Em tais casos, se o tempo for representado por t unidades e se y unidades representar o total da quantidade presente em qualquer instante, então

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y > 0$ para todo $t \geqslant 0$. Se y cresce com o aumento de t, então $k > 0$ e temos a **lei de crescimento natural**. Se y decresce quando t aumenta então $k < 0$ e temos a **lei de decaimento natural**.

Se por definição y for um inteiro positivo (por exemplo, se y for a população de certa comunidade), vamos supor que y possa ser um número real qualquer para que y seja uma função contínua de t.

Vamos supor um modelo matemático envolvendo a lei de crescimento ou decaimento natural e a condição inicial de que $y = y_0$ quando $t = 0$. A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

Integrando, teremos

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt$$

$$\ln|y| = kt + \bar{c}$$

$$|y| = e^{kt+\bar{c}}$$

$$|y| = e^{\bar{c}} \cdot e^{kt}$$

Tomando $e^{\bar{c}} = C$ temos $|y| = Ce^{kt}$, e como y é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto, resultando assim

$$y = Ce^{kt}$$

Como $y = y_0$ quando $t = 0$, obtemos $C = y_0$. Então,

$$y = y_0 e^{kt}$$

Provamos assim o teorema a seguir.

7.7.1 TEOREMA Suponha que y seja uma função contínua de t com $y > 0$ para todo $t \geqslant 0$. Além disso,

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = y_0$ quando $t = 0$. Então,

$$y = y_0 e^{kt}$$

EXEMPLO 1 Numa certa cultura a taxa de crescimento das bactérias é proporcional à população presente. Se existirem 1.000 bactérias inicialmente e

a quantidade dobrar em 12 min, quanto tempo levará até que haja 1.000.000 de bactérias?

Tabela 1

t	0	12	T
y	1.000	2.000	1.000.000

Solução Seja t o tempo decorrido e y o número de bactérias presentes em t min. A Tabela 1 dá as condições laterais, onde T min é o tempo necessário para que haja 1.000.000 bactérias.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 1.000$ quando $t = 0$. Temos a lei do crescimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 1.000e^{kt} \tag{1}$$

Como $y = 2.000$ quando $t = 12$, obtemos de (1)

$$e^{12k} = 2$$

Assim,

$$12k = \ln 2$$

$$k = \tfrac{1}{12} \ln 2$$

$$k = 0{,}05776$$

Logo, de (1) com esse valor de k temos

$$y = 1.000e^{0{,}05776t}$$

Substituindo t por T e y por 1.000.000, temos

$$1.000.000 = 1.000e^{0{,}05776T}$$

$$e^{0{,}05776T} = 1.000$$

$$0{,}5776T = \ln 1.000$$

$$T = \frac{\ln 1.000}{0{,}05776}$$

$$T = 119{,}6$$

Logo, existirão 1.000.000 de bactérias em 119,6 min que é 1 hora, 59 min e 36 s.

Tabela 2

t	0	30	60
y	50.000	75.000	y_{60}

EXEMPLO 2 A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980, de 75.000, qual a população esperada em 2010?

Solução Seja t o tempo em anos, decorrido desde 1950. Seja y a população em t anos. As condições laterais são dadas na Tabela 2, onde y_{60} é a população esperada em 2010.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 50.000$ quando $t = 0$. Temos a lei de crescimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 50.000\, e^{kt} \tag{2}$$

Como $y = 75.000$ quando $t = 30$, obtemos de (2)

$$75.000 = 50.000e^{30k}$$

$$e^{30k} = \tfrac{3}{2} \tag{3}$$

Quando $t = 60$, $y = y_{60}$. Logo, de (2),

$$y_{60} = 50.000e^{60k}$$

$$y_{60} = 50.000(e^{30k})^2$$

Substituindo (3) nessa equação, obtemos

$$y_{60} = 50.000(\tfrac{3}{2})^2$$
$$= 112.500$$

Portanto, a população esperada em 2010 é de 112.500 habitantes.

No exemplo anterior, como a população cresce com o tempo, temos um caso da lei do crescimento natural. Se a população decresce com o tempo, o que pode ocorrer se a taxa de mortalidade for maior do que a de natalidade, teremos então um caso da lei do decaimento natural (veja o Exercício 3). No próximo exemplo há uma outra situação envolvendo a lei do decaimento natural. Em problemas envolvendo a lei do decaimento natural, a **meia-vida** de uma substância é o tempo para que ela seja reduzida à metade da quantidade inicial.

EXEMPLO 3 A taxa de decaimento do rádio é proporcional à quantidade presente em qualquer instante. Se houver 60 mg de rádio agora e sua meia-vida for 1.690 anos, qual a quantidade de rádio daqui a 100 anos?

Tabela 3

t	0	1.690	100
y	60	30	y_{100}

Solução Seja t o número de anos a partir de agora. Seja y o número de miligramas de rádio presentes em t anos. Das condições laterais dadas na Tabela 3, concluímos que haverá y_{100} mg de rádio daqui a 100 anos.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 60$ quando $t = 0$. Temos a lei do decaimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 60e^{kt} \tag{4}$$

Como $y = 30$ quando $t = 1.690$, de (4) temos que $30 = 60e^{1.690k}$, isto é,

$$e^{1.690k} = 0{,}5$$

$$1.690k = \ln 0{,}5$$

$$k = \frac{\ln 0{,}5}{1.690}$$

$$k = -0{,}000410$$

Substituindo esse valor de k em (4), obtemos

$$y = 60e^{-0,000410t}$$

Quando $t = 100$, $y = y_{100}$; assim da relação acima,

$$y_{100} = 60e^{-0,0410}$$
$$= 57,6$$

Logo, daqui a 100 anos haverá 57,6 mg de rádio.

EXEMPLO 4 Há 100 milhões de litros de água fluorada no reservatório que abastece uma cidade e a água contém 700 kg de fluoreto. Para diminuir a concentração de fluoreto, é despejada água pura no reservatório a uma taxa de 3 milhões de litros por dia e a solução de fluoreto homogênea escoa do reservatório à mesma taxa. Quantos quilogramas de fluoreto restarão no reservatório 60 dias depois que a água pura começou a ser despejada no reservatório?

Solução Seja t o número de dias decorridos desde que a água pura começou a ser despejada no reservatório. Seja x kg o número de quilogramas de fluoreto que restam no reservatório em t dias.

Como 100 milhões de litros de água fluorada estão no reservatório o tempo todo, em t dias a quantidade de fluoreto por milhões de litros será de $x/100$ kg. Três milhões de litros de água fluorada escoam do reservatório a cada dia; assim o reservatório perde $3(x/100)$ kg de fluoreto por dia. Como $\frac{dx}{dt}$ é a taxa de variação de x em relação a t e x é decrescente com t crescente, temos a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

Essa equação é da forma $\frac{dx}{dt} = kx$, onde k é $-0,03$. Portanto, do Teorema 7.7.1

$$x = Ce^{-0,03t}$$

Tabela 4

t	0	60
x	700	x_{60}

Temos as condições iniciais dadas na Tabela 4, onde x_{60} kg é a quantidade de fluoreto no reservatório após 60 dias. Quando $t = 0$, $x = 700$; assim $C = 700$. Tomando $t = 60$ e $x = x_{60}$, temos

$$x_{60} = 700e^{-1,8}$$
$$= 700(0,1653)$$
$$= 115,7$$

Assim, existirão 115,7 kg de fluoreto no reservatório, 60 dias depois que a água pura começou a ser despejada no reservatório.

O Cálculo pode ser muito útil a um economista, para avaliar certas decisões. Porém, para usá-lo precisamos lidar com funções contínuas. Consideremos, por exemplo, a seguinte fórmula que determina A, o número de unidades monetá-

rias da quantia após t anos, se P unidades monetárias forem investidas a uma taxa anual de $100i\%$, compostos m vezes por ano:

$$A = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{5}$$

Vamos imaginar uma situação na qual os juros sejam continuamente compostos, isto é, consideremos a fórmula (5), onde fazemos o número de períodos de juros por ano crescer indefinidamente. Passando ao limite na fórmula (5), temos

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

que pode ser escrita como

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} \tag{6}$$

Para calcular esse limite pelo Teorema 2.7.1 precisamos determinar primeiro se

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}$$

existe. Tomando $h = i/m$, temos $m/i = 1/h$; e como $m \to +\infty$ é equivalente a $h \to 0^+$, temos

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} = \lim_{h \to 0^+} (1 + h)^{1/h}$$
$$= e$$

Logo, usando o Teorema 2.7.1, temos

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} = \left[\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it}$$
$$= e^{it}$$

e assim, (6) torna-se

$$A = Pe^{it} \tag{7}$$

Fazendo t variar no conjunto dos números reais não-negativos, vemos que (7) expressa A como função contínua de t.

Outra maneira de considerar a mesma situação é supor que o investimento de P unidades monetárias cresça segundo uma taxa proporcional a seu tamanho. Essa é a lei do crescimento natural. Então, se A unidades monetárias for a quantia em t anos, teremos

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

onde k é uma constante e $A = P$ quando $t = 0$. Do Teorema 7.7.1

$$A = Pe^{kt}$$

Comparando essa relação com (7) vemos que serão iguais se $k = i$. Assim, se um investimento cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho, dizemos que

os juros foram **compostos continuamente** e que a taxa anual de juros é a constante de proporcionalidade.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se P unidades monetárias forem investidas a uma taxa de 8% por ano, compostos continuamente, e A unidades monetárias for o montante do investimento em t anos,

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}08A$$

e

$$A = Pe^{0{,}08t}$$ ◀

Se em (7) tomamos $P = 1$, $i = 1$ e $t = 1$, obtemos $A = e$, que dá uma justificativa para a interpretação econômica do número e como o resultado de um investimento de \$ 1 por um ano, a uma taxa de juros de 100% ao ano, composta continuamente.

No exemplo a seguir usaremos o termo *taxa anual efetiva* de juros, que é a taxa que dá a mesma quantia de juros compostos uma vez ao ano.

