica de combustível requerida; compare-a com a vazão mássica de ar. Mostre o processo em um diagrama *Ts*, indicando os estados de estagnação e estáticos e o caminho do processo.

12.79 Considere o escoamento sem atrito de ar num duto com $D = 4$ in. Na seção ①, a temperatura e a pressão são 30°F e 10 psia; a vazão mássica é 1,2 lbm/s. Que quantidade de calor pode ser adicionada sem bloquear o escoamento? Avalie a variação resultante na pressão de estagnação.

12.80 Um duto de área constante é alimentado com ar proveniente de um bocal convergente-divergente. Na entrada do duto, as seguintes propriedades são conhecidas: $p_{0_1} = 800$ kPa (abs), $T_{0_1} = 700$ K e $M_1 = 3{,}0$. Numa curta distância a jusante no duto (na seção ②), $p_2 = 46{,}4$ kPa. Admitindo escoamento sem atrito, determine a velocidade, a pressão e o número de Mach na seção ②, e a troca de calor entre a entrada e a seção ②.

12.81 Ar escoa sem atrito, em regime permanente, e a uma taxa de 1,83 kg/s através de um duto com área de seção reta de 0,02 m². Na entrada do duto, a temperatura e a pressão absoluta são 260°C e 126 kPa. O escoamento de saída é subsônico e descarrega para a atmosfera. Determine o número de Mach, a temperatura e a temperatura de estagnação na saída do duto e a taxa de transferência de calor.

12.82 Ar escoa sem atrito num trecho curto de um duto de seção constante. Na entrada do duto, $M_1 = 0{,}30$, $T_1 = 50°C$ e $\rho_1 = 2{,}16$ kg/m³. Na saída do duto, $M_2 = 0{,}60$. Determine a adição de calor por unidade de massa, a variação de entropia, e a variação na pressão de estagnação para o processo.

12.83 No escoamento sem atrito de ar, através de um duto de 100 mm de diâmetro, 1,42 kg/s entram a 52°C e 60,0 kPa (abs). Determine a quantidade de calor que deve ser adicionada para bloquear o escoamento, e as propriedades do fluido no estado de bloqueio.

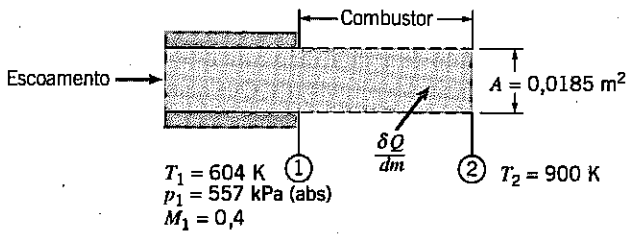
12.84 Ar, proveniente do sistema de admissão de um avião, entra na câmara de combustão do motor, onde calor é adicionado durante um processo sem atrito em um tubo de área constante igual a 0,01 m². A temperatura de estagnação isoentrópica local e o número de Mach na entrada do combustor são 427 K e 0,3. A vazão mássica é 0,5 kg/s. Quando a taxa de adição de calor é ajustada em 404 kW, o escoamento sai da câmara de combustão a 1026 K e 22,9 kPa (abs). Determine para esse processo: (a) o número de Mach na saída do combustor, (b) a pressão estática na entrada do combustor, e (c) a variação na pressão de estagnação isoentrópica local durante o processo de adição de calor. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estáticos e indique o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

12.85 Considere o escoamento permanente e unidimensional de ar numa câmara de combustão com área constante de 0,5 ft², onde um combustível de hidrocarbonetos, adicionado à corrente de ar, é queimado. O processo é equivalente a um aquecimento simples, porque a quantidade de combustível é pequena em comparação com a de ar; o aquecimento ocorre numa distância curta, de modo que o atrito é desprezível. As propriedades na entrada da câmara são 818°R, 200 psia e $M = 0{,}3$. A velocidade na saída da câmara não deve exceder 2000 ft/s. Determine as propriedades na saída da câmara e a taxa de adição de calor. Mostre o processo em um diagrama *Ts*, indicando os pontos dos estados estático e de estagnação antes e depois da adição de calor.

12.86 O escoamento na câmara de combustão de uma turbina a gás é modelado como o aquecimento de ar unidimensional, sem atrito, em regime permanente, num duto de área constante. Para um certo processo, as condições de entrada são 960°F, 225 psia e $M = 0{,}4$. Calcule a máxima adição de calor possível. Determine todas as propriedades do fluido na seção de saída e a redução na pressão de estagnação. Mostre o processo num diagrama *Ts*, indicando todos os pontos dos estados estático e de estagnação.

12.87 Um túnel de vento supersônico é suprido com ar a 25°C proveniente de um tanque de alta pressão. A temperatura na seção de teste deve ser mantida acima de 0°C para evitar a formação de partículas de gelo. Para isso, o ar proveniente do tanque é aquecido antes de escoar para dentro de um bocal convergente-divergente que alimenta a seção de teste. O aquecimento é feito num trecho curto de área constante. A potência do aquecedor é $\dot{Q} = 10$ kW. O número de Mach de projeto, na seção de teste do túnel, deve ser 3,0. Avalie a temperatura de estagnação requerida na saída do aquecedor. Calcule a máxima vazão mássica na qual o ar pode ser fornecido para a seção de teste do túnel de vento. Determine a razão de áreas, A_e/A_t.

12.88 Considere o escoamento permanente num combustor onde energia térmica é adicionada pela queima de combustível. Despreze o atrito. Admita que as propriedades termodinâmicas sejam constantes e iguais àquelas do ar puro. Calcule a temperatura de estagnação e o número de Mach na saída do queimador. Avalie a adição de calor por unidade de massa e a taxa de transferência de calor. Expresse a taxa de adição de calor como uma fração da taxa máxima de adição de calor possível com esse número de Mach de entrada.



P12.88

12.89 Usando as coordenadas T/T^* e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, trace a linha de Rayleigh para escoamento de ar ($k = 1{,}4$), para $0{,}4 < M < 3{,}0$.

12.90 Começando com as condições de entrada do Problema 12.50, e usando as coordenadas T/T_{0_1} e $(s - s^*)/c_p$, trace os ramos supersônico e subsônico da linha de Rayleigh para o escoamento.

12.91 Um escoamento de ar sem atrito em um duto de área constante é descarregado à pressão atmosférica na seção ②. A montante, na seção ①, $M_1 = 3{,}0$, $T_1 = 215$°R e $p_1 = 1{,}73$ psia. Entre as seções ① e ②, 48,5 Btu/lbm de ar são adicionados ao escoamento. Determine M_2 e p_2. Além de um diagrama *Ts* para o processo, esboce a distribuição de pressão como uma função da distância ao longo do canal, assinalando as seções ① e ②.

12.92 Um avião de transporte a jato voa a $M = 0{,}85$ numa altitude de 40.000 ft. O ar para o sistema de pressurização da cabine é insuflado através de um duto de admissão e desacelerado isoentropicamente pa-

ra 100 ft/s em relação à aeronave. Em seguida, ele entra num compressor onde sua pressão é elevada, adiabaticamente, a fim de criar uma pressão na cabine equivalente a uma altitude de 8000 ft. O aumento de temperatura do ar através do compressor é de 170°F. Finalmente, o ar é resfriado para 70°F (num trocador de calor com atrito desprezível) antes de ser lançado no interior da cabine. Esquematize um diagrama do sistema, assinalando todos os componentes e numerando apropriadamente as seções. Determine as temperaturas e as pressões estática e de estagnação em cada seção. Trace em escala um diagrama *Ts*, mostrando os pontos dos estados de estagnação e estáticos e indicando os caminhos do processo. Avalie o trabalho fornecido ao compressor e a energia rejeitada no trocador de calor.

12.93 Um choque normal ocorre quando um tubo pitot-estática é inserido em um túnel de vento supersônico. Pressões medidas pelo tubo são $p_{0_2} = 68{,}1$ kPa (abs) e $p_2 = 54{,}8$ kPa (abs). Antes do choque, $T_1 = 160$ K e $p_1 = 11{,}0$ kPa (abs). Calcule a velocidade do ar no túnel de vento.

12.94 Uma sonda de pressão (carga) total é colocada num túnel de vento supersônico onde $T = 530$°R e $M = 2{,}0$. Um choque normal ocorre em frente à sonda. Após o choque, $M_2 = 0{,}577$ e $p_2 = 5{,}76$ psia. Determine (a) a pressão e a temperatura de estagnação a jusante e (b) todas as propriedades do escoamento a montante do choque. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estático e o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

12.95 Ar escoa em regime permanente através de um tubo longo, termicamente isolado, de área constante. Na seção ①, $M_1 = 2{,}0$, $T_1 = 140$°F e $p_1 = 35{,}9$ psia. Na seção ②, a jusante de um choque normal, $V_2 = 1080$ ft/s. Determine a massa específica e o número de Mach na seção ②. Faça um esquema qualitativo da distribuição de pressão ao longo do tubo.

12.96 Ar aproxima-se de um choque normal a $M_1 = 3{,}0$, com $T_{0_1} = 700$ K e $p_1 = 125$ kPa (abs). Determine a velocidade e a temperatura do ar saindo do choque e a variação de entropia através do choque.

12.97 Um choque normal ocorre num duto de área constante. Ar aproxima-se do choque com $T_{0_1} = 1000$°R, $p_{0_1} = 100$ psia e $M_1 = 3{,}0$. Determine a pressão estática a jusante do choque. Compare a pressão após o choque com aquela obtida pela desaceleração isoentrópica até o mesmo número de Mach subsônico.

12.98 Ar passa por um choque normal. Antes do choque, $T_1 = 35$°C, $p_1 = 229$ kPa (abs) e $V_1 = 704$ m/s. Determine a temperatura e a pressão de estagnação da corrente de ar deixando o choque.

12.99 Um choque normal ocorre no ar, numa seção onde $V_1 = 924$ m/s, $T_1 = 10$°C, e $p_1 = 35{,}0$ kPa (abs). Determine a velocidade e o número de Mach após o choque e a variação na pressão de estagnação através do choque.

12.100 Ar aproxima-se de um choque normal a $T_1 = 18$°C, $p_1 = 101$ kPa (abs) e $V_1 = 766$ m/s. Determine a velocidade imediatamente após o choque e a mudança de pressão através do mesmo. Calcule a variação correspondente na pressão para uma desaceleração sem choque e sem atrito entre as mesmas velocidades.

12.101 Um avião supersônico voa a $M = 2{,}2$ a 12 km de altitude. Um tubo-pitot é usado para detectar a pressão de estagnação que permitirá o cálculo da velocidade do ar. Um choque normal ocorre em frente ao tubo. Avalie as condições de estagnação isoentrópica local antes do choque. Estime a pressão detectada pelo tubo-pitot. Mostre todos os pontos dos estados estático e de estagnação e o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

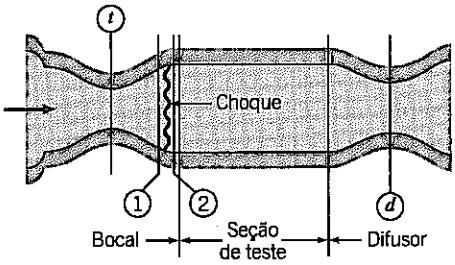
12.102 Sondas de pressão e de temperatura de estagnação estão localizadas sobre o nariz de uma aeronave supersônica. A 35.000 ft de altitude, um choque normal ocorre em frente às sondas. A sonda de temperatura indica $T_0 = 420$°F atrás do choque. Calcule o número de Mach e a velocidade do ar em relação ao avião. Mostre os pontos dos estados de estagnação e estático atrás do choque. Mostre o processo e os pontos dos estado de estagnação e estático em um diagrama *Ts*.

12.103 O avião supersônico de transporte *Concorde* voa a $M = 2{,}2$, a 20 km de altitude. Ar é desacelerado isoentropicamente pelo sistema de admissão do motor para um número de Mach local de 1,3. O ar passa através de um choque normal e é desacelerado ainda mais para $M = 0{,}4$ na seção do compressor do motor. Admita, como primeira aproximação, que esse processo de difusão subsônica é isoentrópico e use dados da atmosfera padrão para as condições da corrente livre. Determine a temperatura, a pressão e a pressão de estagnação do ar entrando no compressor do motor.

12.104 Um túnel de vento supersônico deve ser operado a $M = 2{,}2$ na seção de teste. A montante da seção de teste, a área de garganta do bocal é 0,07 m². Ar é fornecido nas condições de estagnação de 500 K e 1,0 MPa (abs). Numa condição de escoamento, durante o procedimento de partida do túnel, um choque normal ocorre no plano de saída do bocal. O escoamento é permanente. Para essa condição de *partida*, imediatamente após o choque, determine (a) o número de Mach, (b) a pressão estática, (c) a pressão

de estagnação, e (d) a área mínima, teoricamente possível, para a segunda garganta a jusante da seção de teste. Num diagrama *Ts*, mostre os pontos dos estados estático e de estagnação e o caminho do processo.

12.105 Considere a partida de um túnel de vento supersônico conforme mostrado. A área de garganta do bocal é 1,25 ft², e o número de Mach de projeto da seção de teste é 2,50. Na partida do túnel, um choque normal ocorre na porção divergente do bocal onde a área é 3,05 ft². As condições de estagnação a montante são $T_0 = 1080°R$ e $p_0 = 115$ psia. Determine a área mínima teoricamente possível da garganta do difusor nesse instante. Calcule o aumento de entropia através do choque.



P12.105

12.106 Um avião supersônico voa a $M = 2,7$ numa altitude de 60.000 ft. Um choque normal ocorre em frente a um tubo-pitot sobre o avião; o tubo mede a pressão de estagnação de 10,4 psia. Calcule a pressão estática e a temperatura atrás do choque. Avalie a perda na pressão de estagnação através do choque. Determine a variação na entropia específica através do choque. Mostre os estados de estagnação e estático e o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

12.107 Um avião está em vôo supersônico a 10 km de altitude num dia padrão. A sua velocidade real em relação ao ar é 659 m/s. Calcule o número de Mach de vôo do avião. Um tubo de pressão (carga) total conectado à aeronave é usado para medir a pressão de estagnação, que é convertida para o número de Mach do vôo por um computador de bordo. Entretanto, o programador do computador ignorou o choque normal que ocorre em frente ao tubo de pressão total e considerou escoamento isoentrópico. Avalie a pressão medida pelo tubo. Determine a velocidade errônea do ar calculada pelo programa do computador.

12.108 Um avião supersônico voa a $M_1 = 2,7$ a 20 km de altitude num dia padrão. Ar é desacelerado isoentropicamente pelo sistema de admissão do motor para $M_2 = 1,3$. Um choque normal ocorre nesse local. O escoamento subsônico resultante é desacelerado ainda mais para $M_4 = 0,4$. O processo de difusão subsônica é adiabático, mas não é isoentrópico; a pressão final é 104 kPa (abs). Avalie (a) a temperatura de estagnação do escoamento, (b) a variação de pressão através do choque, (c) a variação de entropia, $s_4 - s_1$, e (d) a pressão final de estagnação. Esboce o processo em um diagrama *Ts*, indicando todos os estados de estagnação e estáticos.

12.109 Uma onda de choque, originada de uma explosão, propaga-se para fora. Para raios grandes, a curvatura é pequena e a onda pode ser tratada como um choque normal forte. (Os aumentos de pressão e de temperatura associados com a onda de choque diminuem à medida que a onda propaga-se para fora.) Num dado instante, a frente da onda viaja a $M = 1,60$ em relação ao ar não perturbado na condição padrão. Determine (a) a velocidade do ar atrás da onda de choque em relação à onda e (b) a velocidade do ar atrás da onda de choque como vista por um observador sobre o solo. Desenhe um diagrama *Ts* para o processo como visto por um observador sobre a onda, indicando os pontos dos estados estático e de estagnação e os valores das propriedades.

12.110 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 3,5$. As condições de estagnação são atmosféricas; a contrapressão é mantida por uma bomba de vácuo. Determine a contrapressão requerida para causar um choque normal no plano de saída do bocal e a velocidade do escoamento deixando o choque.

12.111 Um bocal convergente-divergente expande ar de 250°F e 50,5 psia para 14,7 psia. As áreas de garganta e do plano de saída são 0,801 e 0,917 in², respectivamente. Calcule o número de Mach de saída. Avalie a vazão mássica através do bocal.

12.112 Um bocal convergente-divergente está conectado a um grande tanque de ar, no qual $T_{0_1} = 300$ K e $p_{0_1} = 250$ kPa (abs). Na garganta do bocal a pressão é 132 kPa (abs). Na seção divergente, a pressão cai para 68,1 kPa antes de aumentar subitamente através de um choque normal. Na saída do bocal, a pressão

é 180 kPa. Determine o número de Mach imediatamente atrás do choque. Determine a pressão imediatamente após o choque. Calcule a variação de entropia através do choque. Esboce o diagrama *Ts* para esse escoamento, indicando os pontos dos estados estático e de estagnação para as condições na garganta do bocal, em ambos os lados do choque e no plano de saída.

12.113 Um bocal convergente-divergente, com área de garganta $A_t = 1{,}0$ in², está conectado a um grande tanque no qual a pressão e a temperatura são mantidas em 100 psia e 600°R. A área de saída do bocal é 1,58 in². Determine o número de Mach de saída nas condições de projeto. Referindo à Fig. 12.20, determine as contrapressões correspondentes aos limites dos Regimes I, II, III e IV. Esboce o gráfico correspondente para esse bocal.

12.114 Um bocal convergente-divergente, com $A_e/A_t = 4{,}0$, é projetado para expandir o ar isoentropicamente até a pressão atmosférica. Determine o número de Mach de saída nas condições de projeto e a pressão de estagnação de entrada requerida. Referindo à Fig. 12.20, determine as contrapressões que correspondem aos limites dos Regimes I, II, III e IV. Esboce o gráfico da razão de pressão *versus* distância axial para esse bocal.

12.115 Ar escoa adiabaticamente de um reservatório, onde $T = 60$°C e $p = 600$ kPa (abs), através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 4{,}0$. Um choque normal ocorre onde $M = 2{,}42$. Admitindo escoamento isoentrópico antes e depois do choque, determine a contrapressão a jusante do bocal. Esboce a distribuição de pressão.

12.116 Um choque normal ocorre na seção divergente de um bocal convergente-divergente onde $A = 4{,}0$ in² e $M = 2{,}50$. A montante, $T_0 = 1000$°R e $p_0 = 100$ psia. A área de saída do bocal é 6,0 in². Admita escoamento isoentrópico, exceto através do choque. Determine a pressão na saída do bocal, a área de garganta e a vazão mássica.

12.117 Um bocal convergente-divergente é projetado para expandir ar isoentropicamente até a pressão atmosférica a partir de um grande tanque, onde $T_0 = 150$°C e $p_0 = 790$ kPa (abs). Um choque normal ocorre na porção divergente, num local onde $p = 160$ kPa (abs) e $A = 600$ mm². Determine a contrapressão do bocal, a área de saída e a área de garganta.

12.118 Um bocal convergente-divergente, com razão de pressão de projeto $p_e/p_0 = 0{,}128$, é operado com uma contrapressão tal que $p_b/p_0 = 0{,}830$, causando um choque normal na porção divergente. Determine o número de Mach no qual o choque ocorre.

12.119 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 3{,}5$. As condições de estagnação a montante são atmosféricas; a contrapressão é mantida por um sistema de vácuo. Determine a faixa de contrapressões em que ocorrerá um choque normal dentro do bocal e a correspondente vazão mássica, se $A_t = 500$ mm².

12.120 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 1{,}87$. A montante, $T_{0_1} = 240$°F e $p_{0_1} = 100$ psia. A contrapressão é mantida em 40 psia. Determine o número de Mach e a velocidade do escoamento no plano de saída do bocal.

12.121 Um bocal convergente-divergente, com $A_e/A_t = 1{,}633$, é projetado para operar com pressão atmosférica no plano de saída. Determine a(s) faixa(s) de pressões de estagnação de entrada para as quais o bocal estará livre de choques normais.

12.122 Um choque normal ocorre na porção divergente de um bocal convergente-divergente, onde $A = 4{,}0$ in² e $M = 2{,}00$. A montante, $T_{0_1} = 1000$°R e $p_{0_1} = 100$ psia. A área de saída do bocal é 6,0 in². Admita que o escoamento é isoentrópico, exceto através do choque. Determine a pressão de saída do bocal. Mostre o processo em um diagrama *Ts*, indicando os pontos de estado estático e de estagnação.

12.123 Ar escoa adiabaticamente de um reservatório, onde $T_{0_1} = 60$°C e $p_{0_1} = 600$ kPa (abs), através de um bocal convergente-divergente. O número de Mach de projeto do bocal é 2,94. Um choque normal ocorre no local do bocal onde $M = 2{,}42$. Admitindo escoamento isoentrópico antes e depois do choque, determine a contrapressão a jusante do bocal. Trace a distribuição de pressão.

12.124 Considere o escoamento de ar através de um bocal convergente-divergente. Esboce o comportamento aproximado da vazão em massa *versus* razão de pressão na região de descarga, p_b/p_0. Esboce a variação de pressão com a distância ao longo do bocal, e o diagrama *Ts* para o escoamento no bocal quando a contrapressão é p^*.

12.125 Um choque normal estacionário ocorre na seção divergente de um bocal convergente-divergente. A área do bocal no choque é 500 mm². O bocal é alimentado por ar proveniente de um grande tanque, onde a pressão é 1000 kPa (manométrica) e a temperatura 400 K. Determine o número de Mach, a pressão de estagnação e a pressão estática após o choque. Calcule a área de garganta do bocal. Avalie a variação

de entropia através do choque. Finalmente, se a área de saída do bocal é 600 mm², estime o número de Mach de saída. Seria o número de Mach real de saída maior, menor ou igual ao estimado?

***12.126** Um túnel de vento supersônico deve ter duas gargantas, com a segunda garganta maior do que a primeira. Explique por que deve ser assim.

***12.127** Um choque normal ocorre em uma seção de um duto de área constante, isolado termicamente. O escoamento é com atrito. Na seção ①, a uma certa distância a montante do choque, $T_1 = 470°R$. Na seção ④, a uma certa distância a jusante do choque, $T_4 = 750°R$ e $M_4 = 1{,}0$. Denote as condições imediatamente antes e após o choque pelos subscritos ② e ③, respectivamente. Esboce a distribuição de pressão ao longo do duto, indicando claramente os locais das seções 1 a 4. Esboce um diagrama *Ts* para o escoamento. Determine o número de Mach na seção ①.

***12.128** Um choque normal ocorre em uma seção de um duto de área constante, isolado termicamente. O escoamento é com atrito. Na seção ①, a uma certa distância antes do choque, $T_1 = 668°R$, $p_{0_1} = 78{,}2$ psia e $M_1 = 2{,}05$. Na seção ④, a uma certa distância após o choque, $M_4 = 1{,}00$. Calcule a velocidade do ar, V_2, imediatamente após o choque, onde $T_2 = 388°F$. Avalie a variação de entropia, $s_4 - s_1$.

12.129 Um escoamento supersônico de ar a $M_1 = 2{,}2$ e 75 kPa é defletido por um choque oblíquo com ângulo $\beta = 30°$. Determine o número de Mach e a pressão após o choque, e o ângulo de deflexão. Compare esses resultados com aqueles obtidos caso o escoamento tivesse passado por um choque normal. Qual é o menor valor possível do ângulo β para esse número de Mach a montante?

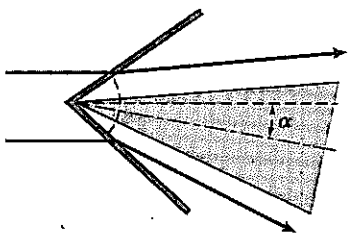
12.130 Considere um escoamento supersônico de ar a $M_1 = 3{,}0$. Qual é a faixa de valores possíveis do ângulo β de choques oblíquos? Para essa faixa de β, faça um gráfico da razão de pressão através do choque.

12.131 A temperatura e o número de Mach antes de um choque oblíquo são $T_1 = 15°C$ e $M_1 = 2{,}75$, respectivamente, e a razão de pressão através do choque é 4,5. Determine o ângulo de deflexão, θ, o ângulo de choque, β, e o número de Mach após o choque, M_2.

12.132 As velocidades do ar antes e após um choque oblíquo são 1000 m/s e 500 m/s, respectivamente, e o ângulo de deflexão é $\theta = 30°$. Determine o ângulo de choque oblíquo, β, e a razão de pressão através do choque.

12.133 Um aerofólio, em ângulo de ataque zero, tem uma borda de entrada aguda com um ângulo incluso de 20°. Ele está sendo testado para uma faixa de velocidades em um túnel de vento. A temperatura do ar a montante é mantida em 15°C. Determine o número de Mach e a correspondente velocidade do ar na qual um choque normal separado conecta-se pela primeira vez à borda de entrada, e o ângulo do choque oblíquo resultante. Trace um gráfico do ângulo de choque oblíquo β como uma função do número de Mach a montante M_1, do valor mínimo de choque conectado até $M_1 = 7$.

12.134 Um aerofólio tem uma borda de entrada com um ângulo incluso $\delta = 60°$. Ele está sendo testado em um túnel de vento operando a 1200 m/s (a pressão e a temperatura do ar a montante são 75 kPa e 35°C). Trace um gráfico da pressão e da temperatura na região adjacente à superfície superior como funções do ângulo de ataque, α, variando α de 0° até 30°. Quais são a pressão e a temperatura máximas? (Ignore a possibilidade de um choque separado se desenvolver para um valor de α muito grande; veja Problema 12.135.)



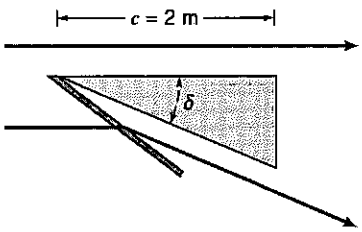
P12.134, 12.135

12.135 O aerofólio do Problema 12.134 desenvolverá um choque separado sobre a superfície inferior se o ângulo de ataque, α, exceder um certo valor. Qual é esse ângulo de ataque? Trace um gráfico da pressão e da temperatura na região adjacente à superfície inferior como funções do ângulo de ataque, α, va-

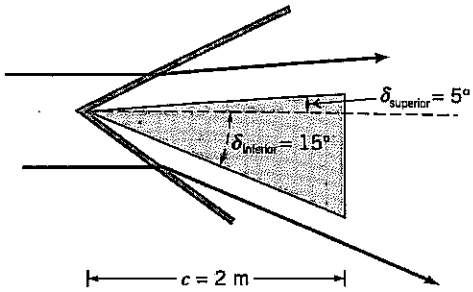
*Estes problemas requerem material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

riando α de 0° até o valor para o qual o choque torna-se separado. Quais são a pressão e a temperatura máximas?

12.136 O aerofólio em forma de cunha mostrado na figura tem corda $c = 2$ m e ângulo incluso $\delta = 10°$. Determine a sustentação por unidade de envergadura em um número de Mach de 2,5 no ar, para o qual a pressão estática é 80 kPa.



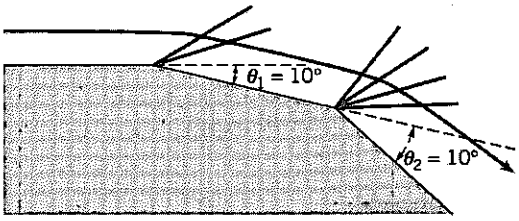
P12.136, 12.140



P12.137

12.137 O aerofólio em forma de cunha mostrado na figura tem corda $c = 2$ m e ângulos $\delta_{inferior} = 15°$ e $\delta_{superior} = 5°$. Determine a sustentação por unidade de envergadura em um número de Mach de 2,75 no ar, para o qual a pressão estática é 75 kPa.

12.138 Ar escoa com número de Mach de 2,5, pressão estática de 75 kPa, e é expandido por ângulos de $\theta_1 = 10°$ e $\theta_2 = 10°$, conforme mostrado. Determine as variações de pressão.



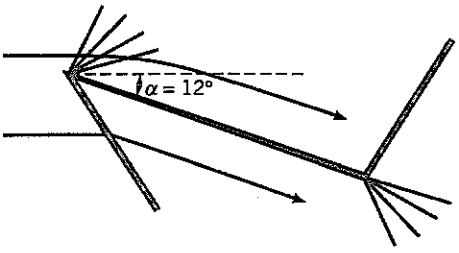
P12.138, 12.139

12.139 Determine os números de Mach e as pressões estáticas de chegada e intermediária se, após duas expansões de $\theta_1 = 10°$ e $\theta_2 = 10°$, o número de Mach é 3,5 e a pressão estática é 20 kPa.

12.140 Considere o aerofólio em forma de cunha do Problema 12.136. Suponha que o choque oblíquo possa ser substituído por ondas de *compressão* isoentrópicas. Determine a sustentação por unidade de envergadura em um número de Mach de 2,5 no ar, onde a pressão estática é 80 kPa.

12.141 Compare as pressões estática e de estagnação produzidas por (a) um choque oblíquo e (b) ondas de *compressão* isoentrópicas quando cada uma delas deflete um escoamento em um número de Mach de 3,5 através de um ângulo de deflexão de 35° no ar, onde a pressão estática é 50 kPa.

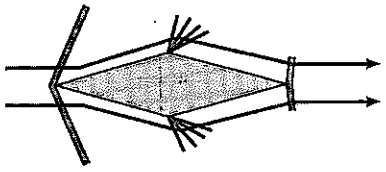
12.142 Determine a sustentação e o arrasto por unidade de envergadura, sobre o aerofólio mostrado, para vôo em um número de Mach de 1,75 no ar onde a pressão estática é 50 kPa. O comprimento da corda é 1 m.



P12.142, 12.143

12.143 Trace um gráfico da sustentação e do arrasto por unidade de envergadura e da razão sustentação/arrasto como funções do ângulo de ataque para $\alpha = 0°$ até 18°, para o aerofólio mostrado, para vôo em um número de Mach de 1,75 no ar para o qual a pressão estática é 50 kPa. O comprimento de corda é 1 m.

12.144 Determine o coeficiente de arrasto do aerofólio simétrico mostrado, com ângulo de ataque zero, para um número de Mach 2,0 no ar, onde a pressão estática é 95 kPa e a temperatura de 0°C. Os ângulo inclusos no nariz e na cauda são ambos de 10°.



P12.144, 12.145

12.145 Determine os coeficientes de sustentação e de arrasto do aerofólio do Problema 12.144 se o aerofólio agora tem um ângulo de ataque de 12°.

Apêndice A

DADOS DE PROPRIEDADES DE FLUIDOS

A-1 DENSIDADE RELATIVA E MASSA ESPECÍFICA

Dados de densidade relativa (ou simplesmente densidade, ou ainda gravidade específica) para diversos líquidos e sólidos comuns estão apresentados nas Figs. A.1*a* e A.1*b* e nas Tabelas A.1 e A.2. Para líquidos, a densidade é uma função da temperatura. (Massas específicas da água e do ar são dadas como funções da temperatura nas Tabelas A.7 a A.10.) Para a maioria dos líquidos a densidade diminui com o aumento da temperatura. A água tem um comportamento singular: ela apresenta uma massa específica máxima de 1000 kg/m³ (1,94 slug/pé³) a 4°C (39°F). A massa específica máxima da água é usada como valor de referência para calcular a densidade relativa. Assim,

$$SG \equiv \frac{\rho}{\rho_{H_2O} \ (\text{a } 4°C)}$$

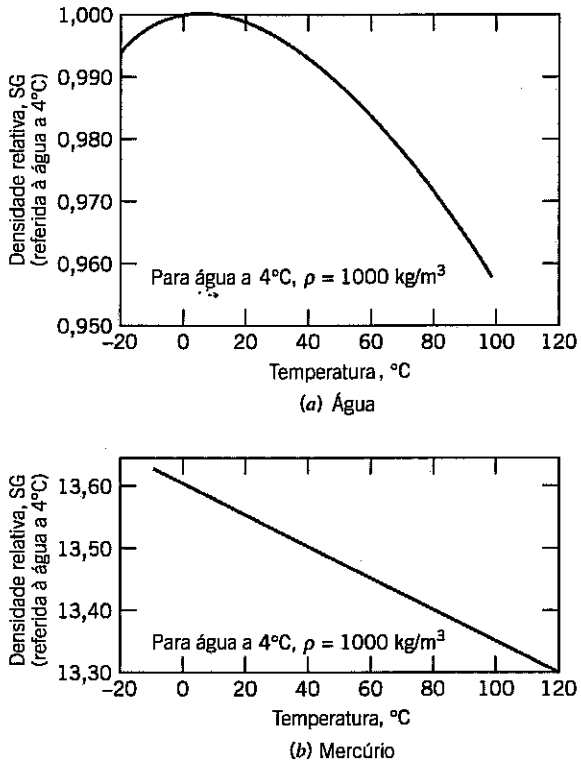


Fig. A.1 Densidades da água e do mercúrio como funções da temperatura. (Dados de [1].)
(A densidade relativa do mercúrio varia linearmente com a temperatura. A variação é dada por SG = 13,60 − 0,00240 *T* quando *T* é dada em °C.)

Tabela A.1 Densidades de Materiais de Engenharia Selecionados

(a) Líquidos Comuns de Manômetro a 20°C (Dados de [1, 2, 3].)

Líquido	Densidade Relativa
Óleo azul E. V. Hill	0,797
Óleo vermelho Meriam	0,827
Benzeno	0,879
Dibutilftalato	1,04
Monocloronaftaleno	1,20
Tetracloreto de carbono	1,595
Bromoetilbenzeno (Meriam azul)	1,75
Tetrabromoetano	2,95
Mercúrio	13,55

(b) Materiais Comuns (Dados de [4].)

Material	Densidade Relativa (—)
Alumínio	2,64
Madeira Balsa	0,14
Latão	8,55
Ferro fundido	7,08
Concreto (curado)	2,4*
Concreto (líquido)	2,5*
Cobre	8,91
Gelo (0°C)	0,917
Chumbo	11,4
Carvalho	0,77
Aço	7,83
Espuma Styrofoam (1 pcf**)	0,0160
Espuma Styrofoam (3 pcf)	0,0481
Urânio (exaurido)	18,7
Pinheiro branco	0,43

*dependendo do agregado
**libra-massa por pé cúbico

Conseqüentemente a densidade relativa máxima da água é exatamente a unidade.

As densidades de sólidos são relativamente insensíveis à temperatura; os valores dados na Tabela A.1 foram medidos a 20°C.

A densidade relativa da água do mar depende da temperatura e, também, do grau de salinidade. Um valor representativo para a água do oceano é SG = 1,025, como dado na Tabela A.2.

Tabela A.2 Propriedades Físicas de Líquidos Comuns a 20°C (Dados de [1, 5, 6].)

Líquido	Módulo de Compressibilidade Isoentrópica[a] (GN/m^2)	Densidade Relativa (—)
Benzeno	1,48	0,879
Tetracloreto de carbono	1,36	1,595
Óleo Castor	2,11	0,969
Óleo cru	—	0,82–0,92
Etanol	—	0,789
Gasolina	—	0,72
Glicerina	4,59	1,26
Heptano	0,886	0,684
Querosene	1,43	0,82
Óleo lubrificante	1,44	0,88
Metanol	—	0,796
Mercúrio	28,5	13,55
Octano	0,963	0,702
Água do mar[b]	2,42	1,025
Óleo SAE 10W	—	0,92
Água	2,24	0,998

[a]Calculado a partir da velocidade do som 1 $GN/m^2 = 10^9\ N/m^2$ (1 N/m2 = $1{,}45 \times 10^{-4}\ lbf/in^2$).
[b]A viscosidade dinâmica da água do mar a 20°C é $\mu = 1{,}08 \times 10^{-3}\ N \cdot s/m^2$. (Portanto, a viscosidade cinemática da água do mar é cerca de 5% maior do que a viscosidade da água potável.)

Tabela A.3 Propriedades da Atmosfera Padrão dos EUA (Dados de [7].)

Altitude Geométrica (m)	Temperatura (K)	p/p_{NM} (—)	ρ/ρ_{NM} (—)
–500	291,4	1,061	1,049
0	288,2	1,000[a]	1,000[b]
500	284,9	0,9421	0,9529
1.000	281,7	0,8870	0,9075
1.500	278,4	0,8345	0,8638
2.000	275,2	0,7846	0,8217
2.500	271,9	0,7372	0,7812
3.000	268,7	0,6920	0,7423
3.500	265,4	0,6492	0,7048
4.000	262,2	0,6085	0,6689
4.500	258,9	0,5700	0,6343
5.000	255,7	0,5334	0,6012
6.000	249,2	0,4660	0,5389
7.000	242,7	0,4057	0,4817
8.000	236,2	0,3519	0,4292
9.000	229,7	0,3040	0,3813
10.000	223,3	0,2615	0,3376
11.000	216,8	0,2240	0,2978
12.000	216,7	0,1915	0,2546
13.000	216,7	0,1636	0,2176
14.000	216,7	0,1399	0,1860
15.000	216,7	0,1195	0,1590
16.000	216,7	0,1022	0,1359
17.000	216,7	0,08734	0,1162
18.000	216,7	0,07466	0,09930
19.000	216,7	0,06383	0,08489
20.000	216,7	0,05457	0,07258
22.000	218,6	0,03995	0,05266
24.000	220,6	0,02933	0,03832
26.000	222,5	0,02160	0,02797
28000	224,5	0,01595	0,02047
30,000	226,5	0,01181	0,01503
40.000	250,4	0,002834	0,003262
50.000	270,7	0,0007874	0,0008383
60.000	255,8	0,0002217	0,0002497
70.000	219,7	0,00005448	0,00007146
80.000	180,7	0,00001023	0,00001632
90.000	180,7	0,000001622	0,000002588

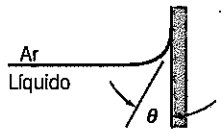
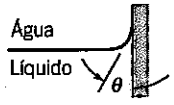
[a] $p_{NM} = 1{,}01325 = 10^5$ N/m² (abs) (= 14,696 psia).
[b] $\rho_{NM} = 1{,}2250$ kg/m³ (= 0,002377 slug/ft³).

A-2 TENSÃO SUPERFICIAL

Os valores de tensão superficial, σ, para a maioria dos compostos orgânicos, são notavelmente semelhantes à temperatura ambiente; a faixa típica é de 25 a 40 mN/m. O da água é mais alto, cerca de 73 mN/m a 20°C. Os metais líquidos têm valores na faixa entre 300 e 600 mN/m; o mercúrio líquido tem um valor de cerca de 480 mN/m a 20°C. A tensão superficial diminui com a temperatura; o decréscimo é aproximadamente linear com a temperatura absoluta. A tensão superficial à temperatura crítica é zero.

Os valores de σ são reportados usualmente para superfícies em contato com o vapor puro do líquido em estudo ou com o ar. Para baixas pressões, os dois valores são aproximadamente iguais.

Tabela A.4 Tensão Superficial de Líquidos Comuns a 20°C (Dados de [l, 5, 8, 9].)

Líquido	Tensão Superficial, σ (mN/m)[a]	Ângulo de Contato, θ (graus)
(a) Em contato com ar		
Benzeno	28,9	
Tetracloreto de carbono	27,0	
Etanol	22,3	
Glicerina	63,0	
Hexano	18,4	
Querosene	26,8	
Óleo lubrificante	25–35	
Mercúrio	484	140
Metanol	22,6	
Octano	21,8	
Água	72,8	~0
(b) Em contato com água		
Benzeno	35,0	
Tetracloreto de carbono	45,0	
Hexano	51,1	
Mercúrio	375	140
Metanol	22,7	
Octano	50,8	

[a] 1 mN/m = 10^{-3} N/m.

BIBLIOTECA - FACULDADE PITÁGORAS

A-3 A NATUREZA FÍSICA DA VISCOSIDADE

A viscosidade é uma medida do atrito interno do fluido, isto é, da resistência à deformação. O mecanismo da viscosidade gasosa é razoavelmente bem compreendido, mas a teoria para líquidos ainda não está bem desenvolvida. Podemos entender melhor a natureza física do escoamento viscoso discutindo brevemente esses mecanismos.

A viscosidade de um fluido newtoniano é definida pelo estado do material. Assim, $\mu = \mu(T,p)$. A temperatura é a variável mais importante, por isso vamos considerá-la primeiro. Existem excelentes equações empíricas para a viscosidade como uma função da temperatura.

Efeito da Temperatura sobre a Viscosidade

a. Gases

Todas as moléculas gasosas estão em contínuo movimento aleatório. Quando há um movimento da massa de gás em decorrência do escoamento, o movimento de massa sobrepõe-se aos movimentos aleatórios. Ele é, então, distribuído por todo o fluido pelas colisões moleculares. Análises baseadas na teoria cinética predizem

$$\mu \propto \sqrt{T}$$

A previsão da teoria cinética concorda muito bem com as tendências experimentais, mas a constante de proporcionalidade e um ou mais fatores de correção devem ser determinados; isto limita a aplicação prática dessa equação simples.

Se dois ou mais pontos experimentais estão disponíveis, os dados podem ser correlacionados pela equação empírica de Sutherland [7]

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T} \tag{A.1}$$

As constantes b e S podem ser determinadas com mais facilidade escrevendo

$$\mu = \frac{bT^{3/2}}{S + T}$$

ou

$$\frac{T^{3/2}}{\mu} = \left(\frac{1}{b}\right)T + \frac{S}{b}$$

(Compare isso com $y = mx + c$.) De um gráfico de $T^{3/2}/\mu$ *versus* T, pode-se obter a inclinação, $1/b$, e o intercepto, S/b. Para o ar,

$$b = 1{,}458 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^{1/2}}$$
$$S = 110{,}4\ \text{K}$$

Estas constantes foram usadas com a Eq. A.1 para calcular as viscosidades para a atmosfera padrão em [7], os valores da viscosidade do ar para várias temperaturas mostrados na Tabela A.10 e, usando fatores de conversão apropriados, os valores mostrados na Tabela A.9.

b. Líquidos

As viscosidades dos líquidos não podem ser bem estimadas teoricamente. O fenômeno da transferência de quantidade de movimento por colisões moleculares é ofuscado nos líquidos pelos efeitos de campos de força interagindo entre grupos de moléculas líquidas muito próximas.

As viscosidades dos líquidos são fortemente afetadas pela temperatura. Esta dependência da temperatura absoluta é bem representada pela equação empírica

$$\mu = Ae^{B/(T-C)} \tag{A.2}$$

Os gráficos para o ar e para a água foram elaborados a partir da planilha do *Excel Viscosidades Absolutas*, usando a Eq. A.1 e a Eq. A.3, respectivamente. A planilha pode ser usada para calcular viscosidades de outros fluidos, se as constantes b e S (para um gás) ou A, B e C (para líquidos) são conhecidas.

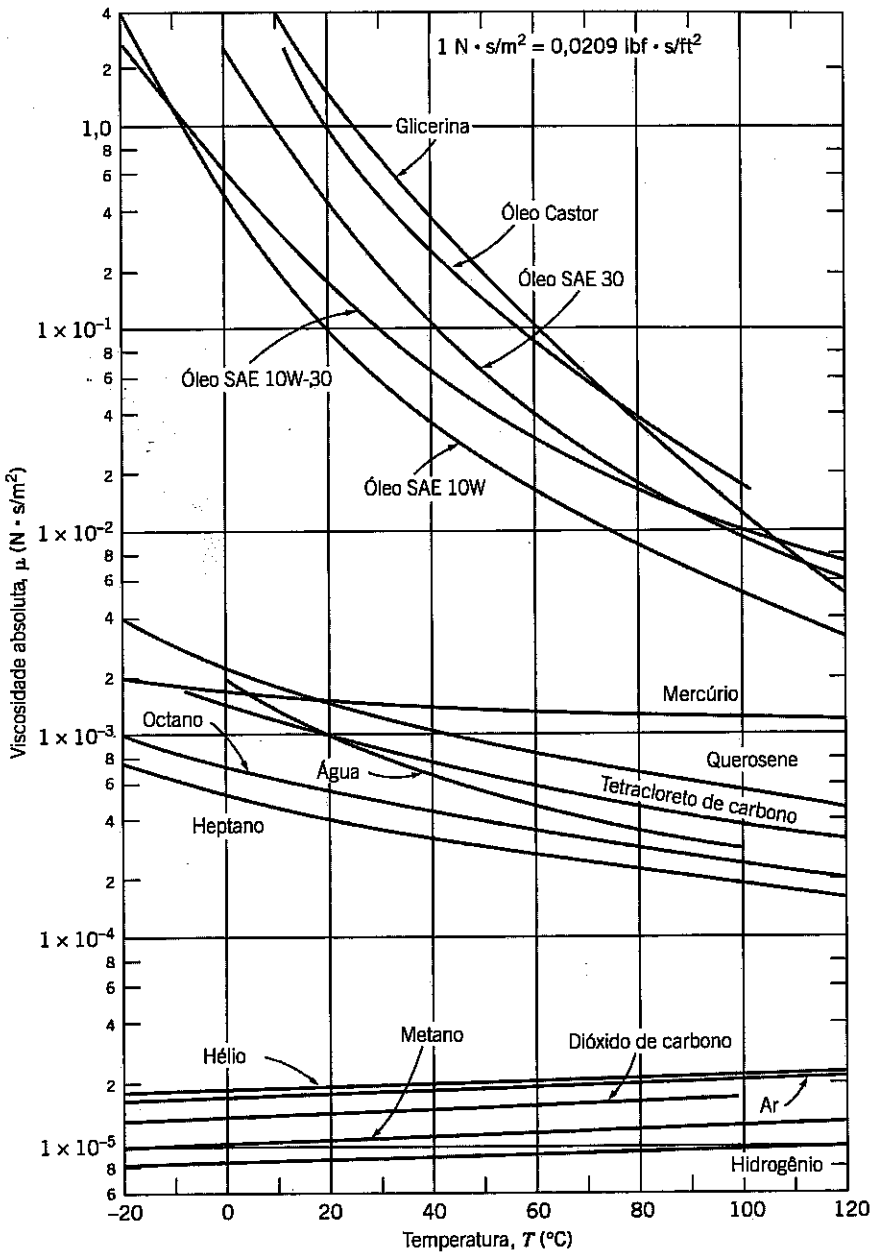


Fig. A.2 Viscosidade dinâmica (absoluta) de fluidos comuns como uma função da temperatura. (Dados de [1, 6, e 10].)

ou pela forma equivalente

$$\mu = A10^{B/(T-C)} \tag{A.3}$$

onde T é a temperatura absoluta.