EXEMPLO 5 Se \$ 5.000 forem emprestados a uma taxa de juros de 12% ao ano, compostos continuamente, e o empréstimo tiver que ser pago em uma única vez ao fim de um ano, quanto deverá pagar a pessoa que emprestou? Ache, também, a taxa anual efetiva de juros.

Solução Se A for a quantia a ser paga, como $P = 5.000$, $i = 0{,}12$ e $t = 1$, temos de (7)

$$\begin{aligned} A &= 5.000e^{0{,}12} \\ &= 5.000(1{,}1275) \\ &= 5637{,}50 \end{aligned}$$

Assim, a pessoa deverá pagar \$ 5.637,50. Chamando j a taxa anual efetiva de juros, temos

$$\begin{aligned} 5.000(1 + j) &= 5.000e^{0{,}12} \\ 1 + j &= e^{0{,}12} \\ j &= 1{,}1275 - 1 \\ j &= 0{,}1275 \\ j &= 12{,}75\% \end{aligned}$$

A taxa anual efetiva de juros é 12,75%.

Se a função do Teorema 7.7.1 for denotada por f, então $y = f(t)$. Além disso, se $f(0) = B (B > 0)$, então do teorema, quando

$$f'(t) = kt \qquad t \geqslant 0 \tag{8}$$

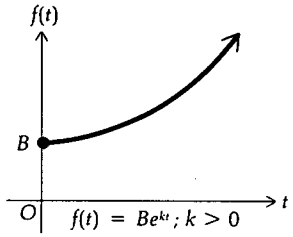


FIGURA 1

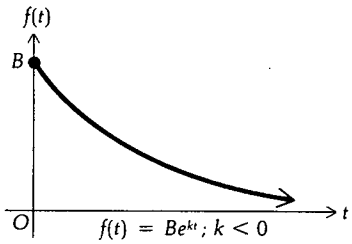


FIGURA 2

temos

$$f(t) = Be^{kt} \qquad t \geqslant 0 \tag{9}$$

Se $k > 0$, então (8) será a lei do crescimento natural e (9) definirá uma função que dizemos ter **crescimento exponencial**. Como quando $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= +\infty$$

então $f(t)$ cresce indefinidamente quando t cresce indefinidamente. Um esboço do gráfico de (9) quando $k > 0$ está na Figura 1.

Se $k < 0$, então (8) será a lei do decaimento natural e (9) definirá uma função que dizemos ter **decaimento exponencial**. Observe em (9) que se $k < 0$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= 0$$

e $f(t)$ tende a zero através de valores positivos. Um esboço do gráfico de (9) quando $k < 0$ é apresentado na Figura 2.

Suponha agora que uma quantidade cresça segundo uma taxa proporcional à diferença entre um número A, positivo, fixo e o seu tamanho. Então, se o tempo for representado por t unidades e y unidades for a quantidade presente em qualquer instante,

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y) \tag{10}$$

onde k é uma constante positiva e $y < A$ para todo $t \geqslant 0$. Separando as variáveis em (10), obtemos

$$\frac{dy}{A - y} = kt$$

Integrando, teremos

$$\int \frac{dy}{A - y} = k \int dt$$
$$-\ln|A - y| = kt + C$$
$$\ln|A - y| = -kt - C$$
$$|A - y| = e^{-C}e^{-kt}$$

Seja $e^{-C} = B$. Como $A - y$ é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto. Assim, teremos

$$A - y = Be^{-kt}$$
$$y = A - Be^{-kt} \tag{11}$$

Se nesta igualdade tomarmos $y = f(t)$, teremos

$$f(t) = A - Be^{-kt}$$

onde A, B e k são constante positivas. Essa igualdade descreve um **crescimento limitado**.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{t\to+\infty} (A - Be^{-kt}) \\ &= A - B \lim_{t\to+\infty} e^{-kt} \\ &= A - B \cdot 0 \\ &= A\end{aligned}$$

e $f(t)$ tende a A por valores menores do que A. Logo, da Definição 2.5.4 (i), o gráfico de f tem como assíntota horizontal a reta A unidades acima do eixo t. Note também que

$$\begin{aligned}f(0) &= A - Be^{-k\cdot 0} \\ &= A - B\end{aligned}$$

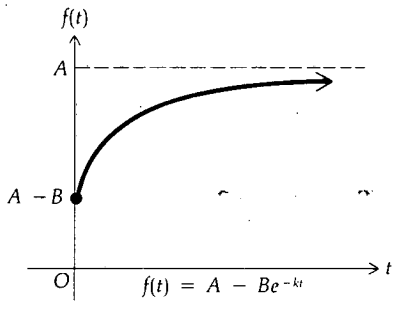


FIGURA 3

Dessa informação obtemos o esboço do gráfico de f na Figura 3. Esse gráfico é chamado algumas vezes de **curva do aprendizado**. O nome é apropriado quando $f(t)$ representa a competência segundo a qual uma pessoa realiza determinada tarefa. Ao iniciar uma atividade, a competência de um indivíduo aumenta rapidamente e depois mais vagarosamente, já que uma experiência adicional tem pouco efeito na habilidade de realizar a tarefa.

EXEMPLO 6 Um operário recém-contratado realiza uma tarefa com maior eficiência a cada dia que passa; de tal forma que se y unidades forem produzidas por dia após t dias no trabalho, então

$$\frac{dy}{dt} = k(80 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 80$ para todo $t \geqslant 0$. O empregado produz 20 unidades no primeiro dia de trabalho e 50 unidades por dia após 10 dias de trabalho. (a) Quantas unidades por dia ele estará produzindo após 30 dias de trabalho? (b) Mostre que após 60 dias ele estará produzindo apenas 1 unidade a menos do que seu potencial completo.

Solução A equação diferencial dada é a mesma que (10) com $A = 80$. Logo, a solução geral é da forma de (11) com $A = 80$; assim sendo, ela é

$$y = 80 - Be^{-kt} \tag{12}$$

Tabela 5

t	0	10	30	60
y	20	50	y_{30}	y_{60}

A Tabela 5 mostra as condições laterais, onde y_{30} unidades são produzidas por dia após 30 dias no trabalho e y_{60} unidades são a produção diária após 60 dias no trabalho. Como $y = 20$ quando $t = 0$, obtemos de (12)

$$20 = 80 - Be^0$$

$$20 = 80 - B$$

$$B = 60$$

Substituindo B por 60 em (12), obtemos

$$y = 80 - 60e^{-kt} \tag{13}$$

De (13), com $y = 50$ quando $t = 10$, temos

$$50 = 80 - 60e^{-10k}$$
$$e^{-10k} = 0{,}5$$

Substituindo esse valor de e^{-10k} em (13), teremos

$$y = 80 - 60(e^{-10k})^{t/10} \qquad (14)$$
$$= 80 - 60(0{,}5)^{t/10}$$

(a) Como $y = y_{30}$ quando $t = 30$, obtemos de (14)

$$y_{30} = 80 - 60(0{,}5)^3$$
$$= 80 - 60(0{,}125)$$
$$= 80 - 7{,}5$$
$$= 72{,}5$$

Logo, o empregado estará produzindo 72 unidades por dia depois de 30 dias no trabalho.

(b) De (14), com $y = y_{60}$ quando $t = 60$, obtemos

$$y_{60} = 80 - 60(0{,}5)^6$$
$$= 80 - 60(0{,}0156)$$
$$= 80 - 0{,}938$$
$$= 79{,}062$$

Após 60 dias no trabalho, o empregado estará produzindo 79 unidades por dia. Como

$$\lim_{t \to +\infty} [80 - 60(0{,}5)^{t/10}] = 80 - 60 \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2^{t/10}}$$
$$= 80 - 60 \cdot 0$$
$$= 80$$

o potencial total é de 80 unidades por dia. Assim, após 60 dias no emprego, o operário estará produzindo apenas 1 unidade a menos do que o seu potencial.

Na Secção 9.6 vamos considerar outro tipo de crescimento limitado, que dá um modelo de crescimento populacional levando em conta os fatores ambientais.

Há uma função importante em Estatística chamada **função densidade de probabilidade normal padrão** que é definida por

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

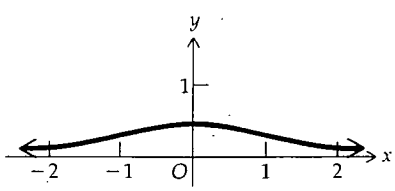


FIGURA 4

Um esboço do gráfico de N está na Figura 4. Ela é uma curva com a forma de sino muito conhecida pelos estatísticos. A curva é simétrica em relação ao eixo y. A Tabela 6 dá valores de $N(x)$ para alguns valores de x.

Observe que quando x cresce indefinidamente ou decresce indefinidamente, então $N(x)$ tende a zero rapidamente. Por exemplo, $N(3) = 0{,}004$ e $N(4) = 0{,}0001$. A probabilidade de que uma escolha aleatória de x esteja no intervalo

Tabela 6

x	$N(x)$
0	0,40
±0,5	0,35
±1,0	0,24
±1,5	0,13
±2,0	0,05
±2,5	0,02
±3,0	0,004
±3,5	0,001
±4,0	0,0001

fechado $[a, b]$ é denotada por $P([a, b])$, e

$$P([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx \tag{15}$$

A integral definida em (15) é a medida da área da região limitada acima pela curva $y = N(x)$, abaixo pelo eixo x e dos lados pelas retas $x = a$ e $x = b$. Essa integral definida não pode ser calculada pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, pois não podemos encontrar uma antiderivada do integrando usando funções elementares. Entretanto, podemos calcular valores aproximados de tal integral definida pela regra do trapézio ou pela regra de Simpson, conforme mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 7 Para a função de densidade de probabilidade normal padrão, determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[0, 2]$. Aproxime o valor da integral definida por (a) a regra do trapézio com $n = 4$ e (b) a regra de Simpson com $n = 4$.