A Eq. A.3 requer pelo menos três pontos para ajustar A, B e C. Em teoria, é possível determinar as constantes a partir de medidas da viscosidade em apenas três temperaturas. Uma prática melhor é usar mais dados e obter as constantes por meio de um ajuste estatístico dos dados.

Após o desenvolvimento da curva de ajuste (regressão), compare sempre a linha ou curva resultante com os dados disponíveis. A melhor maneira é fazer uma inspeção crítica de um gráfico da curva obtida comparada com os dados disponíveis. Em geral, os resultados da regressão são satisfatórios somente quando a qualidade dos dados disponíveis e aquela da correlação empírica são sabidamente excelentes.

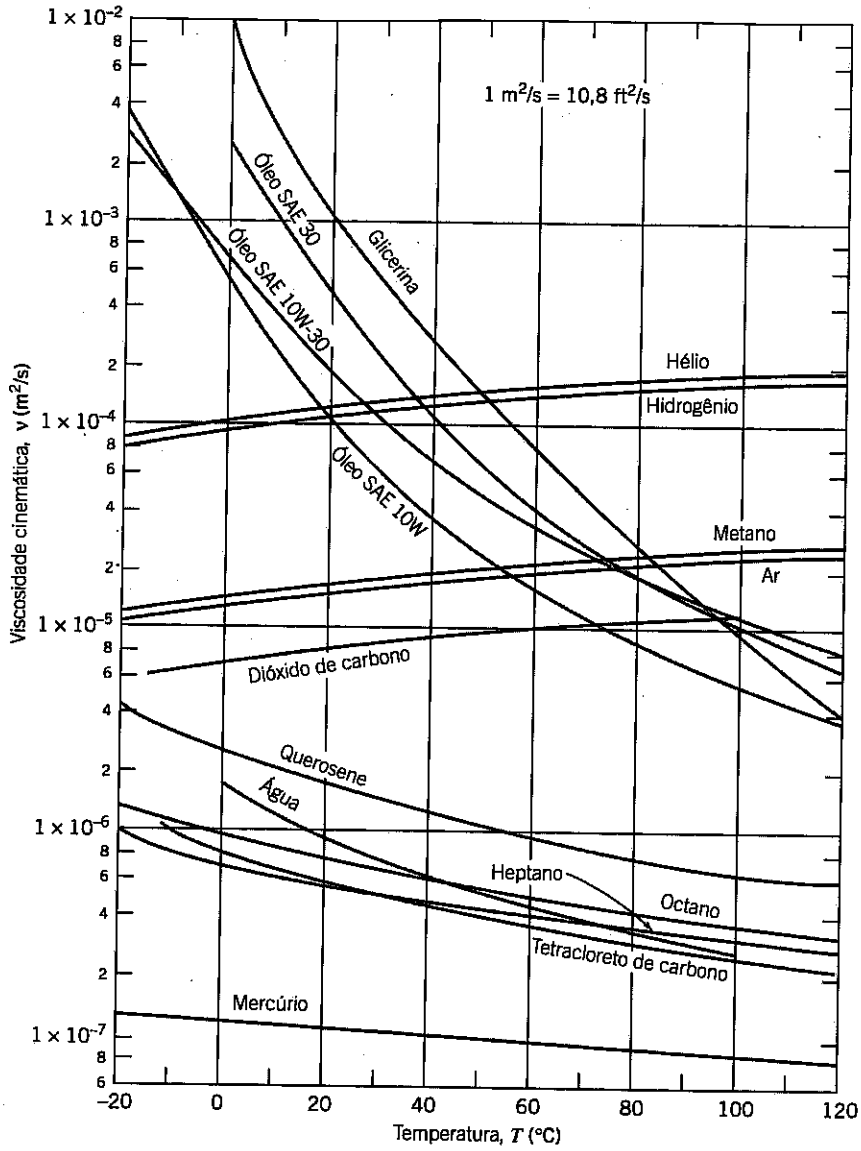


Fig. A.3 Viscosidade cinemática de fluidos comuns (à pressão atmosférica) como uma função da temperatura. (Dados de [1, 6, e 10].)

Dados para a viscosidade dinâmica da água são bem ajustados usando as constantes $A = 2{,}414 \times 10^{-5}$ N · s/m², $B = 247{,}8$ K e $C = 140$ K. A Referência 10 afirma que, usando essas constantes na Eq. A.3, prediz-se a viscosidade da água com erro de ± 2,5% numa faixa de temperaturas de 0°C a 370°C. A Eq. A.3 e o *Excel* foram usados para calcular os valores da viscosidade da água para várias temperaturas mostrados na Tabela A.8 e, usando fatores de conversão apropriados, os valores mostrados na Tabela A.7.

Note que a viscosidade de um líquido diminui com a temperatura, enquanto a de um gás aumenta com a temperatura.

Efeito da Pressão sobre a Viscosidade

a. Gases

A viscosidade dos gases é essencialmente independente da pressão numa faixa entre uns poucos centésimos de uma atmosfera e algumas poucas atmosferas. Entretanto, a viscosidade aumenta em pressões elevadas (ou com o aumento da massa específica).

b. Líquidos

As viscosidades da maioria dos líquidos não são afetadas por pressões moderadas, porém grandes aumentos têm sido verificados em pressões muito altas. Por exemplo, a viscosidade da água a 10.000 atm é duas vezes aquela a 1 atm. Compostos mais complexos apresentam um aumento de viscosidade de várias ordens de grandeza para a mesma faixa de pressão.

Mais informações podem ser encontradas em [11].

A-4 ÓLEOS LUBRIFICANTES

Os óleos lubrificantes de motores e de transmissões são classificados pela viscosidade de acordo com normas estabelecidas pela SAE — *Society of Automotive Engineers* [12]. As faixas de viscosidades permitidas para os diversos graus são dadas na Tabela A.5.

Os números de viscosidade com W (p. ex., 20W) são classificados pela viscosidade a 0°F (–17,8°C). Aqueles sem W são classificados pela viscosidade a 210°F (100°C).

Os óleos multigraus (p. ex., 10W-40) são formulados para minimizar a variação da viscosidade com a temperatura. Na mistura desses óleos são empregados altos polímeros que "melhoram o índice de viscosidade". Tais aditivos são altamente não-newtonianos; eles podem sofrer perda permanente de viscosidade causada pelo cisalhamento.

Existem gráficos especiais para estimar a viscosidade de produtos do petróleo como uma função da temperatura. Os gráficos foram usados para desenvolver os dados para os óleos lubrificantes típicos plotados nas Figs. A.2 e A.3. Para mais detalhes, consulte [15].

Tabela A.5 Faixas de Viscosidades Permitidas para Lubrificantes (Dados de [12–14].)

Óleo de Motor	Grau de Viscosidade SAE	Viscosidade Máx. (cP)[a] à Temp. (°C)	Viscosidade (cSt)[b] a 100°C Mín.	Máx.
	0W	3250 a −30	3,8	—
	5W	3500 a −25	3,8	—
	10W	3500 a −20	4,1	—
	15W	3500 a −15	5,6	—
	20W	4500 a −10	5,6	—
	25W	6000 a −5	9,3	—
	20	—	5,6	<9,3
	30	—	9,3	<12,5
	40	—	12,5	<16,3
	50	—	16,3	<21,9
Lubrificante de Transmissão de Eixo e Manual	**Grau de Viscosidade SAE**	**Temp. Máx. (°C) para viscosidade de 150.000 cP**	**Viscosidade (cSt) a 100°C Mín.**	**Máx.**
	70W	−55	4,1	—
	75W	−40	4,1	—
	80W	−26	7,0	—
	85W	−12	11,0	—
	90	—	13,5	<24,0
	140	—	24,0	<41,0
	250	—	41,0	—
Fluido de Transmissão Automática (Típico)	**Viscosidade Máxima (cP)**	**Temperatura (°C)**	**Viscosidade (cSt) a 100°C Mín.**	**Máx.**
	50.000	−40	6,5	8,5
	4000	−23,3	6,5	8,5
	1700	−18	6,5	8,5

[a] 1 centipoise = 1 cP = 1 mPa·s = 10^{-3} Pa·s (= 2,09 × 10^{-5} lbf·s/ft²).
[b] 1 centistoke = 10^{-6} m²/s (= 1,08 × 10^{-5} ft²/s).

Tabela A.6 Propriedades Termodinâmicas de Gases Comuns na Condição Padrão ou *STP*[a] (Dados de [7, 16, 17].)

Gás	Símbolo Químico	Massa Molecular, M_m	R^b $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	c_p $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	c_v $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	$k = \frac{c_p}{c_v}$ (–)	R^b $\left(\frac{ft \cdot lbf}{lbm \cdot °R}\right)$	c_p $\left(\frac{Btu}{lbm \cdot °R}\right)$	c_v $\left(\frac{Btu}{lbm \cdot °R}\right)$
Ar	—	28,98	286,9	1004	717,4	1,40	53,33	0,2399	0,1713
Dióxido de carbono	CO_2	44,01	188,9	840,4	651,4	1,29	35,11	0,2007	0,1556
Monóxido de carbono	CO	28,01	296,8	1039	742,1	1,40	55,17	0,2481	0,1772
Hélio	He	4,003	2077	5225	3147	1,66	386,1	1,248	0,7517
Hidrogênio	H_2	2,016	4124	14,180	10,060	1,41	766,5	3,388	2,402
Metano	CH_4	16,04	518,3	2190	1672	1,31	96,32	0,5231	0,3993
Nitrogênio	N_2	28,01	296,8	1039	742,0	1,40	55,16	0,2481	0,1772
Oxigênio	O_2	32,00	259,8	909,4	649,6	1,40	48,29	0,2172	0,1551
Vapor d'água[c]	H_2O	18,02	461,4	~2000	~1540	~1,30	85,78	~0,478	~0,368

[a] STP = temperatura e pressão na condição padrão ou "standard", $T = 15°C = 59°F$ e $p = 101,325$ kPa (abs) = 14,696 psia.
[b] $R \equiv R_u/M_m$; $R_u = 8314,3$ J/(kgmol·K) = 1545,3 ft·lbf/(lbmol·°R); 1 Btu = 778,2 ft·lbf.
[c] O vapor d'água comporta-se como um gás ideal quando superaquecido de 55°C (100°F) ou mais.

Tabela A.7 Propriedades da Água (Unidades Usuais nos EUA)

Temperatura, T (°F)	Massa Específica, ρ (slug/ft³)	Viscosidade Dinâmica, μ (lbf · s/ft²)	Viscosidade Cinemática, ν (ft²/s)	Tensão Superficial, σ (lbf/ft)	Pressão de Vapor, p_v (psia)	Módulo de Compressibilidade, E_v (psi)
32	1,94	3,68E-05	1,90E-05	0,00519	0,0886	2,92E + 05
40	1,94	3,20E-05	1,65E-05	0,00514	0,122	
50	1,94	2,73E-05	1,41E-05	0,00509	0,178	
59	1,94	2,38E-05	1,23E-05	0,00504	0,247	
60	1,94	2,35E-05	1,21E-05	0,00503	0,256	
68	1,94	2,10E-05	1,08E-05	0,00499	0,339	
70	1,93	2,05E-05	1,06E-05	0,00498	0,363	3,20E + 05
80	1,93	1,80E-05	9,32E-06	0,00492	0,507	
90	1,93	1,59E-05	8,26E-06	0,00486	0,699	
100	1,93	1,43E-05	7,38E-06	0,00480	0,950	
110	1,92	1,28E-05	6,68E-06	0,00474	1,28	
120	1,92	1,16E-05	6,05E-06	0,00467	1,70	3,32E + 05
130	1,91	1,06E-05	5,54E-06	0,00461	2,23	
140	1,91	9,70E-06	5,08E-06	0,00454	2,89	
150	1,90	8,93E-06	4,70E-06	0,00448	3,72	
160	1,89	8,26E-06	4,37E-06	0,00441	4,75	
170	1,89	7,67E-06	4,06E-06	0,00434	6,00	
180	1,88	7,15E-06	3,80E-06	0,00427	7,52	
190	1,87	6,69E-06	3,58E-06	0,00420	9,34	
200	1,87	6,28E-06	3,36E-06	0,00413	11,5	3,08E + 05
212	1,86	5,84E-06	3,14E-06	0,00404	14,7	

Tabela A.8 Propriedades da Água (Unidades SI)

Temperatura, T (°C)	Massa Específica, ρ (kg/m³)	Viscosidade Dinâmica, μ (N · s/m²)	Viscosidade Cinemática, ν (m²/s)	Tensão Superficial, σ (N/m)	Pressão de Vapor, p_v (kPa)	Módulo de Compressibilidade, E_v (GPa)
0	1000	1,76E-03	1,76E-06	0,0757	0,661	2,01
5	1000	1,51E-03	1,51E-06	0,0749	0,872	
10	1000	1,30E-03	1,30E-06	0,0742	1,23	
15	999	1,14E-03	1,14E-06	0,0735	1,71	
20	998	1,01E-03	1,01E-06	0,0727	2,34	2,21
25	997	8,93E-04	8,96E-07	0,0720	3,17	
30	996	8,00E-04	8,03E-07	0,0712	4,25	
35	994	7,21E-04	7,25E-07	0,0704	5,63	
40	992	6,53E-04	6,59E-07	0,0696	7,38	
45	990	5,95E-04	6,02E-07	0,0688	9,59	
50	988	5,46E-04	5,52E-07	0,0679	12,4	2,29
55	986	5,02E-04	5,09E-07	0,0671	15,8	
60	983	4,64E-04	4,72E-07	0,0662	19,9	
65	980	4,31E-04	4,40E-07	0,0654	25,0	
70	978	4,01E-04	4,10E-07	0,0645	31,2	
75	975	3,75E-04	3,85E-07	0,0636	38,6	
80	972	3,52E-04	3,62E-07	0,0627	47,4	
85	969	3,31E-04	3,41E-07	0,0618	57,8	
90	965	3,12E-04	3,23E-07	0,0608	70,1	2,12
95	962	2,95E-04	3,06E-07	0,0599	84,6	
100	958	2,79E-04	2,92E-07	0,0589	101	

Tabela A.9 Propriedades do Ar à Pressão Atmosférica (Unidades Usuais nos EUA)

Temperatura, T (°F)	Massa Específica, ρ (slug/ft³)	Viscosidade Dinâmica, μ (lbf · s/ft²)	Viscosidade Cinemática, ν (ft²/s)
40	0,00247	3,63E-07	1,47E-04
50	0,00242	3,69E-07	1,52E-04
59	0,00238	3,74E-07	1,57E-04
60	0,00237	3,74E-07	1,58E-04
68	0,00234	3,79E-07	1,62E-04
70	0,00233	3,80E-07	1,63E-04
80	0,00229	3,85E-07	1,68E-04
90	0,00225	3,91E-07	1,74E-04
100	0,00221	3,96E-07	1,79E-04
110	0,00217	4,02E-07	1,86E-04
120	0,00213	4,07E-07	1,91E-04
130	0,00209	4,12E-07	1,97E-04
140	0,00206	4,18E-07	2,03E-04
150	0,00202	4,23E-07	2,09E-04
160	0,00199	4,28E-07	2,15E-04
170	0,00196	4,33E-07	2,21E-04
180	0,00193	4,38E-07	2,27E-04
190	0,00190	4,43E-07	2,33E-04
200	0,00187	4,48E-07	2,40E-04

Tabela A.10 Propriedades do Ar à Pressão Atmosférica (Unidades SI)

Temperatura, T (°C)	Massa Específica, ρ (kg/m³)	Viscosidade Dinâmica, μ (N · s/m²)	Viscosidade Cinemática, ν (m²/s)
0	1,29	1,72E-05	1,33E-05
5	1,27	1,74E-05	1,37E-05
10	1,25	1,76E-05	1,41E-05
15	1,23	1,79E-05	1,45E-05
20	1,21	1,81E-05	1,50E-05
25	1,19	1,84E-05	1,54E-05
30	1,17	1,86E-05	1,59E-05
35	1,15	1,88E-05	1,64E-05
40	1,13	1,91E-05	1,69E-05
45	1,11	1,93E-05	1,74E-05
50	1,09	1,95E-05	1,79E-05
55	1,08	1,98E-05	1,83E-05
60	1,06	2,00E-05	1,89E-05
65	1,04	2,02E-05	1,94E-05
70	1,03	2,04E-05	1,98E-05
75	1,01	2,06E-05	2,04E-05
80	1,00	2,09E-05	2,09E-05
85	0,987	2,11E-05	2,14E-05
90	0,973	2,13E-05	2,19E-05
95	0,960	2,15E-05	2,24E-05
100	0,947	2,17E-05	2,29E-05

REFERÊNCIAS

1. *Handbook of Chemistry and Physics*, 62nd ed. Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1981–1982.
2. "Meriam Standard Indicating Fluids," Pamphlet No. 920GEN: 430-1, The Meriam Instrument Co., 10920 Madison Avenue, Cleveland, OH 44102.
3. E. Vernon Hill, Inc., P.O. Box 7053, Corte Madera, CA 94925.
4. Avallone, E. A., and T. Baumeister, III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 9th ed. New York: McGraw-Hill, 1987.
5. *Handbook of Tables for Applied Engineering Science.* Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1970.
6. Vargaftik, N. B., *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases*, 2nd ed. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Corp., 1975.
7. *The U.S. Standard Atmosphere (1976).* Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1976.
8. Trefethen, L., "Surface Tension in Fluid Mechanics," in *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics.* Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972.
9. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics.* New York: McGraw-Hill, 1961.
10. Touloukian, Y. S., S. C. Saxena, and P. Hestermans, *Thermophysical Properties of Matter, the TPRC Data Series. Vol. 11—Viscosity.* New York: Plenum Publishing Corp., 1975.
11. Reid, R. C., and T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1966.
12. "Engine Oil Viscosity Classification—SAE Standard J300 Jun86," *SAE Handbook*, 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
13. "Axle and Manual Transmission Lubricant Viscosity Classification—SAE Standard J306 Mar85," *SAE Handbook*, 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
14. "Fluid for Passenger Car Type Automatic Transmissions—SAE Information Report J311 Apr86," *SAE Handbook*, 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
15. ASTM Standard D 341–77, "Viscosity-Temperature Charts for Liquid Petroleum Products," American Society for Testing and Materials, 1916 Race Street, Philadelphia, PA 19103.
16. NASA, *Compressed Gas Handbook* (Revised). Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-3045, 1970.
17. ASME, *Thermodynamic and Transport Properties of Steam.* New York: American Society of Mechanical Engineers, 1967.

Apêndice B

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas, para massa específica constante, é

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{B.1}$$

As tensões normais e de cisalhamento em coordenadas cilíndricas, para massa específica e viscosidade constantes, são

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{B.2}$$

As equações de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas, para massa específica e viscosidade constantes, são

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3a}$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3b}$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3c}$$

Apêndice C

FILMES PARA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Listados a seguir, por fornecedor, estão os títulos de filmes sobre mecânica dos fluidos.

1. Encyclopaedia Britannica Educational Corporation
310 South Michigan Avenue
Chicago, Illinois 60604

Os vinte e dois filmes seguintes, desenvolvidos pelo *National Committee for Fluid Mechanics Films* (NCFMF)[1], encontram-se disponíveis (duração conforme assinalada):

Aerodynamic Generation of Sound (44 min, diretores: M. J. Lighthill, J. E. Ffowcs-Williams)
Boundary Layer Control (25 min, diretor: D. C. Hazen)
Cavitation (31 min, diretor: P. Eisenberg)
Channel Flow of a Compressible Fluid (29 min, diretor: D. E. Coles)
Deformation of Continuous Media (38 min, diretor: J. L. Lumley)
Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics (27 min, diretor: J. L. Lumley)
Flow Instabilities (27 min, diretor: E. L. Mollo-Christensen)
Flow Visualization (31 min, diretor: S. J. Kline)
The Fluid Dynamics of Drag[2] (4 parts, 120 min, diretor: A. H. Shapiro)
Fundamentals of Boundary Layers (24 min, diretor: F. H. Abernathy)
Low-Reynolds-Number Flows (33 min, diretor: Sir G. I. Taylor)
Magnetohydrodynamics (27 min, diretor: J. A. Shercliff)
Pressure Fields and Fluid Acceleration (30 min, diretor: A. H. Shapiro)
Rarefied Gas Dynamics (33 min, diretores: F. C. Hurlbut, F. S. Sherman)
Rheological Behavior of Fluids (22 min, diretor: H. Markovitz)
Rotating Flows (29 min, diretor: D. Fultz)
Secondary Flow (30 min, diretor: E. S. Taylor)
Stratified Flow (26 min, diretor: R. R. Long)
Surface Tension in Fluid Mechanics (29 min, diretor: L. M. Trefethen)
Turbulence (29 min, diretor: R. W. Stewart)
Vorticity (2 parts, 44 min, diretor: A. H. Shapiro)
Waves in Fluids (33 min, diretor: A. E. Bryson)

2. The University of Iowa
AVC Marketing
215 Seashore Center
Iowa City, Iowa 52242-1402

[1]Resumos detalhados dos filmes da NCFMF estão contidos em *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics* (Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972).
[2]O conteúdo deste filme está resumido e ilustrado em *Shape and Flow: The Fluid Dynamics of Drag*, por Ascher H. Shapiro (New York: Anchor Books, 1961).

Os seis filmes seguintes foram preparados por H. Rouse como uma série, na ordem listada. Eles podem ser vistos individualmente sem perda maior de continuidade.

Introduction to the Study of Fluid Motion (24 min). Este filme de orientação mostra uma variedade de fenômenos de escoamento familiares. O emprego de modelos em escala para o estudo empírico de fenômenos complexos é ilustrado e o significado dos números de Euler, Froude, Mach e Reynolds, como parâmetros de semelhança, é mostrado usando diversas seqüências de escoamentos para o modelo e o protótipo.

Fundamental Principles of Flow (23 min). Os conceitos básicos e as relações físicas necessárias para a análise dos movimentos dos fluidos são desenvolvidos neste filme. As equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia são deduzidas e empregadas para analisar um dispositivo de propulsão a jato.

Fluid Motion in a Gravitational Field (23 min). Os efeitos de empuxo e os escoamentos de superfície livre são ilustrados neste filme. O número de Froude é mostrado como um parâmetro fundamental para escoamentos de superfície livre. Os movimentos de ondas são mostrados para escoamentos em canais abertos e escoamentos de massa específica estratificada.

Characteristics of Laminar and Turbulent Flow (26 min). Corante, fumaça, partículas em suspensão e bolhas de hidrogênio são usadas para visualizar escoamentos laminares e turbulentos. As instabilidades que conduzem à turbulência são mostradas; a produção e extinção da turbulência e mistura são descritas.

Form Drag, Lift, and Propulsion (24 min). Os efeitos da separação de camada-limite sobre a configuração do escoamento e as distribuições de pressão são mostrados para diversas formas de corpos. As características básicas de formas de sustentação, incluindo efeitos de razão de aspecto, são discutidas, e os resultados são aplicados na análise do desempenho de hélices e conversores de torque.

Effects of Fluid Compressibility (17 min). A analogia hidráulica entre o escoamento de líquido em canal aberto e o escoamento de gás compressível é usada para mostrar modelos de ondas representativos. A visualização do escoamento pelo método ótico de Schlieren é empregada em um túnel de vento supersônico para mostrar configurações de escoamento em torno de diversos corpos, a velocidades subsônicas e supersônicas.

3. American Institute of Aeronautics and Astronautics
370 L'Enfant Promenade, S.W.
Washington, D.C. 20024-2518

America's Wings (29 min). Pessoas que deram importantes contribuições para o desenvolvimento de aviões para vôo de alta velocidade são entrevistadas; eles discutem e explicam suas contribuições. Trata-se de um filme eficaz para uma platéia relativamente sofisticada.

4. Purdue University
Center for Instructional Services
Film Booking
Hicks Undergraduate Library
West Lafayette, Indiana 47907

Tacoma Narrows Bridge Collapse (3 min, mudo). Este curta-metragem contém a espetacular filmagem original do colapso espontâneo, sob uma leve brisa, da ponte de 2800 ft suspensa sobre o estreito de Tacoma, ocorrido em 7 de novembro de 1940.

Apêndice D

CURVAS DE DESEMPENHO SELECIONADAS PARA BOMBAS E VENTILADORES

D-1 INTRODUÇÃO

Muitas empresas, em todo o mundo, fabricam máquinas de fluxo de vários tipos e tamanhos padrões. Cada fabricante publica dados completos de desempenho para permitir a aplicação de suas máquinas em sistemas. Este Apêndice contém dados de desempenho selecionados para uso na solução de problemas de sistemas de bombas e ventiladores. Dois tipos de bomba e um tipo de ventilador estão incluídos.

A escolha de um fabricante pode basear-se na prática adquirida, na localização ou no custo. Uma vez escolhido o fabricante, a seleção da máquina é um processo de três etapas:

1. Selecione um tipo de máquina, adequado à aplicação, a partir de um catálogo da linha completa de um fabricante, que forneça as faixas de elevação de pressão (altura de carga) e vazão para cada tipo de máquina.
2. Escolha um modelo de máquina apropriado e uma velocidade do motor a partir de um mapa de seleção que superpõe as faixas de altura de carga e de vazão de uma série de máquinas em um só gráfico.
3. Verifique se a máquina pré-selecionada é satisfatória para a aplicação pretendida, usando uma curva detalhada de desempenho para a máquina específica.

É prudente consultar engenheiros de sistemas experientes, sejam eles empregados da empresa fornecedora da máquina ou de sua própria organização, antes de tomar a decisão final de compra.

Hoje, muitos fabricantes usam procedimentos informatizados para selecionar uma máquina que seja a mais adequada para cada aplicação. Tais procedimentos são, simplesmente, versões automatizadas do método tradicional de seleção. O emprego do mapa de seleção e das curvas detalhadas de desempenho é ilustrado a seguir para bombas e ventiladores, usando dados de um fabricante de cada tipo de máquina. A literatura de outros fabricantes difere nos detalhes, mas contém a informação necessária para a seleção de máquinas.

D-2 SELEÇÃO DE BOMBA

As Figs. D.1 a D.10 mostram dados representativos para bombas Peerless[1] horizontais, de carcaça bipartida, de um estágio (série AE), e as Figs. D.11 e D.12 para bombas Peerless de múltiplos estágios (séries TU e TUT).

As Figs. D.1 e D.2 são mapas de seleção de bombas da série AE para rotações nominais de 3500 e 1750 rpm. Nesses mapas, o número do modelo (p. ex., 6AE14) indica a bitola da linha de descarga (tubo nominal de 6 in), a série da bomba (AE), e o diâmetro máximo do rotor (aproximadamente 14 in).

[1]Peerless Pump Company, P.O. Box 7026, Indianapolis, IN 46207-7026.

As Figs. D.3 a D.10 são gráficos detalhados de desempenho para modelos individuais de bombas da série AE.

As Figs. D.11 e D.12 são mapas de seleção para as séries TU e TUT de 1750 rpm nominais. Os dados para as bombas de dois estágios são apresentados na Fig. D.11, enquanto a Fig. D.12 contém dados para bombas com três, quatro e cinco estágios.

Cada gráfico de desempenho de bomba contém curvas da altura de carga total *versus* vazão volumétrica; curvas para diversos diâmetros de rotores — testados na mesma carcaça — são apresentadas em um único gráfico. Cada gráfico de desempenho contém, também, curvas de isoeficiência da bomba e de potência do motor; o requisito de altura de sucção positiva líquida (*NPSH*), por variar com a vazão, é mostrado em uma ou mais curvas na parte inferior de cada gráfico. O ponto de melhor eficiência (PME ou "BEP — Best Efficiency Point") para cada rotor pode ser encontrado usando as curvas de isoeficiência.

O emprego dos mapas de seleção e das curvas detalhadas de desempenho é ilustrado no Problema-Exemplo D.1.

EXEMPLO D.1 Procedimento de Seleção de Bomba

Selecione uma bomba para fornecer 1750 gpm de água com uma altura de carga total de 120 ft. Escolha o modelo apropriado da bomba e a velocidade do motor. Especifique a eficiência da bomba, a potência do motor e o requisito de *NPSH*.

PROBLEMA-EXEMPLO D.1

DADOS: Selecione uma bomba para fornecer 1750 gpm de água com altura de carga total de 120 ft.

DETERMINAR:
(a) O modelo da bomba e a velocidade do motor.
(b) A eficiência da bomba.
(c) A potência do motor.
(d) O requisito de *NPSH*.

SOLUÇÃO:
Aplique o procedimento de seleção descrito na Seção D-1. (Os números a seguir correspondem às etapas enumeradas no procedimento.)

1. Primeiro, selecione um tipo de máquina adequado à aplicação. (Esta etapa, na verdade, requer um catálogo da linha completa do fabricante, o qual não é reproduzido aqui. O catálogo da linha de produtos Peerless especifica uma vazão e uma altura de carga máximas de 2500 gpm e 660 ft para as bombas da série AE. Portanto, o desempenho exigido pode ser obtido; admita que a seleção deva ser feita dessa série.)

2. Segundo, consulte o mapa de seleção de bombas. O ponto de operação desejado não se encontra dentro de qualquer contorno do mapa para 3500 rpm (Fig. D.1). Do diagrama para 1750 rpm (Fig. D.2), selecione uma bomba modelo 6AE14. Da curva de desempenho para a bomba 6AE14 (Fig. D.6), escolha um rotor de 13 in.

3. Terceiro, verifique o desempenho da máquina, usando o gráfico detalhado. Sobre o gráfico de desempenho para o modelo 6AE14, estenda uma linha vertical a partir da abscissa em $Q = 1750$ gpm. Trace uma linha horizontal da ordenada em $H = 120$ ft até essa linha vertical. A interseção é o desempenho da bomba no ponto de operação desejado:

$$\eta \approx 85{,}8\ \% \qquad \mathcal{P} \approx 64\ \text{hp}$$

A partir do ponto de operação, projete uma linha vertical para baixo até a curva de requisito de *NPSH*. Na interseção, leia $NPSH \approx 17$ ft.

{ Isso completa o processo de seleção da bomba. Engenheiros experientes devem ser consultados para certificar que a condição de operação do sistema foi prevista com exatidão e a bomba selecionada corretamente. }

D-3 SELEÇÃO DE VENTILADOR

A seleção de ventiladores é semelhante à seleção de bomba. Um mapa de seleção representativo é mostrado na Fig. D.13 para uma série de ventiladores axiais Buffalo Forge[2]. O mapa mostra o desempenho da série completa de ventiladores como uma função do tamanho do ventilador e da velocidade do motor.

O mapa de seleção de ventiladores é usado para a seleção preliminar de um tamanho de ventilador e de uma velocidade de motor. A avaliação final da adequação do modelo de ventilador à aplicação em vista é feita usando os gráficos detalhados de desempenho para o modelo específico. Uma amostra de gráfico de desempenho para um ventilador de pás axiais Buffalo Forge Tamanho 48 é apresentada na Fig. D.14.

O gráfico de desempenho mostra o aumento total de pressão *versus* a vazão volumétrica. A Fig. D.14 contém curvas para os rotores HB, LB e MB, operando a várias velocidades constantes; as faixas sombreadas representam a eficiência total medida para os ventiladores.

EXEMPLO D.2 Procedimento de Seleção de Ventilador

Selecione um ventilador de fluxo axial para fornecer 40.000 cfm de ar padrão a 1,25 inH_2O de pressão total. Escolha o modelo apropriado de ventilador e a velocidade do motor. Especifique a eficiência do ventilador e a potência do motor.

PROBLEMA-EXEMPLO D.2

DADOS: Selecione um ventilador axial para fornecer 40.000 cfm de ar padrão a 1,25 inH_2O de altura de carga total.

DETERMINAR: (a) O tamanho do ventilador e a velocidade do motor.
(b) A eficiência do ventilador.
(c) A potência do motor.

SOLUÇÃO:
Aplique o procedimento de seleção de ventiladores descrito na Seção D-1. (Os números a seguir correspondem às etapas enumeradas no procedimento.)

1. Primeiro, selecione um tipo de máquina adequado à aplicação. (Esta etapa, na verdade, requer o catálogo da linha completa do fabricante, o qual não é reproduzido aqui. Admita que a seleção do ventilador deva ser feita a partir dos dados de ventiladores axiais apresentados na Fig. D.13.)
2. Segundo, consulte o mapa de seleção. O ponto de operação desejado está dentro do contorno para o Tamanho 48 do mapa de seleção (Fig. D.13). Para alcançar o desempenho desejado, é necessário acionar o ventilador a 870 rpm.
3. Terceiro, verifique o desempenho da máquina usando o gráfico detalhado (Fig. D.14). Sobre o gráfico detalhado de desempenho, estenda uma linha vertical a partir da abscissa em $Q = 40.000$ cfm. Trace uma linha horizontal a partir da ordenada em $p = 1{,}25$ inH_2O até essa linha vertical. A interseção é o ponto de operação desejado.

   Essas condições de operação não podem ser providas por um rotor Tipo LB; contudo, elas estão próximas do pico de eficiência para ambos os rotores, HB e MB. As condições de operação podem ser supridas a cerca de 72% de eficiência total, usando um rotor HB. Com um rotor MB, pode-se esperar uma eficiência ligeiramente superior a 75%. Do gráfico, o "fator de eficiência" é 4780 para $\eta = 0{,}75$, e potência requerida pelo motor é

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Pressão Total} \times \text{Capacidade}}{\text{Fator de Eficiência}} = \frac{1{,}25 \text{ in } H_2O \times 40.000 \text{ cfm}}{4780} = 10{,}5 \text{ hp}$$

{ Isso completa o processo de seleção do ventilador. Novamente, engenheiros de sistemas experientes devem ser consultados para certificar que a condição de operação do sistema foi prevista com exatidão e o ventilador selecionado corretamente. }

[2]Buffalo Forge, 465 Broadway, Buffalo, NY 14240.

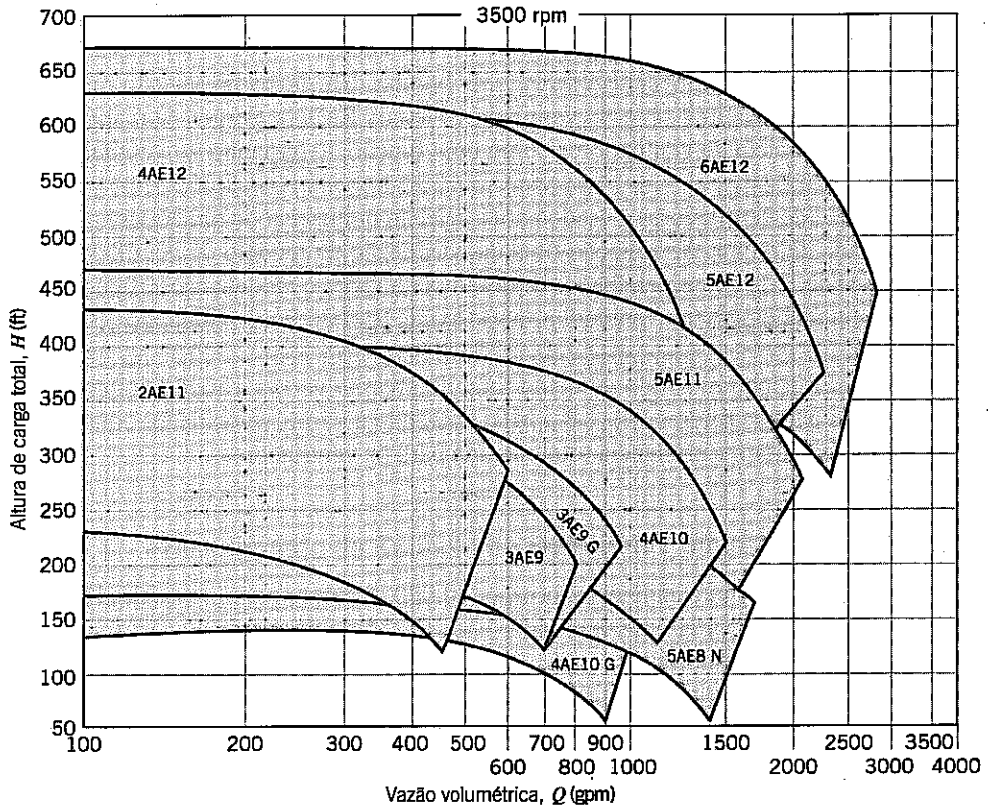


Fig. D.1 Mapa de seleção de bombas Peerless horizontais, de carcaça bipartida (série AE), para 3500 rpm nominais.

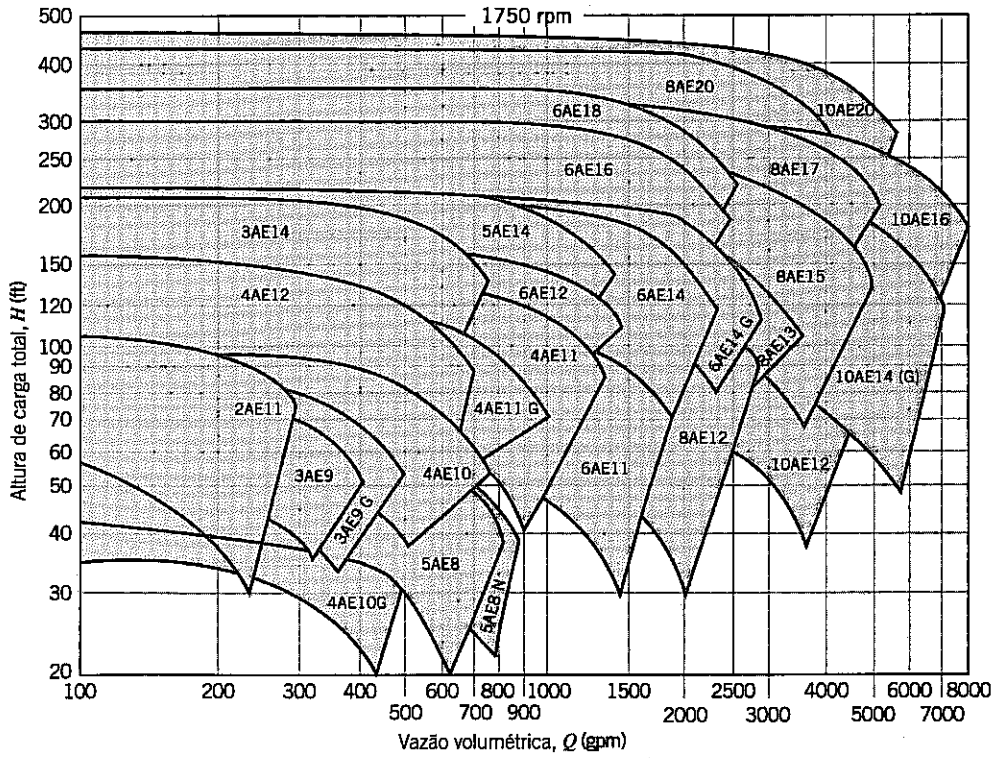


Fig. D.2 Mapa de seleção de bombas Peerless horizontais, de carcaça bipartida (série AE), para 1750 rpm nominais.

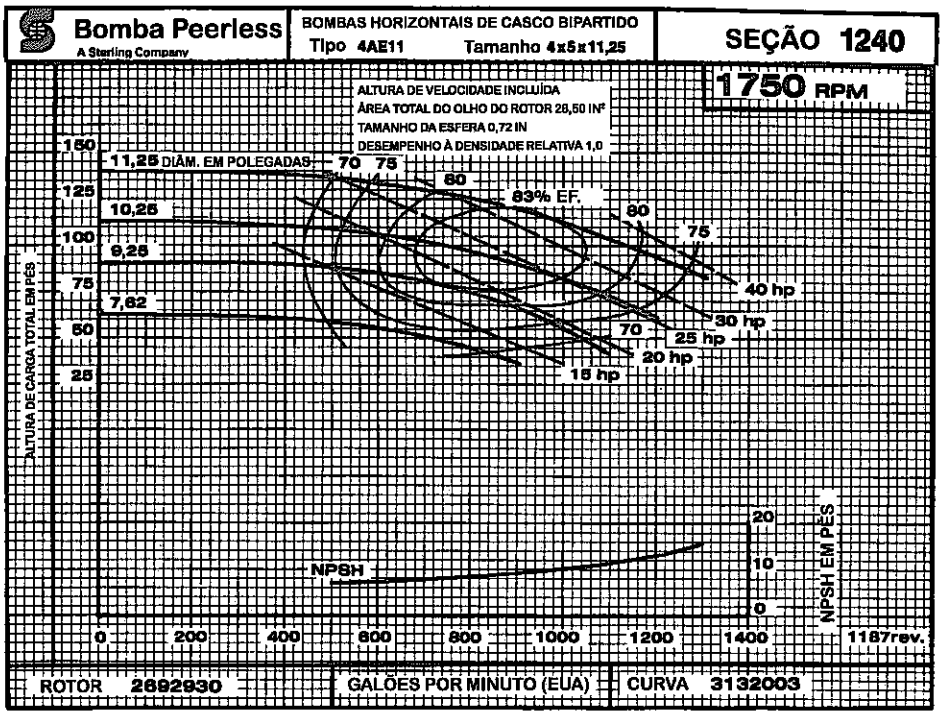


Fig. D.3 Curva de desempenho para a bomba Peerless 4AE11 a 1750 rpm.

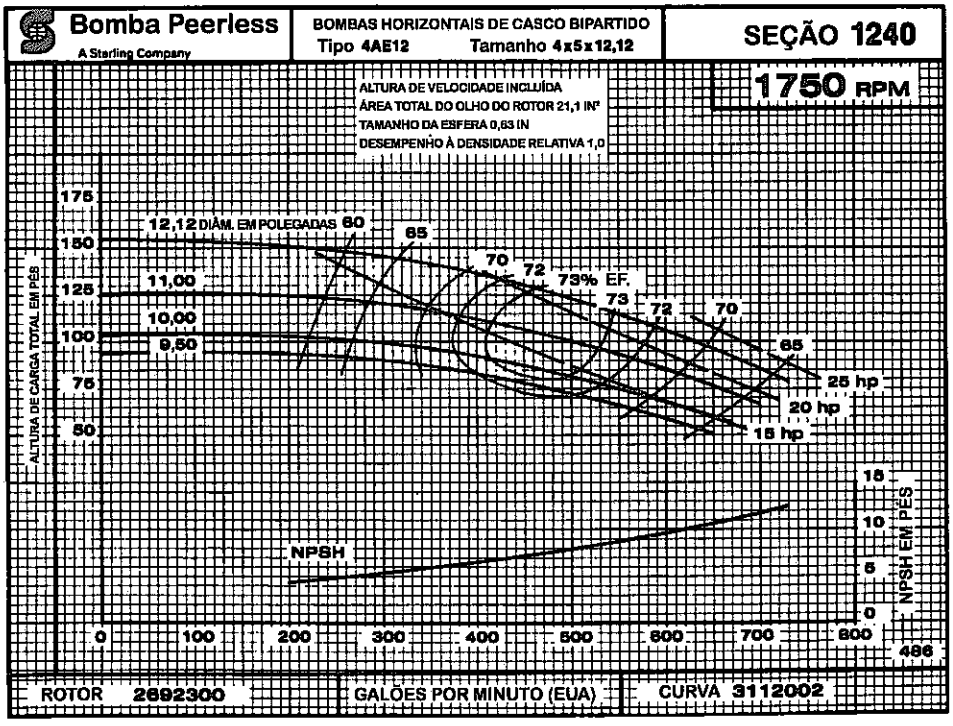


Fig. D.4 Curva de desempenho para a bomba Peerless 4AE12 a 1750 rpm.

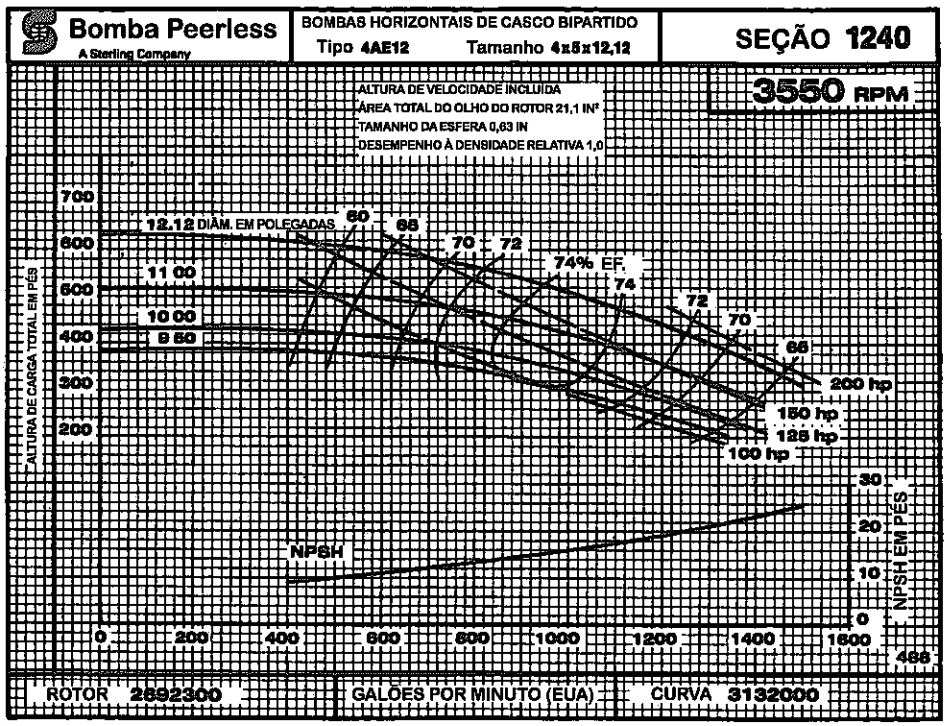


Fig. D.5 Curva de desempenho para a bomba Peerless 4AE12 a 3550 rpm.