Solução A probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[0, 2]$ é $P([0, 2])$ e, de (15),

$$P([0, 2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx \tag{16}$$

(a) Aproximamos a integral em (16) pela regra do trapézio com $n = 4$. Como $[a, b] = [0, 2]$, $\Delta x = \frac{1}{2}$. Logo, com $f(x) = e^{-x^2/2}$,

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx &\approx \tfrac{1}{4}[f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + f(2)] \\ &= \tfrac{1}{4}[e^0 + 2e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 2e^{-9/8} + e^{-2}] \\ &\approx \tfrac{1}{4}[1 + 2(0{,}8825) + 2(0{,}6065) + 2(0{,}3246) + 0{,}1353] \\ &= \tfrac{1}{4}(4{,}7625) \\ &\approx 1{,}191\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}P([0, 2]) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1{,}191) \\ &\approx 0{,}475\end{aligned}$$

(b) Se a regra de Simpson com $n = 4$ for usada para aproximar a integral em (16), teremos

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx &\approx \tfrac{1}{6}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)] \\ &= \tfrac{1}{6}[e^0 + 4e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 4e^{-9/8} + e^{-2}] \\ &\approx \tfrac{1}{6}[1 + 4(0{,}8825) + 2(0{,}6065) + 4(0{,}3246) + 0{,}1353] \\ &= \tfrac{1}{6}(7{,}1767) \\ &\approx 1{,}196\end{aligned}$$

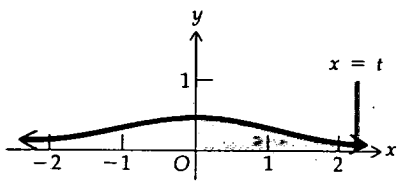


FIGURA 5

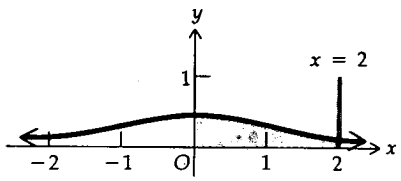


FIGURA 6

Logo,

$$P([0, 2]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1{,}196)$$

$$\approx 0{,}477$$

Na Figura 5 a região sombreada está no primeiro quadrante e é limitada pelo gráfico da função de densidade de probabilidade normal padrão, pelos eixos coordenados e pela reta $x = t$, onde $t > 0$. Se $A(t)$ unidades quadradas for a área dessa região, pode ser mostrado, embora seja difícil, que $\lim_{t \to \infty} A(t) = 0{,}5$. Assim o valor exato de $P([0, 2])$ é menor do que 0,5, pois é a medida da área da região sombreada da Figura 6. Esse fato está de acordo com os resultados do Exemplo 7.

EXERCÍCIOS 7.7

1. A taxa de crescimento natural da população de certa cidade é proporcional à população. Se a população aumenta de 40.000 para 60.000 em 40 anos, quando a população será de 80.000?
2. A população de determinada cidade dobrou em 60 anos, de 1890 a 1950. Se a taxa de crescimento natural da população em qualquer instante for proporcional à população naquele instante e a população em 1950 era de 60.000, estime a população no ano 2000.
3. A população de uma cidade decresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Em 1975 ela era de 50.000 e em 1985, 44.000. Qual a população esperada em 1995?
4. Após a estréia, a publicidade de determinado filme foi interrompida e a freqüência decresceu numa taxa proporcional. Se no dia da estréia a freqüência num certo cinema era de 5.000 e no terceiro dia, de 2.000, qual a freqüência esperada no sexto dia?
5. Após 1 ano de uso, a taxa de depreciação de um automóvel em qualquer instante é proporcional a seu valor naquele instante. Se um automóvel foi comprado em 1º de junho de 1988 e seus valores em 1º de junho de 1989 e 1990 eram, respectivamente, \$ 7.000 e \$ 5.800, qual o valor esperado do carro em 1º de junho de 1994?
6. Suponha que o valor de certa coleção de antiguidades aumente com a idade e a taxa de valorização em qualquer momento seja proporcional a seu valor naquele momento. Se o valor da coleção há 10 anos era de \$ 25.000 e se o valor atual é de \$ 35.000, em quantos anos espera-se que o valor seja de \$ 50.000?
7. O crescimento das bactérias numa certa cultura se faz segundo uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes. Se inicialmente existem 1.000 bactérias e o número dobra em 30 min, quantas bactérias haverá em 2 horas?
8. Numa certa cultura de bactérias, a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes e esse número triplica a cada hora. Se após 4 horas houver 10 milhões de bactérias, qual o número de bactérias inicialmente?
9. Se a meia-vida do rádio for de 1.690 anos, que porcentagem da quantidade presente agora restará após (a) 100 anos e (b) 1.000 anos?
10. Em 15 anos, 30% de uma substância radioativa desaparecem. Ache a meia-vida da substância.
11. A mortalidade no inverno de uma certa espécie de animal selvagem numa dada região do hemisfério norte apresenta uma taxa proporcional ao número de indivíduos presentes em qualquer momento. Havia 2.400 indivíduos da espécie em 21 de dezembro (primeiro dia de inverno) e 30 dias depois havia 2.000. Quantos indivíduos da espécie deverão sobreviver ao inverno? Isto é, quantos estarão vivendo 90 dias após 21 de dezembro?
12. Quando é removida a força eletromotriz de um circuito elétrico simples, sem capacitores, mas tendo indutores e resistores, a taxa de decaimento da corrente é proporcional à corrente. A corrente é i ampères t s após a remoção e $i = 40$, quando $t = 0$. Se a corrente cair para 15 ampères em 0,01 s, ache i em termos de t.
13. (a) Ache os juros percebidos num investimento de \$ 500 ao final de um ano, se a taxa de juros anual for de 10% compostos continuamente. (b) Qual é a taxa anual efetiva de juros?
14. Um empréstimo de \$ 1.000 deve ser pago em um único pagamento, ao final de um ano. Se a taxa de juros for 8% compostos continuamente, determine (a) a quantia total a ser paga (b) a taxa de juros anual efetiva.
15. Se certa quantia investida dobra em 10 anos a juros compostos continuamente, quanto tempo levará para que a quantia inicial triplique?
16. Se o poder de compra de um dólar decresce a uma taxa de 10% anualmente, compostos continuamente, quanto tempo irá levar para que o poder de compra seja de meio dólar?

17. Quanto tempo levará para que \$ 500 acumulem até \$ 1.000, se o dinheiro for investido a 8% ao ano compostos continuamente?
18. Em Biologia, uma equação usada algumas vezes para descrever o crescimento restrito de uma população é a Equação de Gompertz:

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln \frac{a}{y}$$

onde a e k são constantes positivas. Ache a solução geral dessa equação diferencial.

19. Numa certa reação química, a taxa de conversão de uma substância é proporcional à quantidade de substância que ainda não reagiu até aquele instante. Após 10 min, um terço da quantidade da substância original já reagiu e 20 g já reagiram após 15 min. Qual era a quantidade original da substância?
20. O açúcar se dissolve em água a uma taxa proporcional à quantidade que permanece não dissolvida. Se havia 50 kg de açúcar para serem dissolvidos e ao final de 5 h ainda havia 20 kg não dissolvidos, quanto tempo levará para que 90% do açúcar seja dissolvido?
21. Há 100 litros de água salgada em um tanque e essa água contém 70 kg de sal dissolvido. Despeja-se água pura no tanque a uma taxa de 3 L/min e o conteúdo é misturado permanentemente, mantendo-se uniforme, e escoando na mesma taxa. Quantos quilogramas de sal existirão no tanque após uma hora?
22. Um tanque contém 200 litros de água salgada, havendo 3 kg de sal por litro. Deseja-se dissolver essa solução acrescentando-se água salgada com 1 kg de sal por litro, a uma taxa de 4 L/min e fazendo-se a solução escoar na mesma taxa. Quando o tanque conterá $1\frac{1}{2}$ kg de sal por litro?
23. O Professor Willard Libby da Universidade da Califórnia em Los Angeles recebeu o Prêmio Nobel de Química por uma descoberta de um método para determinar a data da morte de um fóssil. Ele usou o fato de que no tecido de um organismo vivo estão presentes dois tipos de átomos de carbono: um carbono radioativo comumente notado por ^{14}C e um carbono estável, ^{12}C, sendo que a razão entre a quantidade de ^{14}C e a de ^{12}C é aproximadamente constante. Quando o organismo morre, a lei do decaimento natural aplica-se somente ao ^{14}C. Se for determinado que a quantidade de ^{14}C presente é somente 45% da quantidade original e a meia-vida do ^{14}C é de 5.600 anos, quando morreu o organismo?
24. Refira-se ao Exercício 23. Suponha que um arqueólogo tenha determinado que a quantidade de ^{14}C presente no fóssil seja 25% da quantidade original. Usando o fato de que a meia-vida do ^{14}C é de 5.600 anos, qual a idade do fóssil?
25. Suponha que faltem 3 horas para um estudante fazer um exame e durante esse tempo ele deseja memorizar um conjunto de 60 fatos. De acordo com os psicólogos, a taxa segundo a qual uma pessoa pode memorizar um conjunto de fatos é proporcional ao número de fatos que restam para serem memorizados. Assim, se o estudante memorizar y fatos em t min,

$$\frac{dy}{dt} = k(60 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 60$ para todo $t \geqslant 0$. Supõe-se que inicialmente zero fato seja memorizado. Se o estudante memoriza 15 fatos nos 20 primeiros min, quantos fatos ele irá memorizar em (a) 1 h e (b) 3 h?

26. Um trabalhador recém-contratado para uma linha de montagem pode fazer uma determinada tarefa, de tal forma que se y unidades forem completadas por dia após t dias na linha de montagem, então

$$\frac{dy}{dt} = k(90 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 90$ para todo $t \geqslant 0$. No primeiro dia de trabalho 60 unidades são completadas e após 5 dias de trabalho, o trabalhador faz 75 unidades por dia. (a) Quantas unidades por dia ele estará fazendo após 9 dias no trabalho? (b) Mostre que após 30 dias ele estará produzindo quase a pleno potencial.

27. Para a função densidade de probabilidade normal padrão determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo [0, 1]. Aproxime o valor da integral definida usando (a) a regra do trapézio, com $n = 4$ e (b) a regra de Simpson, com $n = 4$.
28. Para a função densidade de probabilidade normal padrão, determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[-3, 3]$. Aproxime o valor da integral definida usando (a) a regra do trapézio, com $n = 6$ e (b) a regra de Simpson, com $n = 6$.
29. A função erro, denotada por fer, é definida por

$$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Ache um valor aproximado da fer (1) para quatro casas decimais, usando a regra de Simpson com $n = 10$.