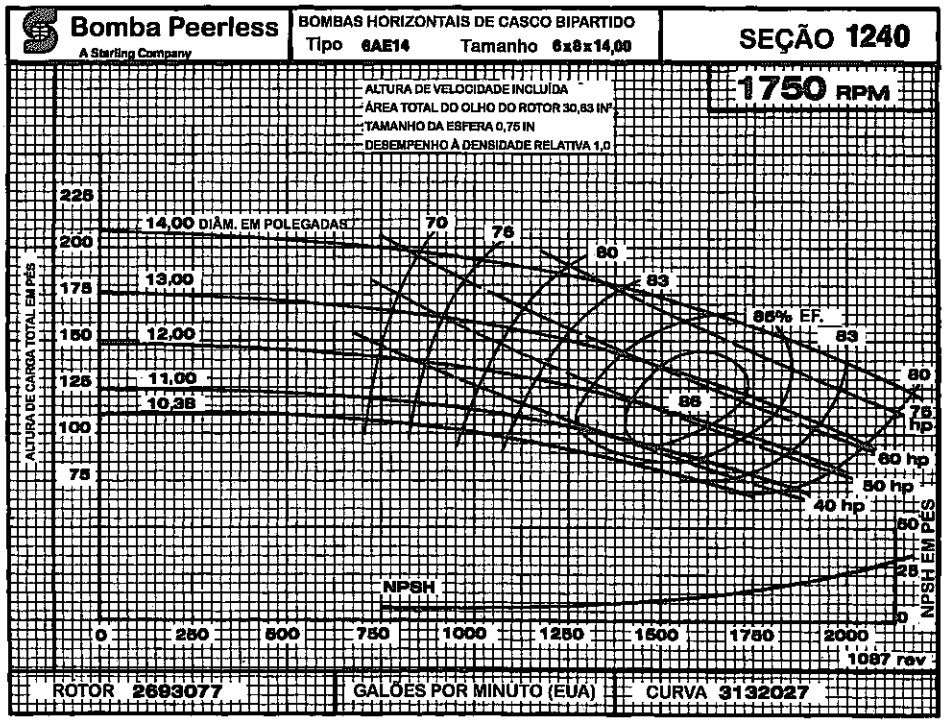


Fig. D.6 Curva de desempenho para a bomba Peerless 6AE14 a 1750 rpm.

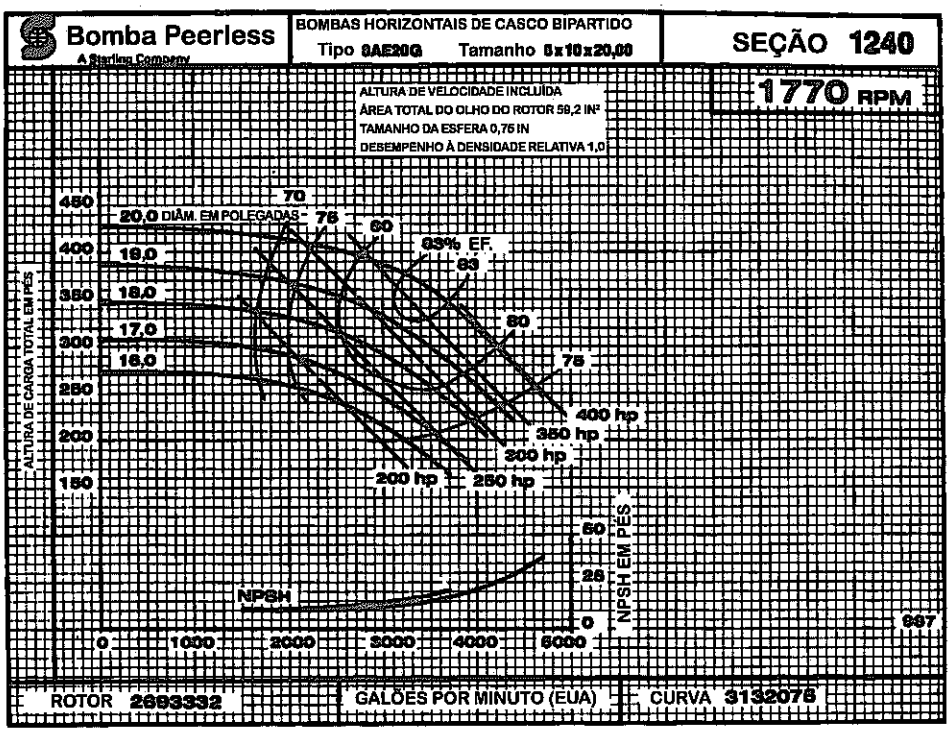


Fig. D.7 Curva de desempenho para a bomba Peerless 8AE20G a 1770 rpm.

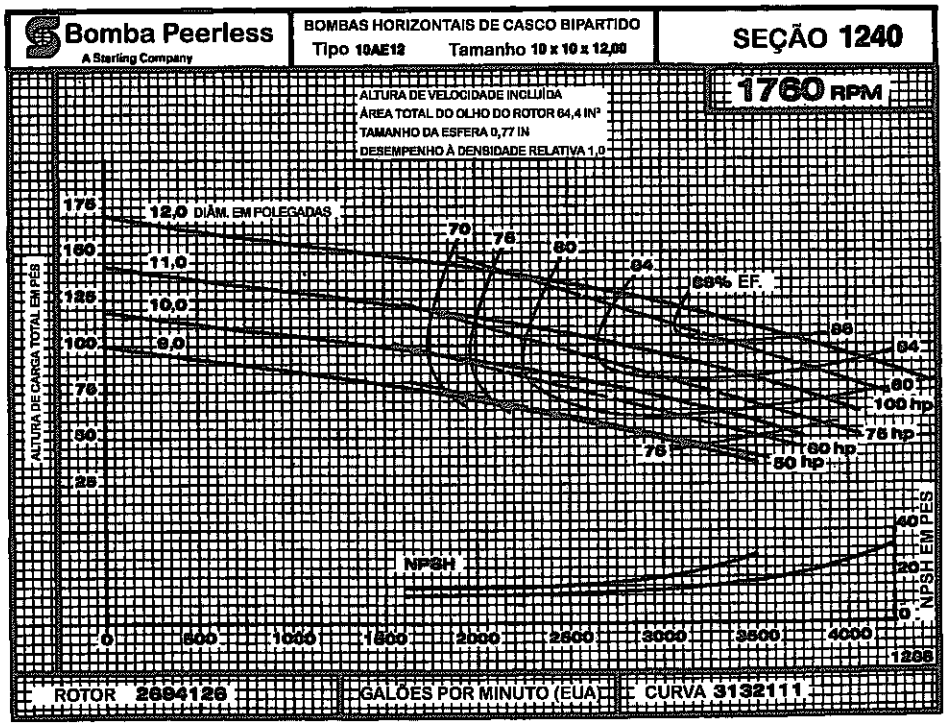


Fig. D.8 Curva de desempenho para a bomba Peerless 10AE12 a 1760 rpm.

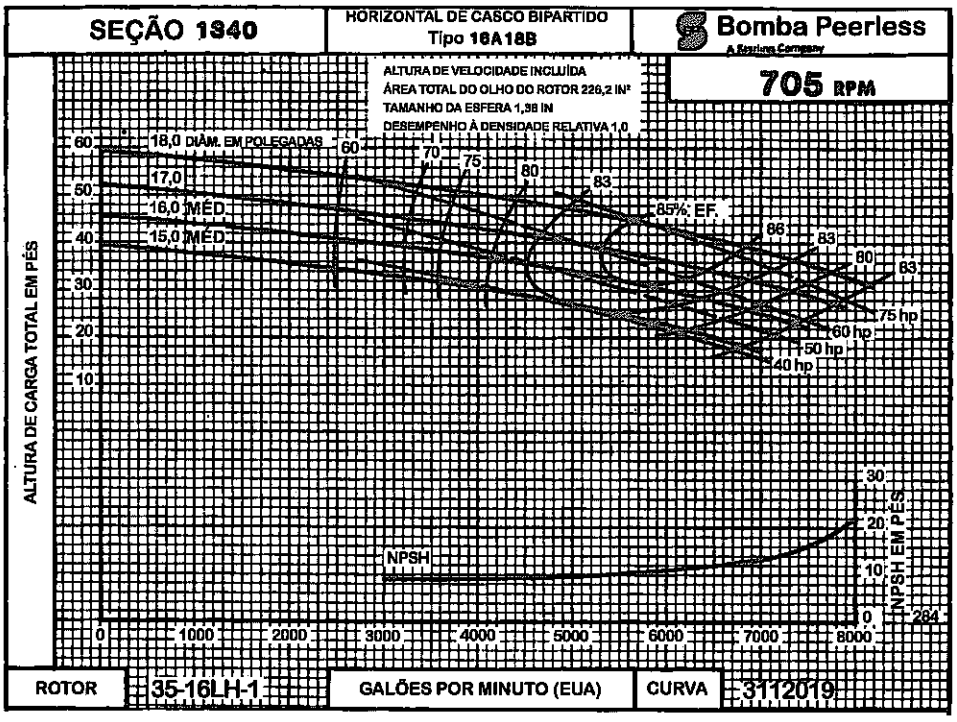


Fig. D.9 Curva de desempenho para a bomba Peerless 16A 18B a 705 rpm.

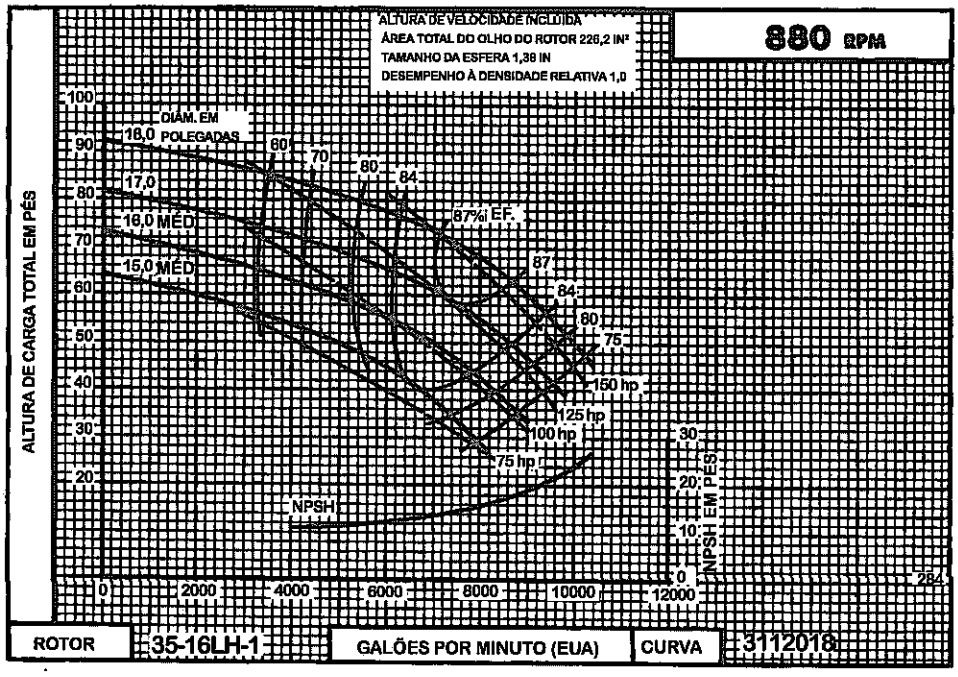


Fig. D.10 Curva de desempenho para a bomba Peerless 16A 18B a 880 rpm.

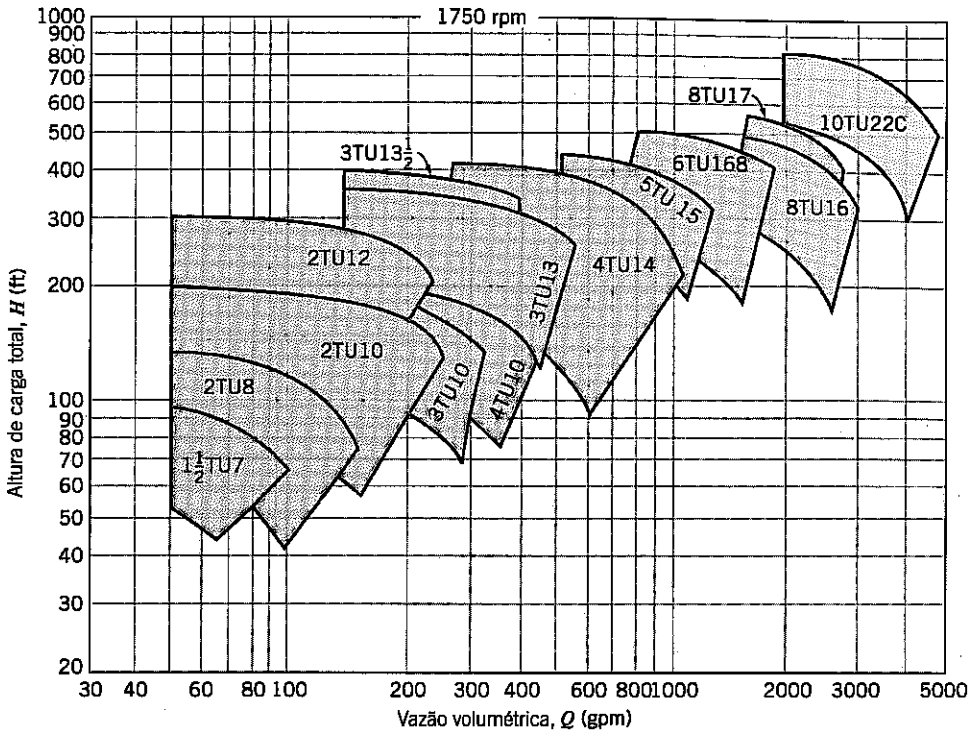


Fig. D.11 Mapa de seleção de bombas Peerless de dois estágios (séries TU e TUT) para 1750 rpm nominais.

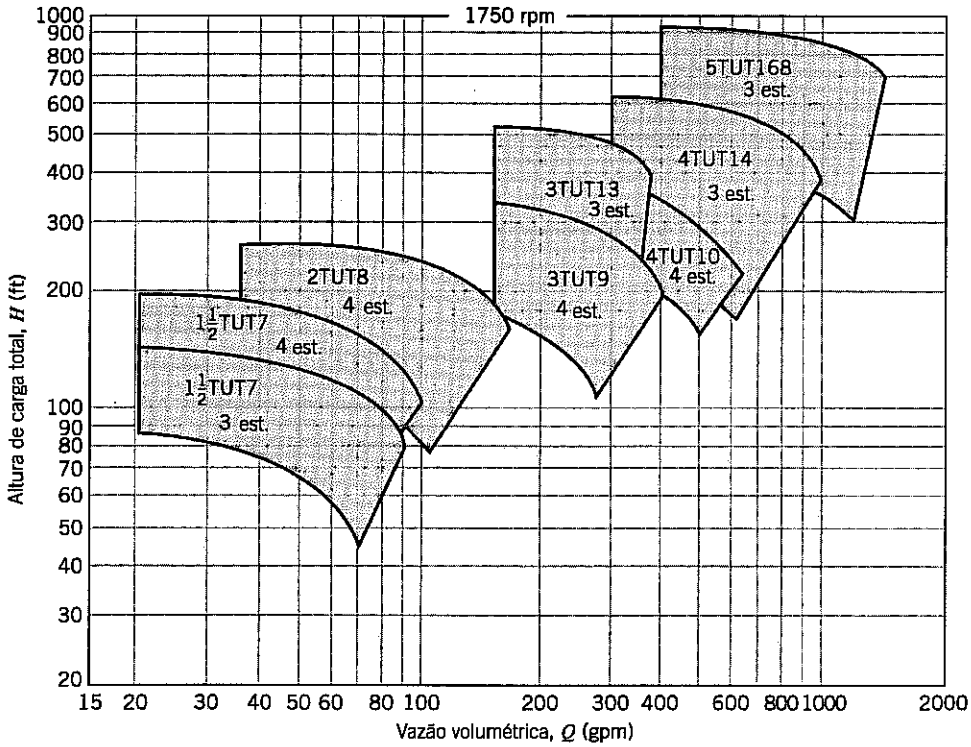


Fig. D.12 Mapa de seleção de bombas Peerless de múltiplos estágios (séries TU e TUT) para 1750 rpm nominais.

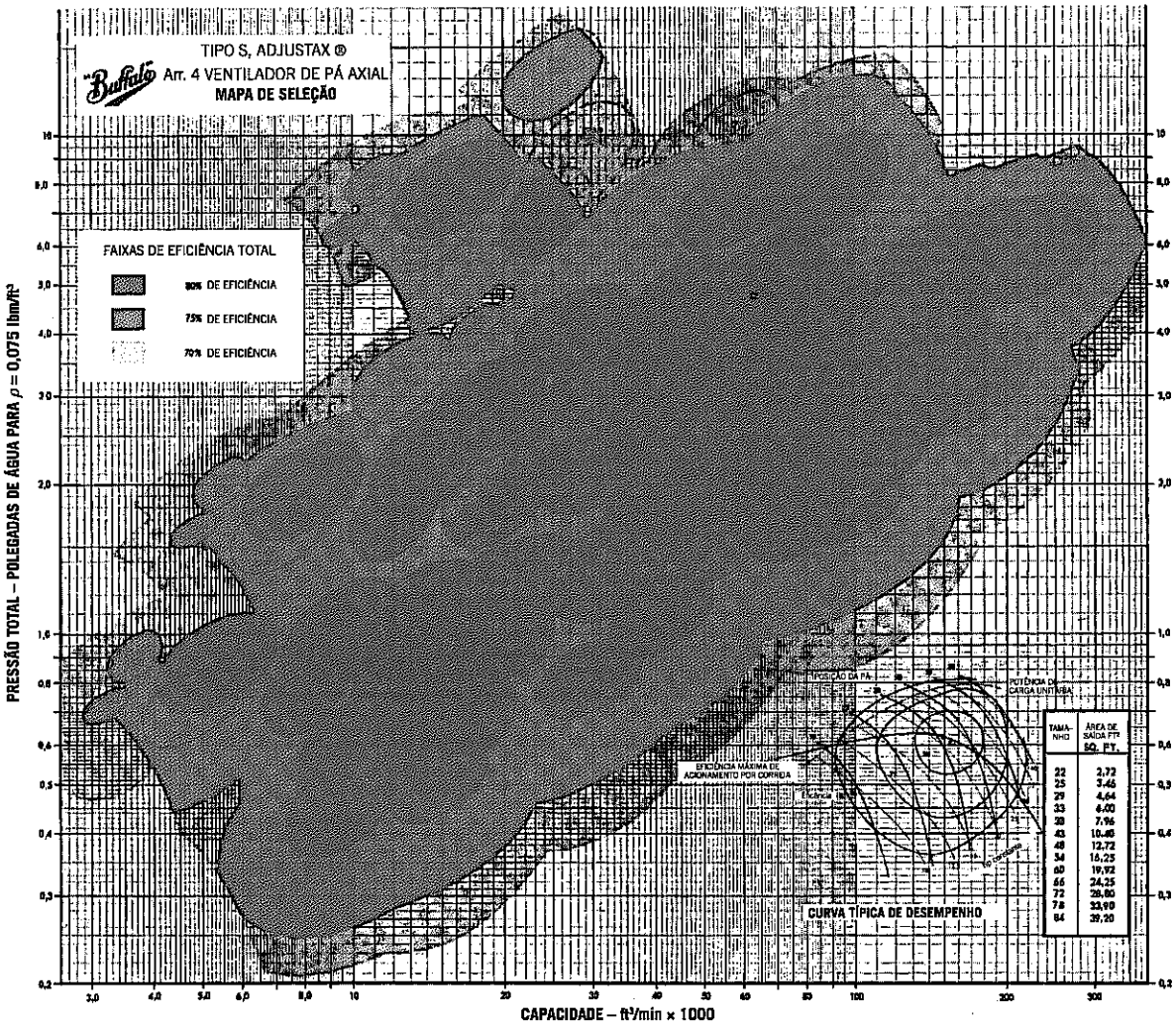


Fig. D.13 Mapa de seleção de ventiladores axiais Buffalo Forge.

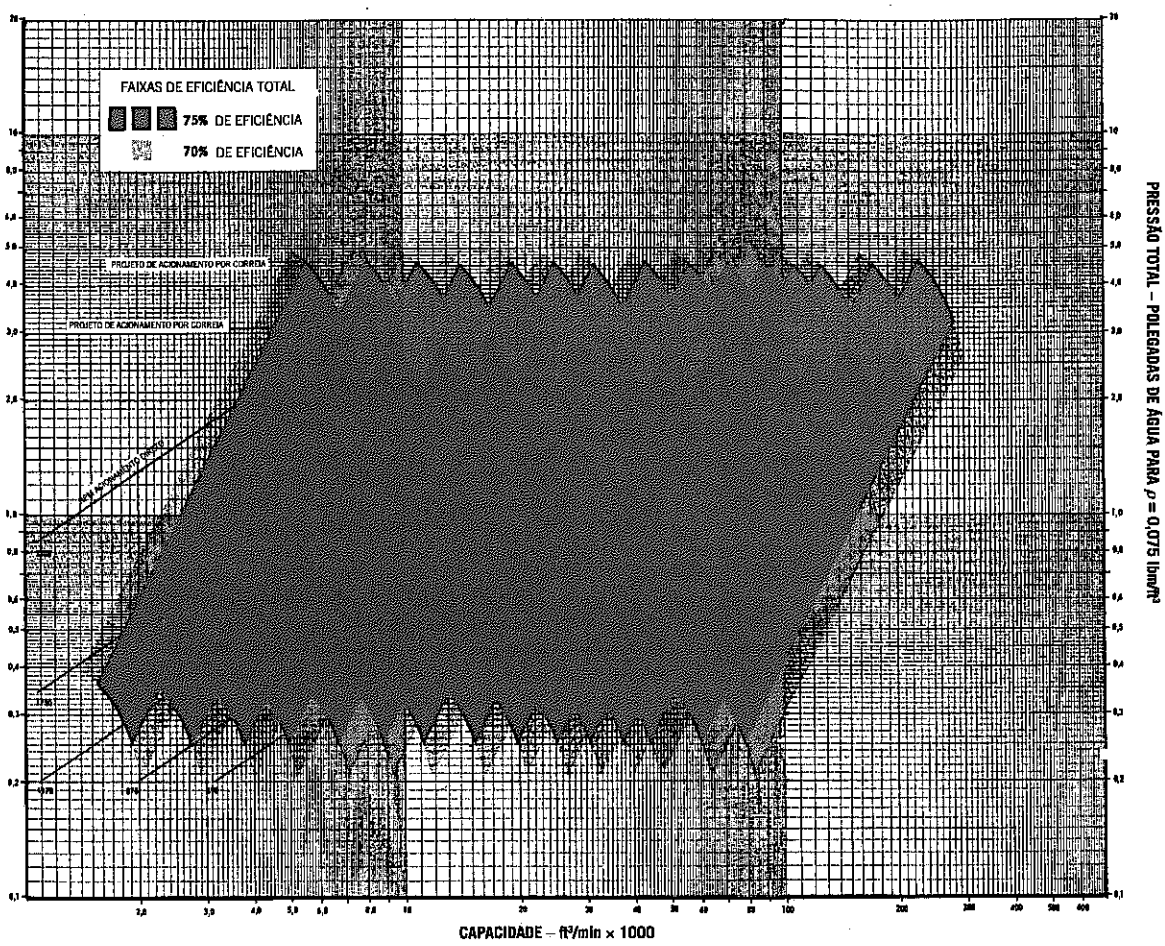


Fig. D.14 Gráfico de desempenho de ventiladores axiais Buffalo Forge.

REFERÊNCIAS

1. Peerless Pump literature:
   - Horizontal Split Case Single Stage Double Suction Pumps, Series AE, Brochure B-1200, 1987.
   - Horizontal Split Case Series AE Pumps, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1240, n.d.
   - Horizontal Split Case, Multistage Single Suction Pumps, Types TU, TUT, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1440, n.d.
2. Buffalo Forge literature:
   - Axial Flow Fans, Bulletin F-305A, 1968.

Apêndice E

FUNÇÕES DE ESCOAMENTO PARA CÁLCULO DE ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

E-1 ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO

As funções de escoamento isoentrópico são calculadas usando as seguintes equações:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \qquad (11.20b)/(12.7b)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (11.20a)/(12.7a)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \qquad (11.20c)/(12.7c)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \qquad (12.7d)$$

Valores representativos das funções de escoamento isoentrópico para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.1 e, em gráfico, na Fig. E.1.

Tabela E.1 Funções do Escoamento Isoentrópico (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	∞
0,50	0,9524	0,8430	0,8852	1,340
1,00	0,8333	0,5283	0,6339	1,000
1,50	0,6897	0,2724	0,3950	1,176
2,00	0,5556	0,1278	0,2301	1,688
2,50	0,4444	0,05853	0,1317	2,637
3,00	0,3571	0,02722	0,07623	4,235
3,50	0,2899	0,01311	0,04523	6,790
4,00	0,2381	0,006586	0,02766	10,72
4,50	0,1980	0,003455	0,01745	16,56
5,00	0,1667	0,001890	0,01134	25,00

Esta Tabela foi elaborada a partir da planilha do *Excel Relações Isoentrópicas*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

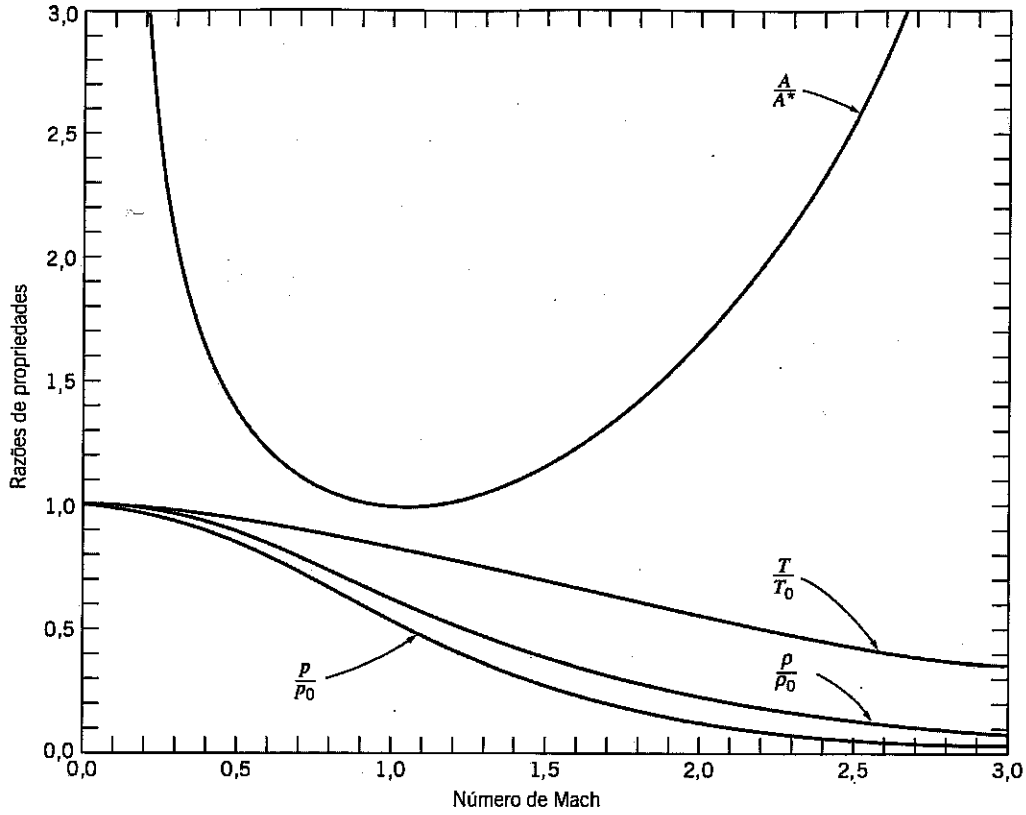


Fig. E.1 Funções de escoamento isoentrópico.

Este gráfico foi gerado a partir de uma planilha do *Excel*. A planilha pode ser facilmente modificada para gerar curvas para um gás diferente.

E-2 ESCOAMENTO DE LINHA DE FANNO

As funções de escoamento de linha de Fanno são calculadas usando as seguintes equações:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.21e}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{12.21b}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21d}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.21c}$$

$$\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\right] \tag{12.21a}$$

Valores representativos das funções de escoamento de linha de Fanno para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.2 e, em gráfico, na Fig. E.2.

Tabela E.2 Funções de Linha de Fanno (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
0,00	∞	1,200	∞	0,0000	∞
0,50	1,340	1,143	2,138	0,5345	1,069
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0000
1,50	1,176	0,8276	0,6065	1,365	0,1361
2,00	1,688	0,6667	0,4083	1,633	0,3050
2,50	2,637	0,5333	0,2921	1,826	0,4320
3,00	4,235	0,4286	0,2182	1,964	0,5222
3,50	6,790	0,3478	0,1685	2,064	0,5864
4,00	10,72	0,2857	0,1336	2,138	0,6331
4,50	16,56	0,2376	0,1083	2,194	0,6676
5,00	25,00	0,2000	0,08944	2,236	0,6938

Esta Tabela foi elaborada a partir da planilha do *Excel Relações de Linha de Fanno*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

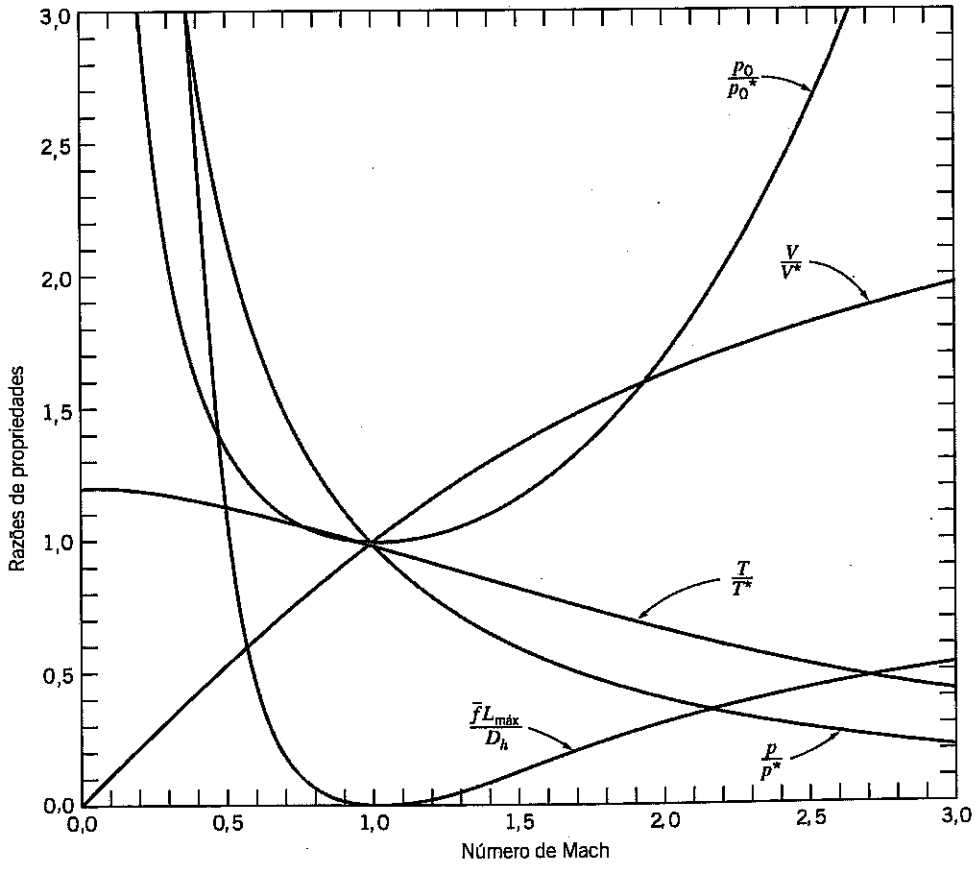


Fig. E.2 Funções de escoamento de linha de Fanno.

Este gráfico foi gerado a partir de uma planilha do *Excel*. A planilha pode ser facilmente modificada para gerar curvas para um gás diferente.

E-3 ESCOAMENTO DE LINHA DE RAYLEIGH

As funções de escoamento de linha de Rayleigh são calculadas usando as seguintes equações:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1+kM^2)^2} \tag{12.31d}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/(k-1)} \tag{12.31e}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \tag{12.31b}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{12.31a}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} \tag{12.31c}$$

Valores representativos das funções de escoamento de linha de Rayleigh para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.3 e, em gráfico, na Fig. E.3.

Tabela E.3 Funções de Linha de Rayleigh (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
0,00	0,0000	1,268	0,0000	2,400	0,0000
0,50	0,6914	1,114	0,7901	1,778	0,4444
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,50	0,9093	1,122	0,7525	0,5783	1,301
2,00	0,7934	1,503	0,5289	0,3636	1,455
2,50	0,7101	2,222	0,3787	0,2462	1,539
3,00	0,6540	3,424	0,2803	0,1765	1,588
3,50	0,6158	5,328	0,2142	0,1322	1,620
4,00	0,5891	8,227	0,1683	0,1026	1,641
4,50	0,5698	12,50	0,1354	0,08177	1,656
5,00	0,5556	18,63	0,1111	0,06667	1,667

Esta Tabela foi elaborada a partir da planilha do *Excel Relações de Linha de Rayleigh*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

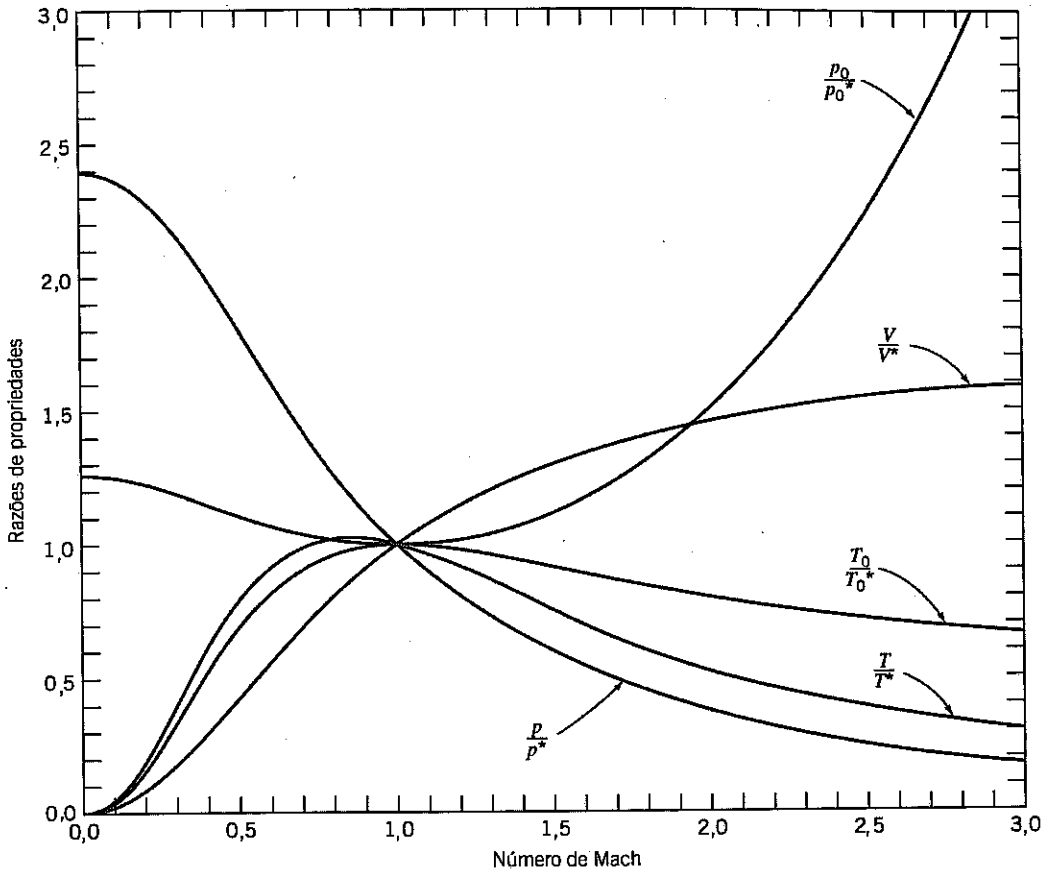


Fig. E.3 Funções de escoamento de linha de Rayleigh.

Este gráfico foi gerado a partir de uma planilha do *Excel*. A planilha pode ser facilmente modificada para gerar curvas para um gás diferente.

E-4 CHOQUE NORMAL

As funções de escoamento de choque normal são calculadas usando as seguintes equações:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \tag{12.41a}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1} M_1^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.41b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \dfrac{k-1}{2} M_1^2\right)\left(kM_1^2 - \dfrac{k-1}{2}\right)}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2 M_1^2} \tag{12.41c}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.41d}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dfrac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_1^2} \tag{12.41e}$$

Valores representativos das funções de escoamento com choque normal para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.4 e, em gráfico, na Fig. E.4.

Tabela E.4 Funções de Escoamento de Choque Normal (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,50	0,7011	0,9298	1,320	2,458	1,862
2,00	0,5774	0,7209	1,687	4,500	2,667
2,50	0,5130	0,4990	2,137	7,125	3,333
3,00	0,4752	0,3283	2,679	10,33	3,857
3,50	0,4512	0,2130	3,315	14,13	4,261
4,00	0,4350	0,1388	4,047	18,50	4,571
4,50	0,4236	0,09170	4,875	23,46	4,812
5,00	0,4152	0,06172	5,800	29,00	5,000

Esta Tabela foi elaborada a partir da planilha do *Excel Relações de Choques Normais*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

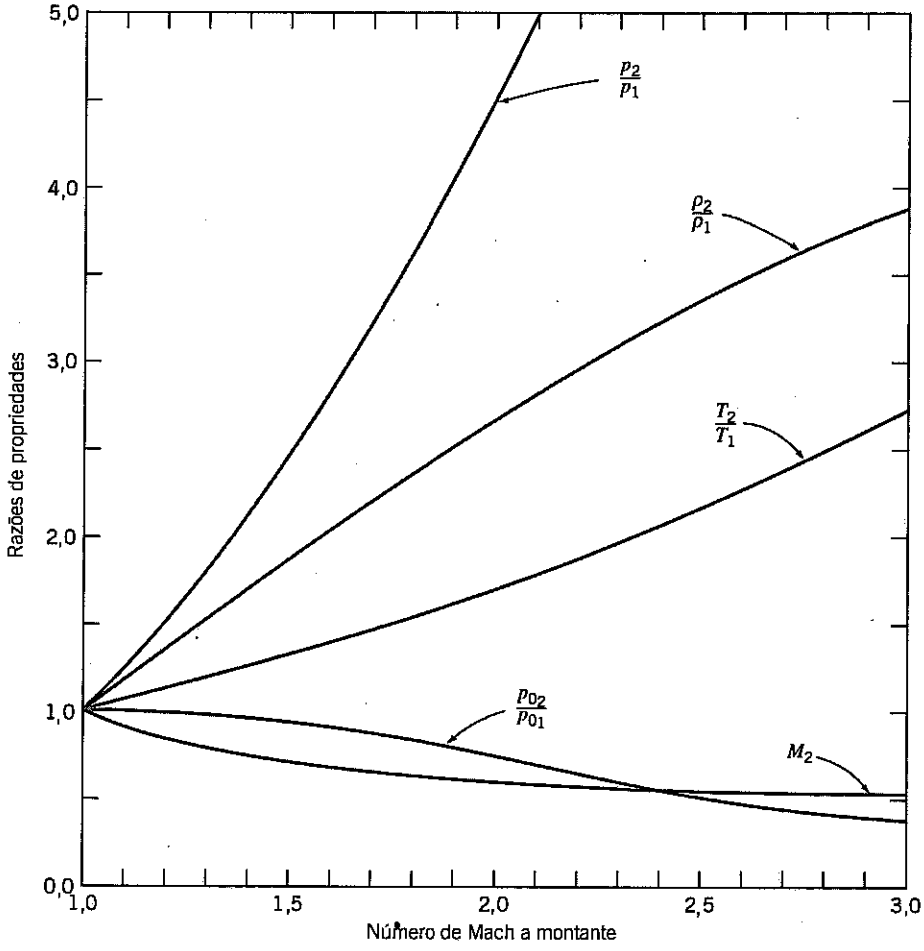


Fig. E.4 Funções de escoamento de choque normal.

Este gráfico foi gerado a partir de uma planilha do *Excel*. A planilha pode ser facilmente modificada para gerar curvas para um gás diferente.

E-5 CHOQUE OBLÍQUO

As funções de escoamento de choque oblíquo são calculadas usando as seguintes equações:

$$M_{2_n}^2 = \frac{M_{1_n}^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1} M_{1_n}^2 - 1} \tag{12.48a}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2} M_{1_n}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1} M_{1_n}^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.48b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2\right)\left(kM_{1_n}^2 - \dfrac{k-1}{2}\right)}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2 M_{1_n}^2} \tag{12.48c}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_{1_n}^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.48d}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1_n}}{V_{2_n}} = \frac{\dfrac{k+1}{2} M_{1_n}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_{1_n}^2} \tag{12.48e}$$

Valores representativos das funções de escoamento de choque oblíquo para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.5 (idêntica à Tabela E.4, exceto pelas notações para números de Mach).

Tabela E.5 Funções de Escoamento de Choque Oblíquo (gás ideal, $k = 1{,}4$)

M_{1_n}	M_{2_n}	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1,00	1,000	1,0000	1,000	1,000	1,000
1,50	0,7011	0,9298	1,320	2,458	1,862
2,00	0,5774	0,7209	1,687	4,500	2,667
2,50	0,5130	0,4990	2,137	7,125	3,333
3,00	0,4752	0,3283	2,679	10,33	3,857
3,50	0,4512	0,2130	3,315	14,13	4,261
4,00	0,4350	0,1388	4,047	18,50	4,571
4,50	0,4236	0,09170	4,875	23,46	4,812
5,00	0,4152	0,06172	5,800	29,00	5,000

O ângulo de deflexão θ, de choque oblíquo β, e o número de Mach M_1 são relacionados pela seguinte equação:

$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta\left(M_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - 1\right)}{M_1^2(k + \cos 2\beta) + 2} \tag{12.49}$$

Valores representativos do ângulo θ estão apresentados na Tabela E.6.

Tabela E.6 Ângulo de Deflexão de Choque Oblíquo θ (grau) (gás ideal, $k = 1{,}4$)

Ângulo de choque β (grau)	Número de Mach M_1										
	1,2	**1,4**	**1,6**	**1,8**	**2**	**2,5**	**3**	**4**	**6**	**10**	**∞**
0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4,16
10	–	–	–	–	–	–	–	–	0,64	5,53	8,32
15	–	–	–	–	–	–	–	0,80	7,18	10,5	12,4
20	–	–	–	–	–	–	0,77	7,44	12,4	15,1	16,5
25	–	–	–	–	–	1,93	7,28	12,9	17,1	19,3	20,6
30	–	–	–	–	–	7,99	12,8	17,8	21,5	23,4	24,5
35	–	–	–	1,41	5,75	13,2	17,6	22,2	25,6	27,3	28,3
40	–	–	1,31	6,49	10,6	17,7	21,8	26,2	29,4	31,1	32,0
45	–	–	5,73	10,7	14,7	21,6	25,6	29,8	33,0	34,6	35,5
50	–	3,28	9,31	14,2	18,1	24,9	28,9	33,1	36,2	37,8	38,8
55	–	6,18	12,1	16,9	20,7	27,4	31,5	35,8	39,0	40,7	41,6
60	1,61	8,20	13,9	18,6	22,4	29,2	33,3	37,8	41,1	42,9	43,9
65	3,16	9,27	14,6	19,2	23,0	29,8	34,1	38,7	42,3	44,2	45,3
70	3,88	9,32	14,2	18,5	22,1	28,9	33,3	38,2	42,1	44,2	45,4
75	3,80	8,29	12,5	16,2	19,5	25,9	30,2	35,3	39,5	41,8	43,1
80	3,01	6,25	9,34	12,2	14,8	20,1	23,9	28,7	32,8	35,2	36,6
85	1,66	3,36	5,03	6,61	8,08	11,2	13,6	16,8	19,7	21,6	22,7
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

As Tabelas E.5 e E.6 foram elaboradas a partir da planilha do *Excel Relações de Choques Oblíquos*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

E-6 RELAÇÕES DE ONDA DE EXPANSÃO ISOENTRÓPICA

A função de expansão supersônica de Prandtl–Meyer, ω, é

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{M^2-1}\right) \tag{12.55}$$

Valores representativos do ângulo ω estão apresentados na Tabela E.7.