30. Para a função erro definida no Exercício 29, ache um valor aproximado da fer (10) até quatro casas decimais, usando a regra de Simpson com $n = 10$.

7.8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM *(Suplementar)*

Introduzimos equações diferenciais com variáveis separáveis na Secção 5.3, e as aplicações adicionais de tais equações apareceram na Secção 7.7. Agora discutiremos as **equações diferenciais lineares de primeira ordem**, que são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

onde P e Q são contínuas e $y = F(x)$ onde F é diferenciável. Uma função F que satisfaz essa equação é chamada de **solução** da equação. A **solução completa** envolve uma constante arbitrária.

Para chegar a um método que dê a solução completa de (1), começamos tomando $Q(x) = 0$ para obter a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

Podemos separar as variáveis e obtemos

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

Integrando ambos os membros, temos

$$\ln|y| + \bar{C} = -\int P(x)\,dx$$

Se tomarmos $\bar{C} = -\ln|C|$, temos

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\,dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$ye^{\int P(x)\,dx} = C \tag{3}$$

A solução completa de (2) é dada por (3). Mas lembre-se de que nosso objetivo é resolver a equação (1). Observe que se calcularmos a diferencial do primeiro membro de (3), teremos

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = dye^{\int P(x)\,dx} + ye^{\int P(x)\,dx} P(x)\,dx$$

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = e^{\int P(x)\,dx}(dy + P(x)y\,dx) \tag{4}$$

Agora, podemos mostrar que se multiplicarmos ambos os membros de (1) por $e^{\int P(x)\,dx}\,dx$, o primeiro membro se tornará o segundo membro de (4). Fazemos isso escrevendo (1):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$e^{\int P(x)\,dx}\,dx\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = e^{\int P(x)\,dx}\,dx[Q(x)]$$

$$e^{\int P(x)\,dx}(dy + P(x)y\,dx) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Substituindo de (4) nessa equação, obtemos

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Integrando ambos os membros, resulta

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Se G for uma antiderivada qualquer de $Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$, temos

$$ye^{\int P(x)\,dx} = G(x) + C$$

$$y = G(x)e^{-\int P(x)\,dx} + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

Sabemos que se a equação (1) tiver uma solução, será da forma (5). Para verificar que (5) é a solução completa de (1), devemos mostrar que qualquer y da forma (5) é a solução de (1). Para fazer isso, multiplicamos primeiro ambos os membros de (5) por $e^{\int P(x)\,dx}$ para obter

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Diferenciando ambos os membros dessa equação com relação a x, temos

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)\,dx} + ye^{\int P(x)\,dx}P(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

Agora, multiplicamos ambos os membros por $e^{-\int P(x)\,dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Provamos o teorema a seguir.

7.8.1 TEOREMA A solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são contínuas, é dada por

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Para aplicar o Teorema 7.8.1, é necessário memorizar a fórmula por y. Entretanto, podemos resolver uma equação linear de primeira ordem calculando primeiro $e^{\int P(x)\,dx}$, que é chamada um **fator de integração** da equação. Então, procedemos da mesma maneira que fizemos para obter (5), ou seja, multiplicamos ambos os lados da equação pelo fator de integração e depois integramos ambos os membros da equação resultante. Ao calcular o fator de integração, tomamos a constante arbitrária como sendo igual a zero, pois qualquer antiderivada de P resultará um fator de integração. Demonstramos esse procedimento na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x$$

é da forma de (1) onde $P(x) = -2x$ e $Q(x) = 3x$. Para resolver essa equação calculamos primeiro

$$e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

Multiplicamos ambos os membros da equação dada por esse fator de integração para obter

$$e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{-x^2}(-2xy) = e^{-x^2}(3x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = 3xe^{-x^2}$$

Integrando ambos os membros, temos

$$e^{-x^2}y = \int 3xe^{-x^2}\,dx$$

$$e^{-x^2}y = -\tfrac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Multiplicamos ambos os membros por e^{x^2} e obtemos

$$y = -\tfrac{3}{2} + Ce^{x^2}$$

que é a solução completa da equação diferencial dada. ◀

Observe que a equação diferencial na Ilustração 1 também pode ser resolvida, separando as variáveis após escrevermos a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = x(3 + 2y)$$

Uma equação diferencial linear da forma (1) para a qual $Q(x) = 0$ também pode ser resolvida, separando as variáveis. Na ilustração a seguir resolvemos tal equação por dois métodos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** (a) Resolvemos a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

como uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma (1), onde $P(x) = 2x$ e $Q(x) = 0$. Um fator de integração é

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por e^{x^2}, temos

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 0$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{x^2}y = C$$

$$y = Ce^{-x^2}$$

(b) Resolvemos a mesma equação, separando as variáveis

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + K$$

$$|y| = e^{-x^2}e^K$$

$$y = \pm e^K e^{-x^2}$$

$$y = Ce^{-x^2}$$

onde $C = \pm e^K$. ◀

EXEMPLO 1 Encontre a solução completa da equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2$$

onde $x \neq 0$.

Solução Para escrever a equação diferencial dada na forma (1) dividimos ambos os membros da equação por x, de modo que o coeficiente dy/dx seja 1. Temos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x \tag{6}$$

Como $P(x) = -\dfrac{2}{x}$, um fator de integração é

$$e^{\int(-2/x)\,dx} = e^{-\ln x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando ambos os membros de (6) por $1/x^2$, obtemos

$$\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{1}{x}$$

Integrando ambos os membros resulta

$$\frac{1}{x^2}y = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2}y = \ln|x| + C$$

$$y = x^2\ln|x| + Cx^2$$

que é a solução completa.

EXEMPLO 2 Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{cotg} x = \cos x$$

se $y = 1$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$.

Solução Temos uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual $P(x) = \operatorname{cotg} x$. Portanto, um fator de integração é

$$e^{\int \operatorname{cotg} x\, dx} = e^{\ln|\operatorname{sen} x|}$$
$$= |\operatorname{sen} x|$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por sen x (desprezamos as barras de valor absoluto pois sen $x > 0$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$), obtemos

$$\operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Integrando ambos os membros, resulta

$$y \operatorname{sen} x = \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$$

$$y \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C \tag{7}$$

Como $y = 1$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$, substituímos esses valores por x e y nessa equação e obtemos

$$1 \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{6}\pi + C$$
$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} + C$$
$$C = \tfrac{3}{8}$$

Substituindo C por $\frac{3}{8}$ em (7), obtemos a solução desejada:

$$y \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + \tfrac{3}{8}$$
$$8y \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x + 3$$

EXEMPLO 3 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4x + y^2}$$

onde $y \neq 0$.

Solução Essa equação não é linear em y. Entretanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4x + y^2}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y}x = y \tag{8}$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem que é linear em x, isto é, é da forma

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

onde $P(y) = -4/y$ e $Q(y) = y$. Portanto, um fator de integração é

$$e^{\int(-4/y)\,dy} = e^{-\ln y^4}$$

$$= \frac{1}{y^4}$$

Multiplicando ambos os membros de (8) por $1/y^4$ resulta

$$\frac{1}{y^4}\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y^5}x = \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y^4}x\right) = \frac{1}{y^3}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\frac{x}{y^4} = \int \frac{1}{y^3}\,dy$$

$$\frac{x}{y^4} = -\frac{1}{2y^2} + C$$

$$x = -\tfrac{1}{2}y^2 + Cy^4$$

que é a solução completa.

Uma aplicação das equações diferenciais lineares de primeira ordem é encontrada em Física, atribuída à *lei do resfriamento de Newton*, que estabelece que a razão na qual um corpo varia de temperatura é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente que o cerca.

EXEMPLO 4 Se um corpo estiver no ar, cuja temperatura é 35° e resfria-se de 120° a 60° em 40 min, use a lei do resfriamento de Newton para achar a temperatura do corpo depois de 100 min.

Tabela 1

t	0	40	100
y	120	60	y_{100}

Solução Seja t min o tempo decorrido desde que o corpo começou a esfriar. Seja y graus a temperatura do corpo em t min. A Tabela 1 dá as condições laterais, onde y_{100} graus é a temperatura do corpo após 100 min.

Da lei do resfriamento de Newton temos

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 35)$$

onde k é uma constante e $y > 35$ para todo $t \geqslant 0$.

Escrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dt} - ky = -35k \tag{9}$$

observamos que se trata de uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual um fator de integração é

$$e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

Multiplicando ambos os membros de (9) por e^{-kt} resulta

$$e^{-kt}\frac{dy}{dt} - ke^{-kt}y = -35ke^{-kt}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = -35ke^{-kt}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{-kt}y = \int -35ke^{-kt}\,dt$$

$$e^{-kt}y = 35e^{-kt} + C$$

$$y = 35 + Ce^{kt}$$

Quando $t = 0$, $y = 120$; assim, $C = 85$. Logo,

$$y = 35 + 85e^{kt} \tag{10}$$

Quando $t = 40$, $y = 60$ e obtemos

$$60 = 35 + 85e^{40k}$$

$$e^{40k} = \tfrac{5}{17}$$

Substituímos esse valor de e^{40k} em (10) e obtemos

$$y = 35 + 85(e^{40k})^{t/40}$$

$$y = 35 + 85(\tfrac{5}{17})^{t/40}$$

Como $y = y_{100}$ quando $t = 100$, da relação anterior temos que

$$y_{100} = 35 + 85(\tfrac{5}{17})^{5/2}$$

$$= 39$$

Logo, após 100 min a temperatura do corpo será 39°.