Tabela E.7 Função de Expansão Supersônica de Prandtl–Meyer ω (grau) (gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	ω (grau)	M	ω (grau)	M	ω (grau)	M	ω (grau)
1,00	0,00	2,00	26,4	3,00	49,8	4,00	65,8
1,50	0,49	2,05	27,7	3,05	50,7	4,05	66,4
1,10	1,34	2,10	29,1	3,10	51,6	4,10	67,1
1,15	2,38	2,15	30,4	3,15	52,6	4,15	67,7
1,20	3,56	2,20	31,7	3,20	53,5	4,20	68,3
1,25	4,83	2,25	33,0	3,25	54,4	4,25	68,9
1,30	6,17	2,30	34,3	3,30	55,2	4,30	69,5
1,35	7,56	2,35	35,5	3,35	56,1	4,35	70,1
1,40	8,99	2,40	36,7	3,40	56,9	4,40	70,7
1,45	10,4	2,45	37,9	3,45	57,7	4,45	71,3
1,50	11,9	2,50	39,1	3,50	58,5	4,50	71,8
1,55	13,4	2,55	40,3	3,55	59,3	4,55	72,4
1,60	14,9	2,60	41,4	3,60	60,1	4,60	72,9
1,65	16,3	2,65	42,5	3,65	60,9	4,65	73,4
1,70	17,8	2,70	43,6	3,70	61,6	4,70	74,0
1,75	19,3	2,75	44,7	3,75	62,3	4,75	74,5
1,80	20,7	2,80	45,7	3,80	63,0	4,80	75,0
1,85	22,2	2,85	46,8	3,85	63,7	4,85	75,5
1,90	23,6	2,90	47,8	3,90	64,4	4,90	76,0
1,95	25,0	2,95	48,8	3,95	65,1	4,95	76,4
2,00	26,4	3,00	49,8	4,00	65,8	5,00	76,9

Esta tabela foi elaborada a partir da planilha do *Excel Relações de Onda de Expansão Isoentrópica*. A planilha contém uma versão mais detalhada, que pode ser impressa, da tabela e pode ser facilmente modificada para gerar dados para uma faixa diferente de números de Mach, ou para um gás diferente.

Apêndice F

ANÁLISE DE INCERTEZA EXPERIMENTAL

F-1 INTRODUÇÃO

Dados de testes experimentais são freqüentemente utilizados para complementar análises de engenharia como uma base de projeto. Nem todos os dados são igualmente bons; a validade dos dados deve ser documentada antes que os resultados do teste sejam usados no projeto. A análise de incerteza é o procedimento usado para quantificar a validade e exatidão dos dados.

A análise de incerteza também é útil durante o projeto do experimento. Estudos cuidadosos podem indicar fontes potenciais de erros inaceitáveis e sugerir métodos de medição aperfeiçoados.

F-2 TIPOS DE ERROS

Erros estão sempre presentes quando medições experimentais são feitas. Além dos enganos grosseiros do experimentalista, os erros podem ser de dois tipos. O erro fixo (ou sistemático) causa repetidas medições erradas da mesma quantidade em cada tentativa. O erro fixo é o mesmo para cada leitura, e pode ser eliminado por calibração ou correção apropriada. O erro aleatório (não repetitivo) é diferente para cada leitura e, por isso, não pode ser eliminado. Os fatores que introduzem erro aleatório são incertos por sua própria natureza. O objetivo da análise de incerteza é estimar o erro aleatório provável nos resultados experimentais.

Admitimos que o equipamento foi construído corretamente e calibrado de forma apropriada para eliminar os erros fixos. Admitimos que os instrumentos têm resolução apropriada e que as flutuações nas leituras não são excessivas. Admitimos, também, que observações são feitas e registradas com o devido cuidado de modo que só os erros aleatórios permaneçam.

F-3 ESTIMATIVA DE INCERTEZA

Nosso objetivo é estimar a incerteza de medições experimentais e de resultados calculados devido aos erros aleatórios. O procedimento tem três etapas:

1. Estimar o intervalo de incerteza para cada quantidade medida.
2. Estabelecer o limite de confiança em cada medição.
3. Analisar a propagação de incerteza nos resultados calculados a partir dos dados experimentais.

A seguir, delineamos o procedimento para cada etapa e ilustramos aplicações com exemplos.

Etapa 1. *Estimar o intervalo da incerteza de medição.* Denote as variáveis medidas em um experimento por $x_1, x_2, ..., x_n$. Um modo possível de determinar o intervalo de incerteza para cada variável é repetir cada medição muitas vezes. O resultado é uma distribuição de dados pa-

de todas as leituras futuras são esperadas cair dentro do intervalo. Probabilidades de cerca de 20 por 1 correspondem a $\pm 2\sigma$ e de 3 por 1 correspondem a limites de confiança de $\pm \sigma$. Probabilidades de 20 por 1 são as utilizadas, tipicamente, nos trabalhos de engenharia.

Etapa 3. *Analisar a propagação de incerteza nos cálculos.* Suponha que medições das variáveis independentes, $x_1, x_2, ..., x_n$, sejam feitas no laboratório. A incerteza relativa de cada quantidade medida independentemente é estimada como u_i. As medições são usadas para calcular algum resultado, R, para o experimento. Desejamos analisar como os erros nos x_is *propagam-se* no cálculo de R a partir dos valores medidos.

Em geral, R pode ser expresso matematicamente como $R = R(x_1, x_2, ..., x_n)$. O efeito sobre R de um erro na medição de um x_i individual pode ser estimado por analogia com a derivada de uma função [4]. Uma variação, δx_i, em x_i causa uma variação δR_i em R,

$$\delta R_i = \frac{\partial R}{\partial x_i}\delta x_i$$

A variação relativa em R é

$$\frac{\delta R_i}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\delta x_i = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\delta x_i}{x_i} \tag{F.1}$$

A Eq. F.1 pode ser usada para estimar a incerteza relativa no resultado devido à incerteza em x_i. Introduzindo a notação de incerteza relativa, obtemos

$$u_{R_i} = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}u_{x_i} \tag{F.2}$$

Como podemos estimar a incerteza relativa em R causada pelos efeitos combinados das incertezas relativas em todos os x_is? O erro aleatório em cada variável tem uma faixa de valores dentro do intervalo de incerteza. É improvável que todos os erros tenham valores adversos ao mesmo tempo. Pode ser demonstrado [2] que a melhor representação para a incerteza relativa do resultado é

$$u_R = \pm\left[\left(\frac{x_1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_1}u_1\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x_2}u_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{R}\frac{\partial R}{\partial x_n}u_n\right)^2\right]^{1/2} \tag{F.3}$$

EXEMPLO F.2 Incerteza no Volume de Cilindro

Obtenha uma expressão para a incerteza na determinação do volume de um cilindro a partir de medições do seu raio e da sua altura. O volume do cilindro, em termos do raio e da altura, é

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(r, h) = \pi r^2 h$$

Diferenciando, obtemos

$$d\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}dr + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial h}dh = 2\pi rh\, dr + \pi r^2 dh$$

posto que

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} = 2\pi rh \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial h} = \pi r^2$$

Da Eq. F.2, a incerteza relativa devido ao raio é

$$u_{\mathcal{V},r} = \frac{\delta \mathcal{V}_r}{\mathcal{V}} = \frac{r}{\mathcal{V}}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}u_r = \frac{r}{\pi r^2 h}(2\pi rh)u_r = 2u_r$$

e a incerteza relativa devido à altura é

$$u_{\forall,h} = \frac{\delta \forall_h}{\forall} = \frac{h}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial h} u_h = \frac{h}{\pi r^2 h}(\pi r^2) u_h = u_h$$

A incerteza relativa no volume é, então,

$$u_{\forall} = \pm\left[(2u_r)^2 + (u_h)^2\right]^{1/2} \tag{F.4}$$

Comentário: O coeficiente 2, na Eq. F.4, mostra que a incerteza na medição do raio do cilindro tem um efeito maior do que a incerteza na medição da altura. Isso ocorre porque o raio está elevado ao quadrado na equação do volume.

F-4 APLICAÇÕES A DADOS

Aplicações a dados obtidos de medições de laboratório são ilustradas nos exemplos que se seguem.

EXEMPLO F.3 Incerteza na Vazão Mássica de Líquido

A vazão mássica de água escoando através de um tubo deve ser determinada coletando-a em um béquer. A vazão mássica é calculada dividindo o valor da massa de água coletada pelo intervalo de tempo,

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{F.5}$$

onde $\Delta m = m_f - m_e$. As estimativas de erro para as quantidades medidas são

Massa do béquer cheio, $m_f = 400 \pm 2$ g (20 por 1)

Massa do béquer vazio, $m_e = 200 \pm 2$ g (20 por 1)

Intervalo de tempo de coleta, $\Delta t = 10 \pm 0{,}2$ s (20 por 1)

As incertezas relativas nas quantidades medidas são

$$u_{m_f} = \pm\frac{2\text{ g}}{400\text{ g}} = \pm 0{,}005$$

$$u_{m_e} = \pm\frac{2\text{ g}}{200\text{ g}} = \pm 0{,}01$$

$$u_{\Delta t} = \pm\frac{0{,}2\text{ s}}{10\text{ s}} = \pm 0{,}02$$

A incerteza relativa no valor medido da massa de água é calculada a partir da Eq. F.3 como

$$u_{\Delta m} = \pm\left[\left(\frac{m_f}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_f} u_{m_f}\right)^2 + \left(\frac{m_e}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_e} u_{m_e}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \pm\{[(2)(1)(\pm 0{,}005)]^2 + [(1)(-1)(\pm 0{,}01)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\Delta m} = \pm 0{,}0141$$

Uma vez que $\dot{m} = \dot{m}(\Delta m, \Delta t)$, podemos escrever a Eq. F.3 como

$$u_{\dot{m}} = \pm\left[\left(\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} u_{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} u_{\Delta t}\right)^2\right]^{1/2} \tag{F.6}$$

Os termos requeridos das derivadas parciais são

$$\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} = -1$$

Substituindo na Eq. F.6, resulta

$$u_{\dot{m}} = \pm\{[(1)(\pm 0{,}0141)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}02)]^2\}^{1/2}$$
$$u_{\dot{m}} = \pm 0{,}0245 \qquad \text{ou} \qquad \pm 2{,}45\% \text{ (20 por 1)}$$

Comentário: O intervalo de incerteza de 2% na medição do tempo é a contribuição mais importante para o intervalo de incerteza no resultado.

EXEMPLO F.4 Incerteza no Número de Reynolds para Escoamento de Água

O número de Reynolds deve ser calculado para o escoamento de água num tubo. A equação de cálculo para o número de Reynolds é

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi \mu D} = Re(\dot{m}, D, \mu) \tag{F.7}$$

Consideramos o intervalo de incerteza no cálculo da vazão em massa. E com relação às incertezas em μ e D? O diâmetro do tubo é dado como $D = 6{,}35$ mm. Podemos admitir este valor como exato? O diâmetro deve ser medido com leitura mínima de 0,1 mm. Assim, a incerteza relativa no diâmetro é estimada como

$$u_D = \pm\frac{0{,}05\text{ mm}}{6{,}35\text{ mm}} = \pm 0{,}00787 \qquad \text{ou} \qquad \pm 0{,}787\%$$

A viscosidade da água depende da temperatura. A temperatura é estimada em $T = 24 \pm 0{,}5$°C. Como a incerteza na temperatura afeta a incerteza em μ? Um modo de estimar isso é escrever

$$u_{\mu(T)} = \pm\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}(\pm\delta T) \tag{F.8}$$

A derivada pode ser estimada a partir de dados tabulados de viscosidade próximos da temperatura nominal de 24°C. Assim,

$$\frac{d\mu}{dT} \approx \frac{\Delta\mu}{\Delta T} = \frac{\mu(25°\text{C}) - \mu(23°\text{C})}{(25-23)°\text{C}} = (0{,}000890 - 0{,}000933)\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1}{2°\text{C}}$$

$$\frac{d\mu}{dT} = -2{,}15 \times 10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s}/(\text{m}^2\cdot{}°\text{C})$$

Segue, da Eq. F.8, que a incerteza na viscosidade devido à temperatura é

$$u_{\mu(T)} = \frac{1}{0{,}000911}\frac{\text{m}^2}{\text{N}\cdot\text{s}} \times -2{,}15\times10^{-5}\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2\cdot{}°\text{C}} \times (\pm 0{,}5°\text{C})$$
$$u_{\mu(T)} = \pm 0{,}0118 \qquad \text{ou} \qquad \pm 1{,}18\%$$

Os próprios dados tabulados de viscosidade também apresentam alguma incerteza. Se ela for de ± 1,0%, uma estimativa para a incerteza relativa resultante na viscosidade será

$$u_\mu = \pm[(\pm 0{,}01)^2 + (\pm 0{,}0118)^2]^{1/2} = \pm 0{,}0155 \qquad \text{ou} \qquad \pm 1{,}55\%$$

As incertezas na vazão em massa, diâmetro do tubo e viscosidade, necessárias para calcular o intervalo de incerteza para o número de Reynolds calculado, são agora conhecidas. As derivadas parciais requeridas, determinadas a partir da Eq. F.7, são

$$\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}} = \frac{\dot{m}}{Re}\frac{4}{\pi\mu D} = \frac{Re}{Re} = 1$$

$$\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu} = \frac{\mu}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi\mu^2 D} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

$$\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D} = \frac{D}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi\mu D^2} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

Substituindo na Eq. F.3, resulta

$$u_{Re} = \pm\left\{\left[\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}}u_{\dot{m}}\right]^2 + \left[\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu}u_{\mu}\right]^2 + \left[\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D}u_D\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm\{[(1)(\pm 0{,}0245)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}0155)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}00787)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm 0{,}0300 \quad \text{ou} \quad \pm 3{,}00\%$$

Comentário: Os Exemplos F.3 e F.4 ilustram dois pontos importantes para o projeto de um experimento. Primeiro, a massa de água coletada, Δm, é calculada a partir de duas quantidades medidas, m_f e m_e. Para qualquer intervalo de incerteza admitido nas medições de m_f e m_e, a incerteza *relativa* em Δm pode ser diminuída fazendo Δm maior. Isso pode ser realizado usando recipientes maiores ou um tempo de medição mais longo, Δt, que também reduziria a incerteza relativa no Δt medido. Segundo, a incerteza nos dados tabulados de propriedades pode ser significativa. A incerteza dos dados também é aumentada pela incerteza na medição da temperatura do fluido.

EXEMPLO F.5 Incerteza na Velocidade do Ar

A velocidade do ar é calculada a partir de medições com tubo de pitot em um túnel de vento. Da equação de Bernoulli,

$$V = \left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{1/2} \tag{F.9}$$

onde h é a altura observada da coluna do manômetro.

O único elemento novo neste exemplo é a raiz quadrada. A variação em V devida ao intervalo de incerteza em h é

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{-1/2}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}$$

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Usando a Eq. F.3, calculamos a incerteza relativa em V como

$$u_V = \pm\left[\left(\frac{1}{2}u_h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{água}}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{ar}}}\right)^2\right]^{1/2}$$

Se $u_h = \pm 0{,}01$ e as outras incertezas são desprezíveis,

$$u_V = \pm\left\{\left[\frac{1}{2}(\pm 0{,}01)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_V = \pm 0{,}00500 \quad \text{ou} \quad \pm 0{,}500\%$$

Comentário: A raiz quadrada reduz a incerteza relativa na velocidade calculada para metade daquela de u_h.

F-5 RESUMO

A citação da incerteza provável de dados é uma importante parte de um relatório completo e claro de resultados experimentais. A Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos (*ASME — American Society of Mechanical Engineers*) exige que todos os artigos submetidos à publicação em revistas incluam uma citação adequada da incerteza de dados experimentais [5]. A estimativa de incerteza em resultados experimentais requer cuidado, experiência e capacidade de julgamento, em comum com muito esforço de engenharia. Enfatizamos a necessidade de quantificar a incerteza de medições, mas o espaço permitiu a inclusão de apenas alguns exemplos. Muito mais informações estão disponíveis nas referências que seguem (p. ex., [4, 6, 7]). Aconselhamos fortemente que você as consulte, quando estiver projetando experimentos ou analisando dados.

REFERÊNCIAS

1. Pugh, E. M., and G. H. Winslow, *The Analysis of Physical Measurements.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
2. Kline, S. J., and F. A. McClintock, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments," *Mechanical Engineering, 75*, 1, January 1953, pp. 3–9.
3. Doebelin, E. O., *Measurement Systems*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
4. Young, H. D., *Statistical Treatment of Experimental Data.* New York: McGraw-Hill, 1962.
5. Rood, E. P., and D. P. Telionis, "JFE Policy on Reporting Uncertainties in Experimental Measurements and Results," *Transactions of ASME, Journal of Fluids Engineering, 113*, 3, September 1991, pp. 313–314.
6. Coleman, H. W., and W. G. Steele, *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers.* New York: Wiley, 1989.
7. Holman, J. P., *Experimental Methods for Engineers*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

Apêndice G

UNIDADES SI, PREFIXOS E FATORES DE CONVERSÃO

Tabela G.1 Unidades SI e Prefixos[a]

Unidades SI	Quantidade	Unidade	Símbolo SI	Fórmula
Unidades básicas SI:	Comprimento	metro	m	—
	Massa	quilograma	kg	—
	Tempo	segundo	s	—
	Temperatura	kelvin	K	—
Unidade complementar do SI:	Ângulo plano	radiano	rad	—
Unidades derivadas do SI:	Energia	joule	J	N · m
	Força	newton	N	kg · m/s^2
	Potência	watt	W	J/s
	Pressão	pascal	Pa	N/m^2
	Trabalho	joule	J	N · m

Prefixos SI	Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo SI
	1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
	1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
	1 000 000 = 10^{6}	mega	M
	1 000 = 10^{3}	quilo	k
	0,01 = 10^{-2}	centi[b]	c
	0,001 = 10^{-3}	mili	m
	0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
	0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
	0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p

[a]Fonte: Norma ASTM para Prática Métrica E 380-97, 1997.
[b]A ser evitado sempre que possível.

BIBLIOTECA - FACULDADE PITÁGORAS

G-1 CONVERSÕES DE UNIDADES

Os dados necessários para resolver problemas nem sempre estão disponíveis em unidades consistentes. Por isso, freqüentemente faz-se necessário converter de um sistema de unidades para outro.

Em princípio, todas as unidades derivadas podem ser expressas em termos das unidades básicas. Assim, apenas os fatores de conversão para as unidades básicas seriam requeridos.

Na prática, contudo, muitas quantidades de engenharia são expressas em termos de unidades definidas como, por exemplo, o "horsepower" (hp), o "British thermal unit" (Btu), o quarto, ou a milha

náutica. Definições para tais quantidades são necessárias, e fatores de conversão adicionais são úteis nos cálculos.

A Tabela G.2 apresenta unidades básicas SI e fatores de conversão de interesse, mais algumas definições e fatores de conversão convenientes.

Tabela G.2 Fatores de Conversão e Definições

Dimensão Fundamental	Unidade Inglesa	Valor SI Exato	Valor SI Aproximado
Comprimento	1 in	0,0254 m	—
Massa	1 lbm	0,453 592 37 kg	0,454 kg
Temperatura	1°F	5/9 K	—

Definições:

Aceleração da gravidade:	g = 9,8066 m/s² (= 32,174 ft/s²)
Energia:	Btu — (unidade térmica Britânica) ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 lbm de água de 1°F (1 Btu = 778,2 ft · lbf)
	quilocaloria ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 kg de água de 1 K (1 kcal = 4187 J)
Comprimento:	1 milha = 5280 ft; 1 milha náutica = 6076,1 ft = 1852 m (exato)
Potência:	1 horsepower ≡ 550 ft · lbf/s
Pressão:	1 bar ≡ 10^5 Pa
Temperatura:	grau Fahrenheit, $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ (T_C em graus Celsius)
	grau Rankine, $T_R = T_F + 459{,}67$
	Kelvin, $T_K = T_C + 273{,}15$ (exato)
Viscosidade:	1 Poise ≡ 0,1 kg/(m · s)
	1 Stoke ≡ 0,0001 m²/s
Volume:	1 gal ≡ 231 in³ (1 ft³ = 7,48 gal)

Fatores de Conversão Úteis:

1 lbf = 4,448 N
1 lbf/in² = 6895 Pa
1 Btu = 1055 J
1 hp = 746 W = 2545 Btu/h
1 kW = 3413 Btu/h
1 quarto = 0,000946 m³ = 0,946 litro
1 kcal = 3,968 Btu

Apêndice H

UMA BREVE REVISÃO DO EXCEL DA MICROSOFT

INTRODUÇÃO

O programa *Excel* da Microsoft representa uma das diversas planilhas computacionais disponíveis. Todas essas planilhas funcionam de uma maneira muito similar, com pequenas variações de sintaxe e de características construtivas, de modo que muito de nossa discussão será diretamente aplicável também a outras aplicações computacionais.

Existem diversas versões do *Excel* de uso generalizado (p. ex., *Excel XP*, *Excel 2000*, *Excel 98* e até mesmo o *Excel 97*); usaremos o *Excel 2000*, novamente com o entendimento de que a maioria das versões de uso corrente são 100% compatíveis, e que a maior parte dos itens do menu não varia de versão para versão.

Nessa breve revisão, discutiremos procedimentos básicos tais como criar fórmulas, formatar células, criar gráficos, e assim por diante. A revisão desses fundamentos será resumida e pressupõe que você já esteja familiarizado com o ambiente Windows — explicações mais detalhadas estão disponíveis em vários textos, p. ex., [1] e [2], bem como na *Ajuda* (*Help*) do menu do próprio *Excel*. Avançaremos, então, explorando as potencialidades das ferramentas *Atingir Meta* (*Excel's Goal Seek*) e *Resolvedor* (*Solver*), e de outras mais sofisticadas e menos utilizadas tais como as macros e as funções do usuário utilizando o Editor de Visual Basic do *Excel* (VBA — *Visual Basic for Applications*).

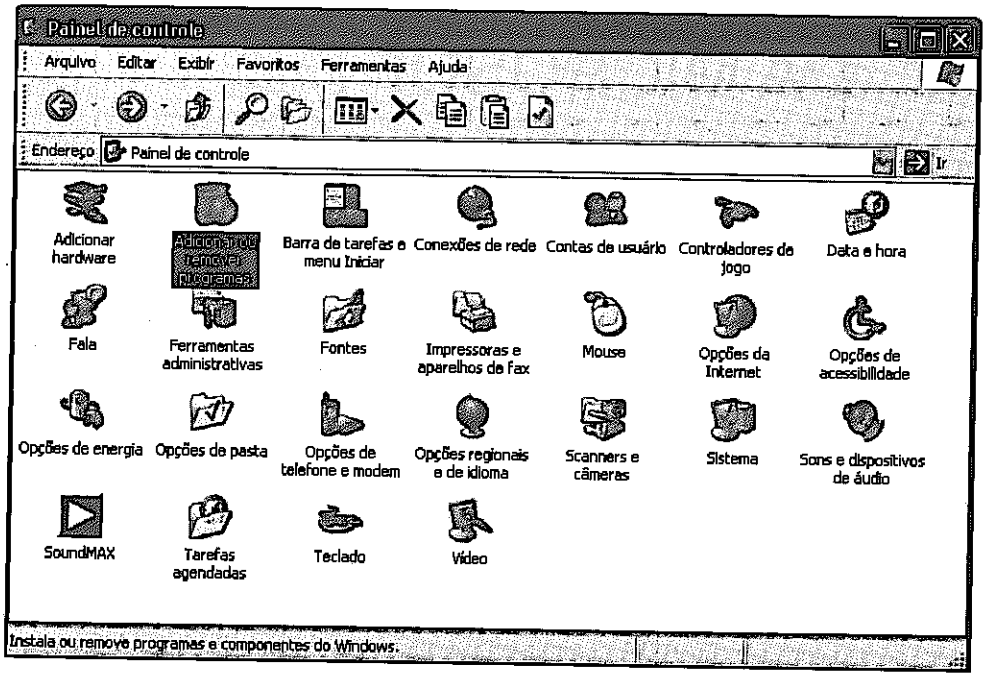
INSTALANDO RECURSOS DO *EXCEL*

Consideramos aqui que você já possui o programa computacional *Excel* instalado em seu computador pessoal (PC) — ele vem com muitas versões diferentes do Microsoft *Office*. Caso não possua, você pode comprar uma cópia isolada do *Excel* ou uma versão do *Office* que inclua o *Excel* (procure se informar sobre descontos para as versões acadêmicas!); simplesmente siga as instruções de instalação.

Embora as planilhas computacionais tenham sido desenvolvidas inicialmente para uso em negócios, disponibilizando funções como tabular e analisar dados financeiros, atualmente constituem ferramentas computacionais poderosas que engenheiros e cientistas utilizam cada vez mais. Como a maioria dos usuários ainda são "fazedores de contas", a instalação padrão (*default*) do *Excel* não inclui alguns recursos úteis para engenheiros e cientistas. (De um modo similar, a instalação padrão do processador de texto Microsoft *Word* não inclui o componente de criação de equação, que no *Word* é chamado *Editor de Equação*.) Como engenheiro, você vai achar utilidade em algumas características do *Ferramentas de Análise do Excel (Excel's Analysis Toolpak)*, *Visual Basic para Aplicações — VBA (Visual Basic for Applications)*, e nós usaremos o seu *Resolvedor* (*Solver*), de forma que vamos instalá-los. O aplicativo *Ferramentas de Análises* possui algumas potencialidades matemáticas como análise de regressão; o *VBA* é usado para criar funções do usuário ou funções personalizadas (do usuário ou "customizadas"); o *Solver* será muito útil para resolver equações, otimizar uma função, e assim por diante.

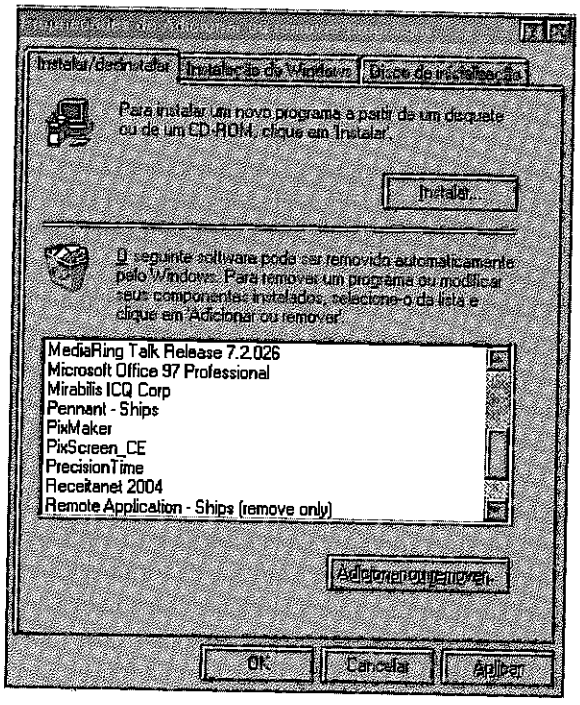
Para instalar estes programas, siga a seguinte orientação:

✓ Feche todos os programas.
✓ Sobre o menu **Iniciar (Start)** do Windows, aponte para **Configurações (Settings)** e, em seguida clique em **Painel de Controle (Control Panel).**
✓ Clique duas vezes sobre o ícone **Adicionar/Remover Programas.**

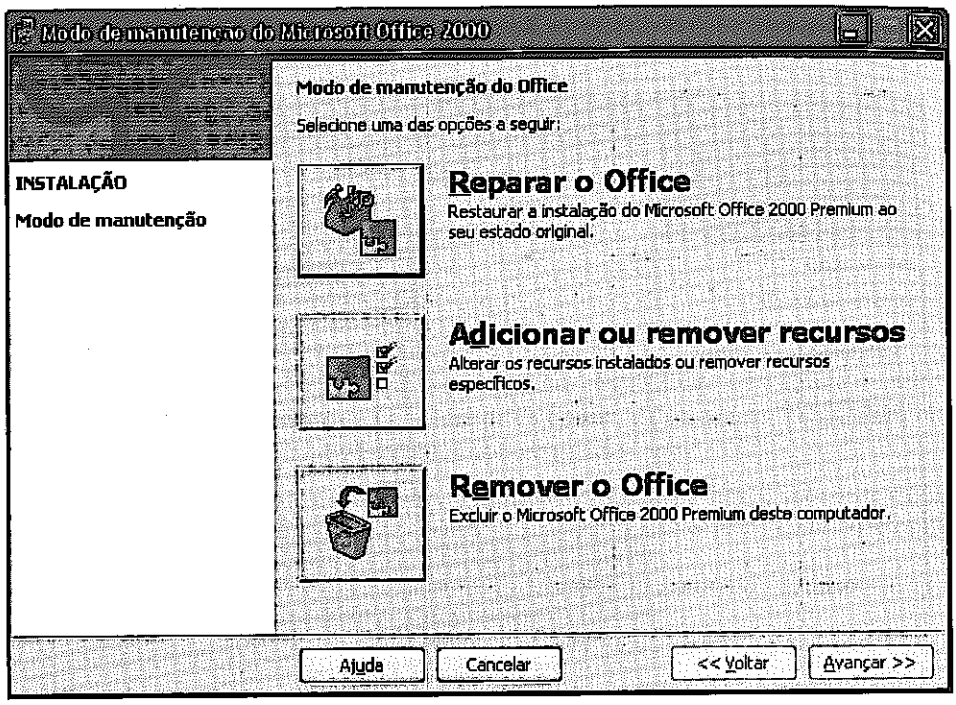


Em seguida, siga uma das instruções que se seguem:

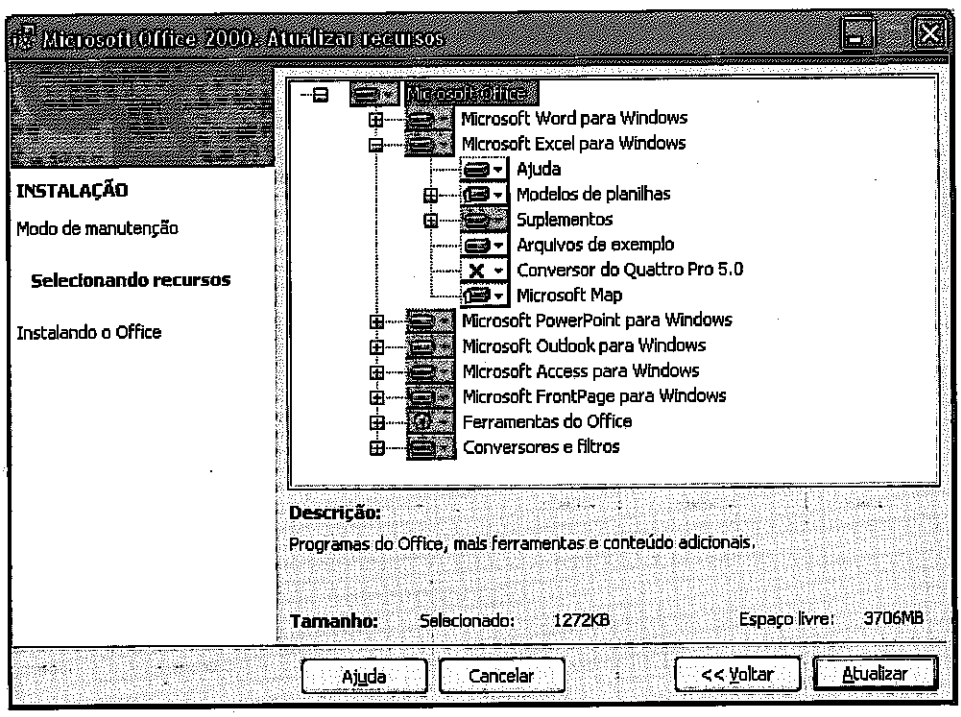
- Se você instalou o *Excel* com o *Office*, clique em **Office** sobre o mostrador de **Instalar/Desinstalar** e, em seguida, clique sobre **Adicionar/Remover.**
- Se você instalou somente o *Excel*, clique em *Excel* sobre o mostrador de **Instalar/Desinstalar** e, em seguida, clique sobre **Adicionar/Remover.**



✓ Uma janela do Windows similar à seguinte aparecerá. Clique sobre **Adicionar ou Remover Recursos.**

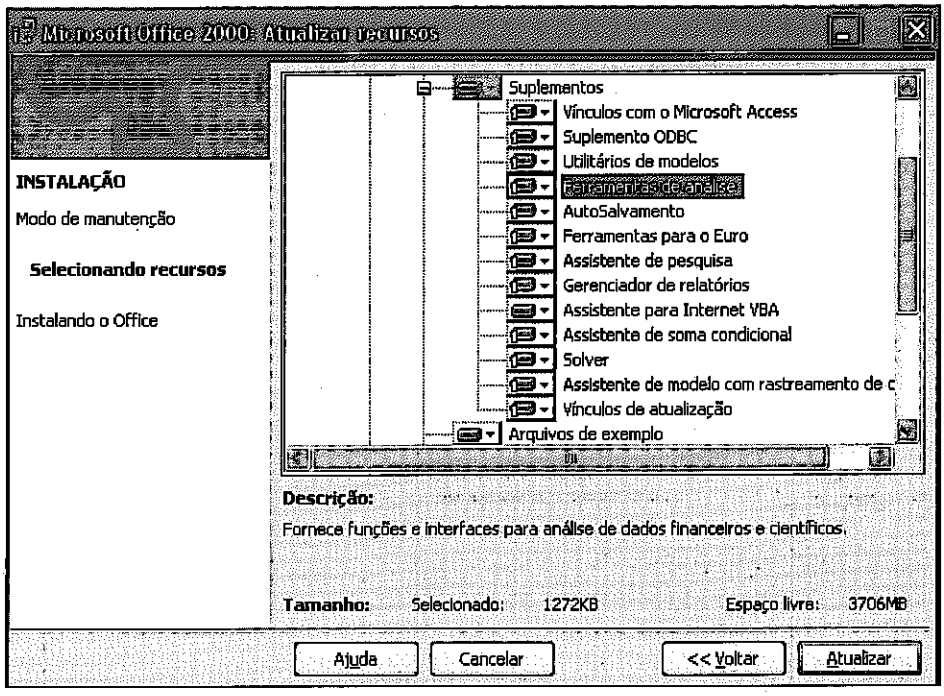


✓ Uma janela do Windows similar à seguinte aparecerá. Clique no sinal mais ao lado de **Microsoft Excel para Windows** para expandir a estrutura da árvore e, em seguida, sobre o sinal ao lado de **Suplementos (Add-ins).**



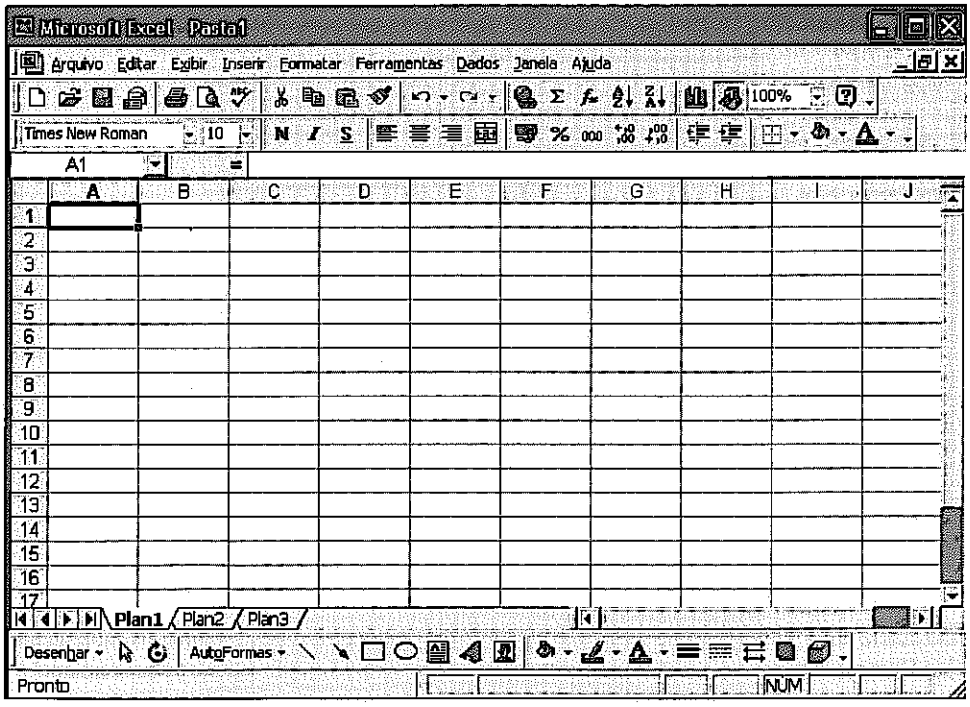
✓ Uma janela do Windows similar à seguinte aparecerá. Você pode agora selecionar os suplementos que desejar. Comece selecionando **Ferramentas de Análise,** e escolha com a seta no pequeno painel à esquerda

Executar a Partir do Meu Computador (Run from My Computer). Siga as instruções para instalar o suplemento (você provavelmente necessitará de seu *Office* ou *CD Excel*). Repita esta última etapa para o **Resolvedor (Solver)**, e para qualquer outro suplemento que você queira instalar — um muito útil é o **Assistente para Internet VBA (Internet Assistant VBA)**.



✓ O suplemento deve agora estar disponível na próxima vez que você usar o *Excel*; dependendo da versão, você pode ser solicitado a reiniciar o computador logo após a instalação do suplemento.

Para prosseguir com essa breve revisão, você deve ter o *Excel* rodando. A planilha de trabalho é similar à figura adiante:



ENTRANDO COM FÓRMULAS NAS CÉLULAS

O poder real do *Excel* é a sua habilidade computacional. Isto envolve a criação de fórmulas em células para cálculos automáticos. Como um exemplo, suponha que desejamos calcular qualquer número em qualquer potência (razoável, é claro!), p. ex., 2^3, $12^{1,5}$, $e^{-\pi}$, etc. O modo mais rudimentar é escrever uma nova fórmula para cada dois novos números. Vamos fazer isso primeiro. A regra-chave no *Excel* é que você *deve utilizar o sinal de igual* (=) *no início de uma fórmula* para que o *Excel* reconheça que, naquela célula, está digitada uma fórmula e não um texto ou um número. Desse modo, para calcular 2^3, selecione uma célula, digite **=2^3** e pressione *Enter* (a operação exponencial é representada por **^**). O resultado (**8**) será exibido. A desvantagem dessa fórmula é que necessitamos reescrevê-la para cada novo cálculo, p. ex., para $12^{1,5}$, deveríamos digitar **=12^1,5** na mesma célula ou em outra. Um procedimento melhor é usar fórmulas com *referências de células*.

Referência de uma célula é simplesmente as coordenadas da célula. P. ex., digite **2** na célula B3 e **3** na célula C3; B3 e C3 são referências de células. Agora, na célula D3, ao invés de calcular 2^3 digitando **=2^3**, podemos escrever **=B3^C3.** O *Excel* interpreta esta fórmula como "pegue o conteúdo da célula **B3** e eleve-o ao valor da célula **C3**", e exibe o resultado após a tecla *Enter* ser pressionada. Você deve obter o seguinte:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		2	3	8		
4						
5						
6						

Temos, assim, uma planilha de trabalho "viva" — podemos digitar novos números no interior das células B3 e C3 e ter o resultado imediatamente após pressionar *Enter* (p. ex., **12** em B3 e **1,5** em C3 produz **41,56922** em D3).

Escrever fórmulas com referências de células pode ser tedioso e produzir erros, especialmente quando existem muitas referências. Uma técnica muito útil é iniciar a criação de uma fórmula com o sinal = e, ao invés de escrever uma referência de célula, utilizar o *mouse* para clicar sobre a célula que você deseja referenciar. Enquanto você *não* pressionar *Enter*, o *Excel* permanecerá nesse modo de criação de fórmula, e você pode continuar digitando o restante da fórmula, utilizando seguidamente o *mouse* para clicar sobre células adicionais enquanto constrói a fórmula. P. ex., podemos selecionar a célula D3 e substituir o seu conteúdo atual digitando =, clicando em seguida com o mouse sobre a célula B3, digitando **^**, clicando com o mouse sobre a célula C3 e, finalmente, pressionando a tecla *Enter* (você pode também utilizar as teclas de setas para esse tipo de construção de fórmulas).

Esse é obviamente um exemplo trivial, porém planilhas de trabalho muito complexas podem ser desenvolvidas nas quais temos múltiplas fórmulas com múltiplas referências de células. Além disso, uma pasta de trabalho do *Excel* pode ter múltiplas planilhas, conforme indicado com os títulos padrões **Sheet** ou **Plan** no mostrador no canto inferior esquerdo da planilha em uso (e você pode renomear essas planilhas, adicionar outras, e assim por diante):

Uma fórmula sobre uma planilha pode conter referências de células que estão em outras planilhas. Para fazer isto, você deve iniciar criando a fórmula e, quando necessitar referenciar uma célula de outra planilha, *ainda no modo de criação de fórmula*, clique sobre o nome da planilha no mostrador e, em seguida, na célula, e continue digitando a fórmula.

Podemos copiar e colar células usando qualquer uma das técnicas corriqueiras do Windows, tais como os itens *Copiar* e *Colar* do menu, o botão direito do *mouse*, etc., ou um dos métodos adicio-

nais do *Excel* [1], [2]. Quando copiamos e colamos uma célula contendo uma fórmula, devemos estar atentos sobre como o *Excel* interpreta a colagem. *O Excel copia a lógica da fórmula, não as referências específicas da célula.* P. ex., se copiarmos a célula D3 e a colarmos sobre a célula D5, obteremos (dependendo do algo mais que você fez na planilha), **0** ou **#NUM!**, ou algum outro resultado, mas não 8! Se você clicar sobre a célula D5 para ver a fórmula, verificará que no lugar da fórmula original **=B3^C3** está **=B5^C5**. O *Excel* copiou a lógica, que neste caso é "pegue o conteúdo da célula posicionada duas células à esquerda e eleve-o à potência do conteúdo da célula posicionada uma célula à esquerda" — o que nesse exemplo não calcula nada, pois nas células B5 e C5 temos zeros atualmente, e 0^0 é indefinido. Você só passa a obter resultados com sentido após digitar números nas células B5 e C5.

Em muitos casos, *queremos* esse tipo de colagem. P. ex., suponha que desejamos calcular a massa de ar em um recipiente quando o ar é pressurizado em uma faixa de pressões. A fórmula para isso é

$$m = \frac{p\mathcal{V}}{RT} \tag{H.1}$$

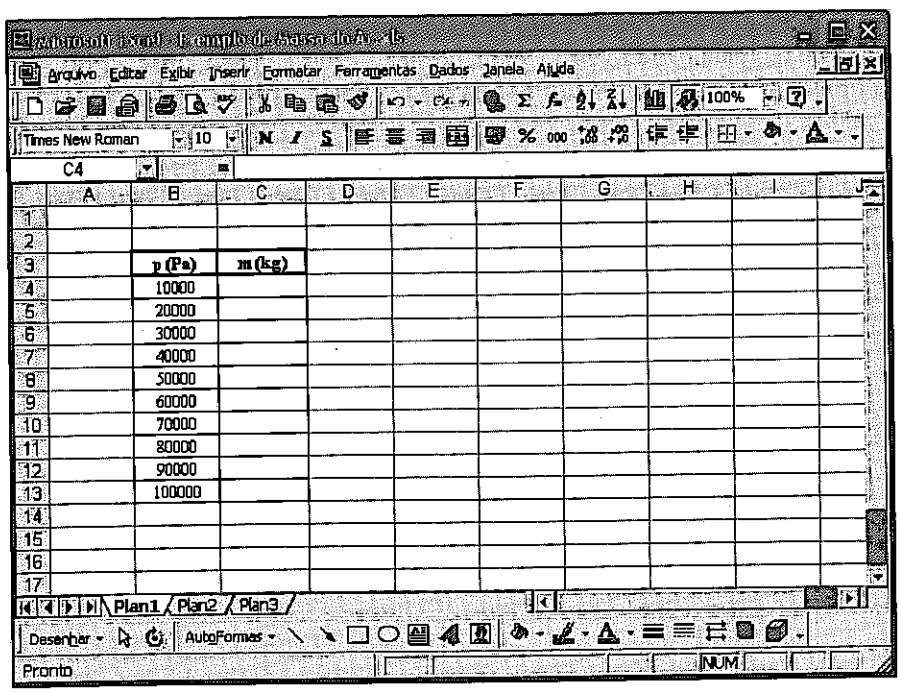
onde p é a pressão, $\mathcal{V}$ é o volume do recipiente, T é a temperatura absoluta do ar, e $R = 287$ J/kg·K é a constante do ar. Admita $\mathcal{V} = 1$ m^3, $T = 20$°C $= 293$K, e que p varia de 10 a 100 kPa em passos de 10 kPa.

Portanto,

$$m = \frac{1}{287 \times 293} p \tag{H.2}$$

Nesta fórmula, p é a pressão em Pa e m será a massa em kg.

Podemos iniciar uma nova planilha (p. ex., clicando sobre o ícone "Novo" no alto à esquerda na barra de ferramentas ou utilizando o item do menu **Arquivo...Novo**), escrever cabeçalhos para pressão e massa em colunas distintas, e entrar com os dados de pressão (note que existem maneiras no *Excel* para preencher automaticamente na seqüência de p, que fizemos alguma formatação na planilha, e que adicionamos bordas usando o ícone "Bordas" situado mais à esquerda na barra de ferramentas):



Agora podemos criar a Eq. H.2 na célula C4, para a massa referente à primeira pressão: A fórmula deve ser **=1/287/293*B4**. (Note que o *Excel* segue a convenção de precedências de operações para potenciação, seguida de multiplicação/divisão, seguida de adição/subtração etc.) Poderíamos, então,