Outra aplicação das equações diferenciais lineares de primeira ordem surge associada à eletricidade. Suponha que um circuito elétrico simples, mostrado na Figura 1, gere uma voltagem de E volts, com um gerador ou uma bateria. A corrente passa quando o botão em S, na figura, é pressionado, completando o circuito. O físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) formulou uma lei, chamada de *segunda lei de Kirchhoff*, estabelecendo que a cada instante, a soma da carga elétrica em torno do circuito elétrico é igual à força eletromotriz naquele instante. No circuito da Figura 1, seja i ampères a corrente em t s. Se L henrys for a indutância, então a carga elétrica passando pelo indutor será $L\frac{di}{dt}$, e se R ohms for a resistência, a carga elétrica que passa pelo resistor será Ri. Portanto, pela segunda lei de Kirchhoff

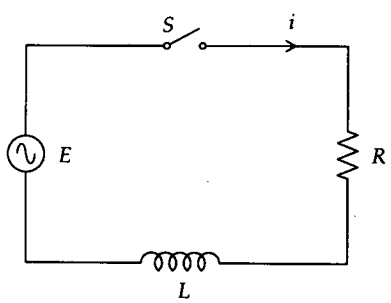


FIGURA 1

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \tag{11}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que um circuito elétrico tenha um gerador fornecendo 150 volts e um resistor de 15 ohms e um indutor de 5 henrys, ligado em série. Além disso, suponha que o interruptor seja acionado quando $t = 0$; isto é, $i = 0$ quando $t = 0$. Da equação (11) com $E = 150$, $R = 15$ e $L = 5$, temos

$$5\frac{di}{dt} + 15i = 150$$

$$\frac{di}{dt} + 3i = 30 \tag{12}$$

Um fator de integração para (12) é $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$. Multiplicando ambos os membros de (12) por e^{3t}, temos

$$e^{3t}\frac{di}{dt} + 3e^{3t}i = 30e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}i) = 30e^{3t}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{3t}i = \int 30e^{3t}\,dt$$

$$e^{3t}i = 10e^{3t} + C$$

$$i = 10 + Ce^{-3t}$$

Como $i = 0$ quando $t = 0$, $C = -10$. Portanto,

$$i = 10 - 10e^{-3t}$$

$$i = 10(1 - e^{-3t})$$

Como

$$\lim_{t\to+\infty} i = \lim_{t\to+\infty} 10(1 - e^{-3t})$$

$$= 10$$

i é sempre menor que 10 pois aproxima-se de 10 enquanto t aumenta indefinidamente. Embora a corrente na verdade nunca alcance 10 ampères, estabelecemos a corrente teoricamente máxima como sendo de 10 ampères. ◀

O circuito elétrico mostrado na Figura 2 indica que uma força eletromotriz de E volts é ligada em série com um resistor de R ohms e um capacitor de C *farads. Por esse circuito, a carga elétrica passando por um resistor é Ri e a carga elétrica passando por um capacitor é q/C, onde q coulombs é a carga instantânea sobre o capacitor em t s. Pela segunda lei de Kirchhoff

$$Ri + \frac{q}{C} = E \tag{13}$$

Como a corrente é a razão da variação da carga em relação ao tempo

$$i = \frac{dq}{dt}$$

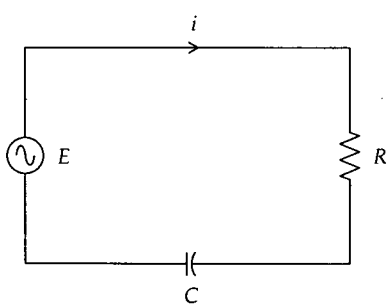


FIGURA 2

* **N. do T.**: Unidade de capacidade elétrica

Substutindo dessa equação em (13), obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \tag{14}$$

EXEMPLO 5 Suponha que um resistor de $(1 + 0{,}1t)$ ohms em t s seja ligado em série com um capacitor de $\frac{1}{5}$farad e uma força eletromotriz de 100 volts. A carga inicial no capacitor é 6 coulombs. Se em t s a carga for q coulombs e a corrente for i ampères, (a) expresse q como função de t e (b) expresse i como função de t. (c) Ache a carga máxima teoricamente.

Solução

(a) De (14) com $E = 100$, $C = \frac{1}{5}$ e $R = 1 + 0{,}1t$, temos

$$(1 + 0{,}1t)\frac{dq}{dt} + 5q = 100$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{5}{1 + 0{,}1t}q = \frac{100}{1 + 0{,}1t}$$

Um fator de integração dessa equação diferencial é

$$e^{\int 5\,dt/(1 + 0{,}1t)} = e^{50\ln(1 + 0{,}1t)}$$

$$= (1 + 0{,}1t)^{50}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $(1 + 0{,}1t)^{50}$ resulta

$$(1 + 0{,}1t)^{50}\frac{dq}{dt} + 5(1 + 0{,}1t)^{49}q = 100(1 + 0{,}1t)^{49}$$

$$\frac{d}{dt}[(1 + 0{,}1t)^{50}q] = 100(1 + 0{,}1t)^{49}$$

$$(1 + 0{,}1t)^{50}q = \int 100(1 + 0{,}1t)^{49}\,dt$$

$$(1 + 0{,}1t)^{50}q = 20(1 + 0{,}1t)^{50} + C$$

$$q = 20 + C(1 + 0{,}1t)^{-50}$$

Como a carga inicial é 6, $q = 6$ quando $t = 0$. Substituindo q e t por esses valores na equação acima, temos $C = -14$. Portanto,

$$q = 20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50}$$

(b) Como $i = \dfrac{dq}{dt}$

$$i = \frac{d}{dt}[20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50})$$

$$= 70(1 + 0{,}1t)^{-51}$$

(c) $$\lim_{t \to +\infty} q = \lim_{t \to +\infty} [20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50}]$$

$$= 20$$

Portanto, a carga máxima teoricamente é 20 ampères por segundo.

EXERCÍCIOS 7.8

Nos Exercícios de 1 a 4, resolva a equação diferencial por dois métodos: (a) use um fator de integração; (b) separe as variáveis.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$
2. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$
3. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = 0$
4. $\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + y = 0$

Nos Exercícios de 5 a 16, ache a solução completa da equação diferencial.

5. $\frac{dy}{dx} - y = e^x$
6. $x\frac{dy}{dx} + 4y = 5x$
7. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x}$
8. $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = e^x$
9. $(3y - 2x)\frac{dy}{dx} = y$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^4}$
11. $\frac{dy}{dx} + 2y \operatorname{cotg} x = \cos x$
12. $\cos x\frac{dy}{dx} = 2 + 2y \operatorname{sen} x$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{1 + x^2}$
14. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2y}{2 \sec x}$
15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x + \ln y}$
16. $2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y^2} + x}$

Nos Exercícios de 17 a 22, ache uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição dada.

17. $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 1$; $y = 1$ quando $x = 1$
18. $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2$; $y = 0$ quando $x = -1$
19. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y - x$; $y = 2$ quando $x = 1$
20. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \sec x$; $y = 1$ quando $x = 0$
21. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2y \operatorname{cotg} x$; $y = 2$ quando $x = \frac{1}{4}\pi$
22. $x\frac{dy}{dx} = 2y + 4x^2 \ln x$; $y = 4$ quando $x = 1$

23. Ache uma equação da curva que passa pelo ponto $(\frac{1}{6}\pi, 0)$ e para a qual a inclinação de qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $(2y + 4)/\operatorname{tg} x$.
24. Ache uma equação da curva que passa pelo ponto $(1, 2)$ e para a qual a indicação em qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $(3 - 2xy)/x^2$.
25. Nas condições do Exemplo 4, depois de quantos minutos a temperatura do corpo será 45°?
26. Se um corpo no ar, a uma temperatura de 0° resfria de 200° para 100° em 40 min, quantos minutos a mais levará para o corpo se resfriar a 50°? Use a lei de resfriamento de Newton.
27. Se um termômetro foi tirado de um ambiente em que a temperatura é 75° para um lugar aberto onde a temperatura é 35° e a leitura do termômetro é 65° após 30 s, (a) quanto tempo após ser removido ele marcará 50°? (b) Qual será a leitura do termômetro após 3 min? Use a lei do resfriamento de Newton.
28. Uma caneca com água fervendo a 100° foi resfriada no ar a uma temperatura de 0°. Após 20 min a temperatura da água passou para 90°. (a) Após quantos minutos a temperatura da água passou para 80°? (b) Qual seria a temperatura após 1 h? Use a lei do resfriamento de Newton.
29. Uma força eletromotriz de 60 volts é aplicada a um circuito elétrico simples consistindo de um resistor de 20 ohms e de um indutor de 4 henrys. Se i ampères for a corrente em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, (a) expresse i como uma função de t. (b) Ache a corrente teoricamente máxima.
30. Faça o Exercício 29 se, ao invés da indutância constante, um indutor de L henrys varia com o tempo, de modo que em t s, $L = 0{,}04 + 0{,}01t$ onde $0 < t \leqslant 500$.
31. Um circuito elétrico simples consiste em um indutor de 5 henrys em série com um resistor de 40 ohms, e em t s a força eletromotriz é e^t volts. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t.
32. Faça o Exercício 31 se a indutância for L henrys e a resistência for R ohms, onde L e R são constantes positivas. A força eletromotriz ainda é e^t volts em t s.
33. Um circuito elétrico simples tem um resistor de R ohms, onde $R = 1 + 0{,}01t$ em t s e $0 \leqslant t \leqslant 500$. O resistor é ligado em série com um capacitor de 0,1 farad e uma força eletromotriz de 80 volts. A carga é q coulombs e a corrente é i ampères em t s. Se a carga inicial no capacitor for 4 coulombs, (a) expresse q como uma função de t, e (b) expresse i como função de t. (c) Ache a carga teoricamente máxima.
34. Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

onde, n é uma constante, é chamada de *equação diferencial de Bernoulli*, em homenagem a James Bernoulli (1654-1705). Mostre que uma equação de Bernoulli pode ser linear em u pela substituição de $u = y^{1-n}$.

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a solução completa da equação diferencial de Bernoulli pelo resultado do Exercício 34.

35. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^4}{x^4}$
36. $x^2\frac{dy}{dx} - y^2 = 2xy$
37. $e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xy^3$
38. $\cos x\frac{dy}{dx} + y^2 = y \operatorname{sen} x$; $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7

Nos Exercícios de 1 a 6, determine se a função dada tem uma inversa. Se existir, faça o seguinte: (a) defina e estabeleça o seu domínio e a sua imagem; (b) faça esboços, no mesmo conjunto de eixos, dos gráficos da função e de sua inversa. Se a função não tiver inversa, mostre que uma reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais do que um ponto.

1. $f(x) = x^3 - 4$
2. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$
3. $f(x) = 9 - x^2$
4. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x}$
6. $f(x) = |2x - 3|$

Nos Exercícios 7 e 8, (a) prove que a função dada tem uma inversa, (b) ache $f^{-1}(x)$ e (c) verifique as relações do Teorema 7.1.4 para f e f^{-1}.

7. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
8. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

Nos Exercícios de 9 a 12, ache $(f^{-1})'(d)$.

9. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \geq 3$; $d = 3$
10. $f(x) = \sqrt{3x + 4}$; $d = 5$
11. $f(x) = 8x^3 + 6x$; $d = 4$
12. $f(x) = x^5 + x - 22$; $d = 12$

Nos Exercícios de 13 a 24, diferencie a função dada.

13. $f(x) = (\ln x^2)^2$
14. $f(t) = 3\,\mathrm{sen}(e^{4t})$
15. $g(x) = 2^{\cos 4x}$
16. $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$
17. $f(x) = e^{x/(4+x^2)}$
18. $f(x) = 10^{-5x^2}$
19. $f(x) = \sqrt{\log_{10} \dfrac{1 + x}{1 - x}}$
20. $g(x) = \ln \sqrt{\dfrac{2x + 1}{x - 3}}$
21. $f(t) = t^{3/\ln t}$
22. $F(x) = \log_{10}(x^2 2^{x^2+1})$
23. $f(x) = (x)^{x^{e^x}}$; $x > 0$
24. $f(x) = 3^{x^{x^2}}$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral indefinida.

25. $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$
26. $\displaystyle\int e^{2x^2-4x}(x - 1)\,dx$
27. $\displaystyle\int (e^{3x} + 2^{3x})\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{10^{\ln x^2}}{x}\,dx$
29. $\displaystyle\int \frac{xe^{6x^2}}{\sqrt{1 + e^{6x^2}}}\,dx$
30. $\displaystyle\int (x + 1)e^x 7^{xe^x}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{3 \cdot 2^x + 4}}$
32. $\displaystyle\int \frac{10^x + 1}{10^x - 1}\,dx$

Nos Exercícios de 33 a 38, calcule a integral definida.

33. $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$
34. $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} + 1)^2\,dx$
35. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} + 4}\,dx$
36. $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \frac{4x^{-3} + 2}{x^{-2} - x}\,dx$
37. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x - 5}\,dx$
38. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)}$

39. Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se $ye^x + xe^y + x + y = 0$
40. Se $f(x) = \log_{(e^x)}(x + 1)$, ache $f'(x)$.
41. Use diferenciais para encontrar um valor aproximado com três casas decimais de $\log_{10} 100.937$. Use o fato de que $\log_{10} e = 0{,}434$ com três casas decimais de precisão.
42. Ache a equação da reta tangente à curva $y = x^{x-1}$ em (2, 2).
43. Uma partícula move-se sobre uma reta, sendo s a distância orientada da partícula a partir da origem, v m/s, a velocidade da partícula e a m/s^2, a aceleração da partícula, em t s. Se $a = e^t + e^{-t}$, $v = 1$ e $s = 2$, quando $t = 0$, ache v e s em termos de t.
44. A área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = b (b > 0)$ é uma função de b. Se f for essa função, ache uma expressão para $f(b)$. Ache também $\lim_{b \to +\infty} f(b)$.
45. O volume do sólido obtido com a rotação da região do Exercício 44 em torno do eixo x é uma função de b. Se g for essa função encontre uma expressão para $g(b)$. Ache também $\lim_{b \to +\infty} g(b)$.
46. A taxa de crescimento natural da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população dobra em 60 anos e se a população em 1950 era 60.000, estime a população no ano 2000.
47. A taxa de decaimento de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância presente. Se metade de um dado depósito da substância desaparece em 1.900 anos, quanto tempo levará para que desapareça 95% do depósito?
48. Prove que o retângulo que tem a base no eixo x e dois vértices na curva $y = e^{-x^2}$, terá a maior área possível se os seus vértices estiverem nos pontos de inflexão do gráfico.
49. Dada $f(x) = \ln|x|$ e $x < 0$. Mostre que f tem uma função inversa. Se g for a função inversa, ache $g(x)$ e o domínio de g.
50. Prove que se $x < 1$, $\ln x < x$ (*Sugestão*: seja $f(x) = x - \ln x$, mostre então que f é decrescente em (0, 1) e ache $f(1)$.)
51. Quando um gás está em expansão ou com pressão adiabática (sem ganho ou perda de calor), então a taxa de variação da pressão em relação ao volume varia diretamente com a pressão e inversamente com o volume. Se a pressão for p N/m^2 quando o volume for v m^3, e a pressão e o volume iniciais forem respectivamente p_0 N/m^2 e v_0m^3, mostre que $pv^k = p_0 v_0^k$.
52. Seja W N/m o trabalho realizado por um gás contra um pistão em um cilindro e P dinas/cm^2 a pressão do gás quando o volume é V cm^3. Mostre que se V_1 cm^3 e V_2 cm^3 forem os volumes inicial e final, respectivamente, então

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV.$$

53. Suponha que um pistão comprima um gás de um volume inicial de 60 cm^3 até um volume de 40 cm^3. Se a lei de Boyle (Exercício 23 nos Exercícios 3.4) for válida e a pressão inicial for 50 dinas/cm^2, ache o trabalho realizado pelo pistão. (Use o resultado do Exercício 52.)

54. A carga elétrica sobre uma superfície esférica escoa a uma taxa proporcional à carga. Inicialmente, a carga elétrica era de 8 coulombs e um quarto escoou em 15 min. Quando restarão apenas 2 coulombs?

55. Quanto tempo levará para se duplicar um investimento se os juros são pagos a uma taxa de 8% ao ano compostos continuamente?

56. Os juros em uma conta remunerada são calculados à taxa de 10% ano compostos continuamente. Se alguém desejar obter \$ 1.000 na conta ao final de um ano com um único depósito feito agora, qual deverá ser o montante do depósito?

57. A taxa de crescimento numa certa cultura de bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes a cada instante e o número duplica em 20 min. Se ao final de uma hora existirem 1.500.000 bactérias, quantas bactérias havia inicialmente?

58. Consulte o Exercício 23 nos Exercícios 7.7. Um paleontologista descobriu um inseto dentro de um âmbar transparente que é resina de árvore solidificada e foi determinando que a quantidade de ^{14}C presente no inseto era 2% da quantidade original. Use o fato de que a meia-vida de ^{14}C é 5.600 anos, para determinar a idade do inseto quando ele foi descoberto.

59. Um aluno que está estudando uma língua estrangeira tem 50 verbos para serem memorizados. A taxa segundo a qual o estudante pode memorizar esses verbos é proporcional ao número de verbos que restam a ser memorizados, isto é, se o estudante memoriza y verbos em t min

$$\frac{dy}{dt} = k(50 - y)$$

Suponha que inicialmente nenhum verbo tenha sido memorizado e que nos primeiros 30 min 20 verbos foram memorizados. Quantos verbos serão memorizados em (a) 1 hora e (b) 2 horas? (c) Após quantas horas restará apenas um verbo para ser memorizado?

60. Um tanque contém 100 litros de água pura e é despejada no tanque água salgada contendo 2 kg de sal por litro, a uma taxa de 3 litros/min. A mistura, sendo agitada permentemente para se manter uniforme, escoa na mesma taxa. Quantos quilogramas de sal existirão no tanque ao final de 30 min?

61. Um tanque contém 60 litros de água salgada com 120 kg de sal dissolvido. É despejada no tanque água salgada contendo 3 kg de sal por litro, a uma taxa de 2 litros/min. A mistura é agitada para manter-se uniforme, e escoa do tanque na mesma taxa. Quantos tempo irá levar para que restem no tanque 135 kg de sal?

62. Se a população de uma determinada cidade duplica a cada 25 anos, a que percentagem estará crescendo anualmente?

63. Ache o ponto no gráfico de $f(x) = e^x$ para o qual a reta que passa por ele e é tangente ao gráfico passa também pela origem.

64. Ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 2^{-x}$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo x.

65. Prove, usando a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

(*Nota:* compare com o Exercício 53 nos Exercícios 7.3.)

66. Prove, sem usar a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

(*Sugestão*: seja $y = a^x - 1$ e expresse $(a^x - 1)/x$ como função de y, digamos, $g(y)$. Então mostre que $y \to 0$ quando $x \to 0$ e encontre $\lim_{y \to 0} g(y)$.)

67. Use os resultados dos Exercícios 65 e 66 para provar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^b - 1}{x - 1} = b$$

(*Sugestão:* escreva

$$\frac{x^b - 1}{x - 1} = \frac{e^{b \ln x} - 1}{b \ln x} \cdot \frac{b \ln x}{x - 1}$$

Então tome $s = b \ln x$ e $t = x - 1$.)

68. Prove, usando a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$$

69. Se o domínio de f for o conjunto de todos números reais e $f'(x) = cf(x)$ para todo x onde c é uma constante, prove que existe uma constante k para a qual $f(x) = ke^{cx}$ para todo x. (*Sugestão:* considere a função g para a qual $g(x) = f(x)\, e^{-cx}$ e encontre $g'(x)$.)

70. Prove que

$$D_x^n(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(*Sugestão:* use indução matemática.)

71. Ache $\int_0^t e^{-|x|} dx$ se t for um número real qualquer.

72. Prove que se $x > 0$ e $\int_1^x t^{h-1} dt = 1$, então

$$\lim_{h \to 0} x = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$$

73. Faça o Exercício 65 da série de Exercícios de Revisão do Capítulo 5, calculando todas as integrais.

74. Uma função importante em Estatística é a função densidade de probabilidade definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

onde σ e μ são constantes tais que $\sigma > 0$ e μ é um número real qualquer. Ache (a) os extremos relativos de f; (b) os pontos de inflexão do gráfico de f; (c) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; (d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (e) Faça um esboço do gráfico de f.

Os Exercícios de 75 a 81 pertencem à Secção Suplementar 7.8. Nos Exercícios 75 e 76, ache a solução completa da equação diferencial.

75. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 3x^2 + 1$

76. $\dfrac{dx}{dy} + 2x \operatorname{cotg} y = \sec^2 y$

Nos Exercícios 77 e 78, ache uma solução da equação diferencial, que satisfaça a condição dada.

77. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = 1 - y - \operatorname{sen} x$; $y = 2$ quando $x = 0$

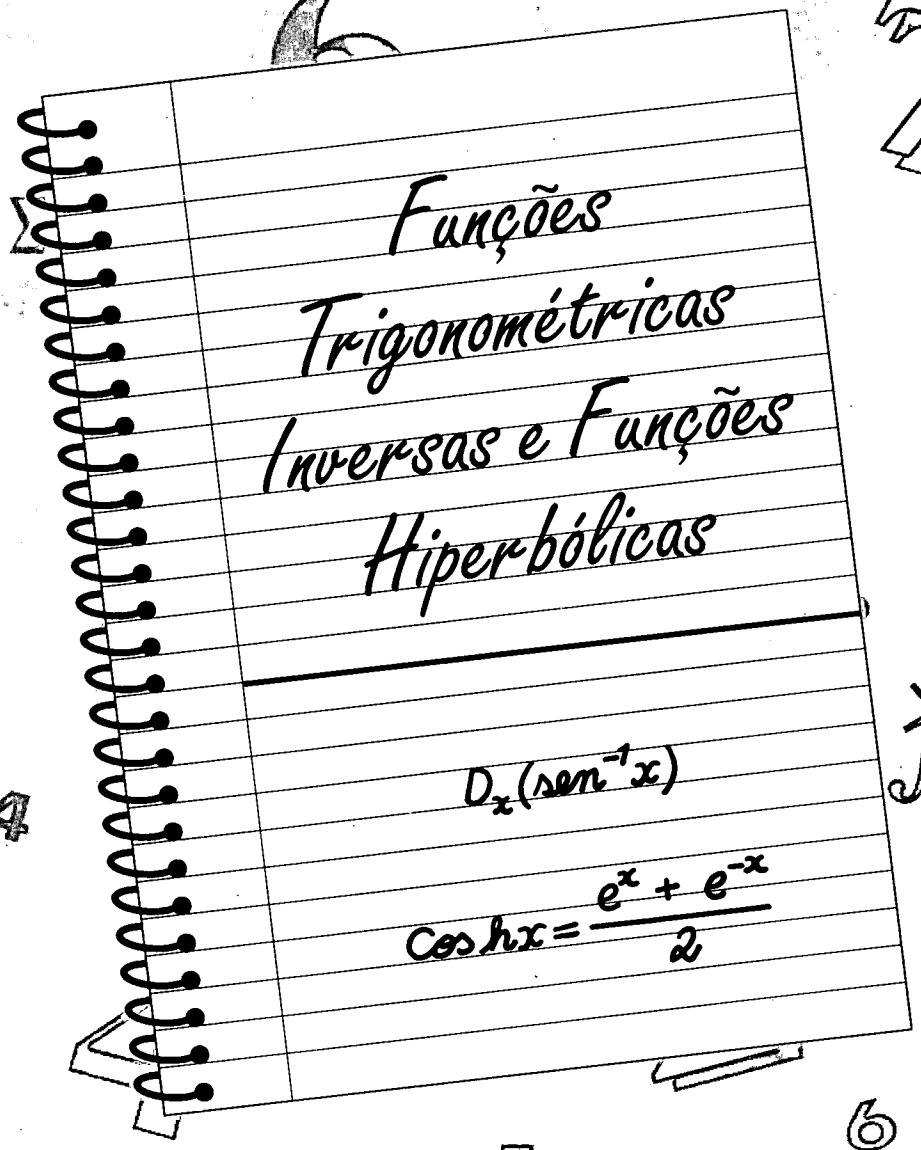
78. $x \dfrac{dy}{dx} + y = e^x$; $y = 1$ quando $x = \ln 2$

79. Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito elétrico simples, consistindo em um resistor de 10 ohms e um indutor de L henrys, onde L varia com o tempo, de modo que em t s, $L = 0{,}03 + 0{,}01t$ onde $0 \leqslant t \leqslant 1.000$. Se i ampères for a corrente em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, (a) expresse i como uma função de t. (b) Ache a corrente máxima, teoricamente.

80. Encontre uma equação da curva que passe pelo ponto $(0, -1)$ e para a qual a inclinação em qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $\cos x - y \operatorname{tg} x$.

81. Use a lei do resfriamento de Newton para determinar a temperatura de um corpo num ambiente onde a temperatura é 40°, se 30 min atrás a temperatura do corpo era 150° e 10 min atrás era 90°.

OITO

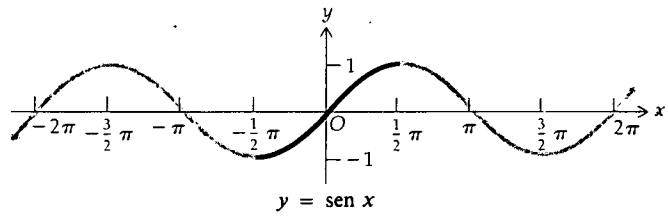


Neste capítulo aparecem mais funções transcendentais. Definimos as *funções trigonométricas inversas* na Secção 8.1. Essas funções desempenham um papel importante em nossa discussão sobre integração por substituição trigonométrica no próximo capítulo. As Secções 8.2 e 8.3 são dedicadas a derivadas e a integrais envolvendo as funções trigonométricas inversas.

As *funções hiperbólicas* envolvem potências de e, e são introduzidas na Secção 8.4. Essas funções têm propriedades similares àquelas das funções trigonométricas. A Secção Suplementar 8.5 trata das funções hiperbólicas inversas, que são usadas basicamente em associação com integração, mais adiante, na Secção Suplementar 9.8.

8.1 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Lembre-se de que para uma função ter uma inversa, é necessário que ela seja biunívoca. A Figura 1 apresenta um esboço do gráfico da função seno, mostrando que todo número em sua imagem é o valor funcional de mais do que um número em seu domínio. Logo, a função seno não é biunívoca e, portanto, não tem uma inversa. Entretanto, observe na Figura 1 que o seno é crescente no intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Esse fato é decorrência do Teorema 4.4.3, pois se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x > 0$ para todo x em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Assim sendo,



$y = \operatorname{sen} x$

FIGURA 1

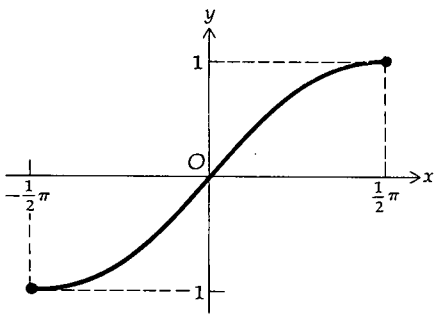


FIGURA 2

muito embora a função seno não tenha inversa, segue do Teorema 7.1.5 que a função F para a qual

$$F(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \tag{1}$$

tem uma inversa. O domínio de F é $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ e a imagem é $[-1, 1]$. Um esboço do gráfico de F está na Figura 2. A inversa da função definida por (1) é chamada *função inversa do seno*.

8.1.1 DEFINIÇÃO

A função inversa do seno, denotada por sen^{-1}, é assim definida:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ se e somente se } x = \operatorname{sen} y \text{ e } -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

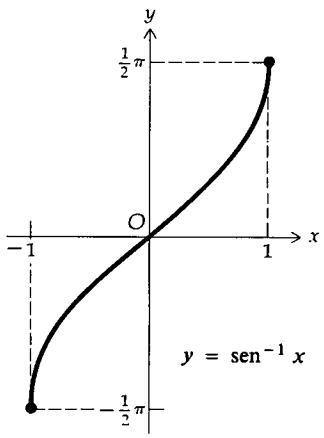


FIGURA 3

O domínio de sen^{-1} é o intervalo fechado $[-1, 1]$ e a imagem é o intervalo fechado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Um esboço do gráfico está na Figura 3.

O uso do símbolo -1 no expoente para representar a função inversa do seno torna necessário denotar o recíproco de $\operatorname{sen} x$ por $(\operatorname{sen} x)^{-1}$, a fim de evitar confusão. Uma convenção similar aplica-se quando estivermos usando qualquer potência de expoente negativo de uma função trigonométrica. Por exemplo

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x)^{-1} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = (\operatorname{sen} x)^{-2} \qquad \frac{1}{\cos^3 x} = (\cos x)^{-3}$$

e assim por diante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\text{(a) } \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi \qquad \text{(b) } \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\pi \quad \blacktriangleleft$$

Em (1) o domínio de F restringe-se ao intervalo fechado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, de tal modo que a função seja monótona em seu domínio e, portanto, tenha uma função inversa. No entanto, a função seno tem um período de 2π, sendo crescente em outros intervalos, por exemplo, $[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi]$ e $[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$. Também, a função

*N. do T.: outra notação muito usada para essa função é: *arc sen*.

é decrescente em certos intervalos fechados, como os intervalos $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ e $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}]$. Qualquer um desses intervalos poderia ser escolhido para o domínio da função F da equação (1). A escolha do intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, contudo, é mais comum, pois é o maior intervalo contendo o número 0 no qual a função é monótona.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Ao usarmos uma calculadora para determinar sen^{-1} (0,4695), dispomos primeiro a calculadora para cálculos com radianos. Colocamos 0,4695 no visor e então apertamos a tecla [sen^{-1}] (ou a tecla [INV], seguida da tecla [sen]) e lemos 0,4887. ◀

Segue da Definição 8.1.1 que

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\,x) = x \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1]$$
$$\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Observe que $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,y) \neq y$ se y não estiver no intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Por exemplo, $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi) = \text{sen}^{-1}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi$ e $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi) = \text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\pi$

EXEMPLO 1 Ache (a) $\cos\,[\text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2})]$; (b) $\text{sen}^{-1}\,(\cos\,\frac{2}{3}\pi)$

Solução Como a imagem da função inversa do seno é $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$

(a) $\cos\,[\text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2})] = \cos\,(-\frac{1}{6}\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\text{sen}^{-1}\,(\cos\,\frac{2}{3}\pi) = \text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$

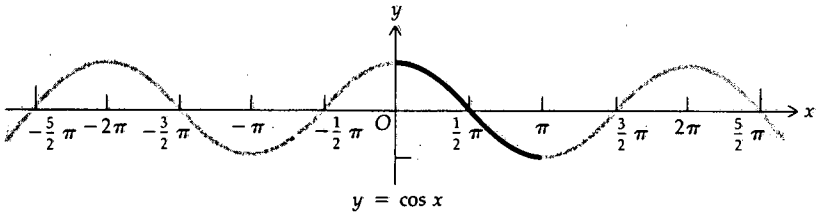


FIGURA 4

Um esboço do gráfico da função co-seno está na Figura 4. A função co-seno não tem uma inversa pois também não é biunívoca. Para definir a inversa da função co-seno restringimos o co-seno a um intervalo no qual a função é monótona. Vamos escolher o intervalo $[0, \pi]$ no qual a função co-seno é decrescente, conforme mostra a Figura 4. Consideremos então a função G definida por

$$G(x) = \cos x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

A imagem dessa função G é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e seu domínio é o intervalo fechado $[0, \pi]$. Um esboço do gráfico de G está na Figura 5. Como essa função é contínua e decrescente em seu domínio, ela tem uma função inversa chamada a *inversa da função co-seno.**

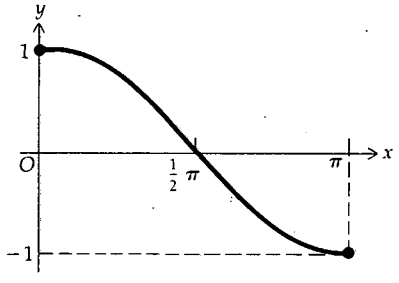


FIGURA 5

*N. do T.: outra notação muito usada para essa função é: *arc cos*.

8.1.2 DEFINIÇÃO A **função inversa do co-seno** denotada por $\cos^{-1}$, é definida assim:

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \cos y \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

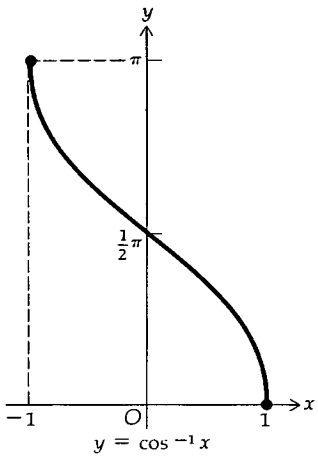


FIGURA 6

O domínio de $\cos^{-1}$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e a imagem é o intervalo fechado $[0, \pi]$. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\text{(a) } \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi \qquad \text{(b) } \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi$$ ◀

Da Definição 8.1.2 segue que

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1]$$
$$\cos^{-1}(\cos y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [0, \pi]$$

Note que há, novamente, uma restrição em y, para que tenha a igualdade $\cos^{-1}(\cos y) = y$. Por exemplo, como $\frac{3}{4}\pi$ está em $[0, \pi]$

$$\cos^{-1}(\cos\tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{3}{4}\pi$$

Entretanto,

$$\cos^{-1}(\cos\tfrac{5}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \cos^{-1}(\tfrac{7}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}$$

EXEMPLO 2 Ache o valor exato de $\operatorname{sen}[2\cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$.

Solução Como queremos obter funções trigonométricas do número $\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$, seja t esse número.

$$t = \cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})$$

Como a imagem da função inversa do co-seno é $[0, \pi]$ e $\cos t$ é negativo, t está no segundo quadrante. Assim

$$\cos t = -\tfrac{3}{5} \text{ e } \tfrac{1}{2}\pi < t < \pi$$

Queremos encontrar o valor exato do $\operatorname{sen} 2t$. Da identidade $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. Assim, precisamos calcular t. Da identidade $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, e como $\operatorname{sen} t > 0$ uma vez que t está no intervalo $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$. Assim,

$$\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - (-\tfrac{3}{5})^2}$$
$$= \tfrac{4}{5}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$
$$= 2(\tfrac{4}{5})(-\tfrac{3}{5})$$
$$= -\tfrac{24}{25}$$

donde concluímos que

$$\operatorname{sen}[2\cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})] = -\tfrac{24}{25}$$

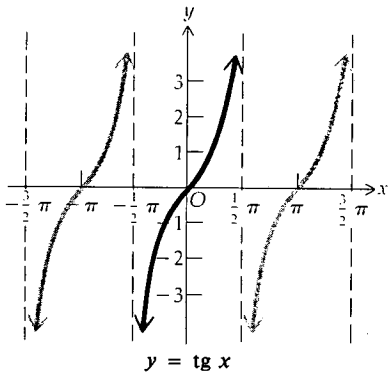


FIGURA 7

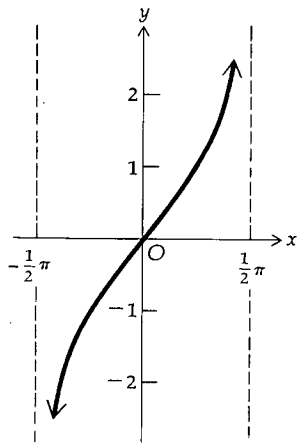


FIGURA 8

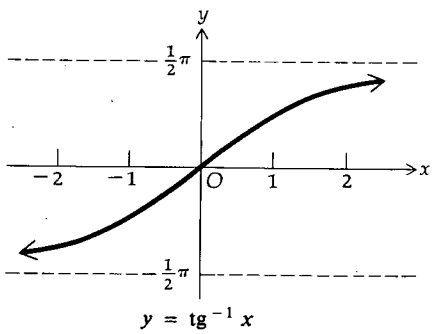


FIGURA 9

EXEMPLO 3 Prove que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x \text{ para } |x| \leqslant 1 \tag{2}$$

Solução Seja x um número pertencente a $[-1, 1]$ e seja

$$t = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x) \tag{3}$$

Aplicando a fórmula de redução $\cos(\frac{1}{2}\pi - v) = \text{sen } v$ com $v = \text{sen}^{-1} x$ no segundo membro de (3) obtemos

$$t = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$$

Como $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$,

$$t = x$$

Substituindo t por x em (3) resulta

$$x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x) \tag{4}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \text{sen}^{-1} x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, somando $-\frac{1}{2}\pi$ a cada membro teremos

$$-\pi \leqslant -\tfrac{1}{2}\pi + \text{sen}^{-1} x \leqslant 0$$

Multiplicando cada membro da desigualdade acima por -1 e invertendo os sentidos das desigualdades obtemos

$$0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x \leqslant \pi$$

Desssa desigualdade, de (4) e da Definição 8.1.2 segue que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x \text{ para } |x| \leqslant 1$$

que é (2).

Observe na solução do Exemplo 3 que a identidade depende da escolha de $[0, \pi]$ como a imagem da função inversa do co-seno.

Para obter a função inversa da tangente consideramos primeiro o gráfico da função tangente, dado na Figura 7. A função é contínua e crescente no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, conforme mostra a figura. Vamos restringir a função tangente a esse intervalo e considerar H como sendo a função definida por

$$H(x) = \text{tg } x \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$$

O domínio de H é o intervalo aberto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, e a imagem é o conjunto de todos os números reais. Um esboço de seu gráfico está na Figura 8. Como a função H é crescente e contínua em seu domínio, ela tem uma função inversa, chamada de *função inversa da tangente.**

8.1.3 DEFINIÇÃO A **função inversa da tangente**, denotada por tg^{-1}, é definida da seguinte forma:

$$y = \text{tg}^{-1} x \text{ se e somente se } x = \text{tg } y \text{ e } -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi$$

O domínio de tg^{-1} é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o intervalo aberto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Um esboço de seu gráfico está na Figura 9.

* **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc tg*.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4**

(a) $\text{tg}^{-1}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$ (b) $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{6}\pi$ (c) $\text{tg}^{-1}\,0 = 0$ ◀

Da Definição 1.3 temos que

$\text{tg}\,(\text{tg}^{-1}\,x) = x$ para x em $(-\infty, +\infty)$
$\text{tg}^{-1}\,(\text{tg}\,y) = y$ para y em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

▶ **ILUSTRAÇÃO 5**

$\text{tg}^{-1}\,(\text{tg}\,\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{4}\pi$ e $\text{tg}^{-1}\,[\text{tg}\,(-\frac{1}{4}\pi)] = -\frac{1}{4}\pi$

Entretanto,

$\text{tg}^{-1}\,(\text{tg}\,\frac{3}{4}\pi) = \text{tg}^{-1}\,(-1)$ e $\text{tg}^{-1}\,(\text{tg}\,\frac{5}{4}\pi) = \text{tg}^{-1}\,1$
$= -\frac{1}{4}\pi$ $= \frac{1}{4}\pi$ ◀

EXEMPLO 4 Ache o valor exato de $\sec\,[\text{tg}^{-1}\,(-3)]$

Solução Resolveremos esse problema tomando $\text{tg}^{-1}\,(-3)$ como um ângulo. Seja

$$\theta = \text{tg}^{-1}\,(-3)$$

Como a imagem da função inversa da tangente é $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, e como tg θ é negativa, segue que $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$. Assim,

$$\text{tg}\,\theta = -3 \text{ e } -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0$$

A Figura 10 mostra o ângulo cuja medida é θ radianos que satisfaz essas condições. Observe que o ponto P selecionado no extremo de θ é $(1, -3)$. Do Teorema de Pitágoras r é $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Portanto, $\sec\,\theta = \sqrt{10}$. Logo,

$$\sec\,[\text{tg}^{-1}\,(-3)] = \sqrt{10}$$

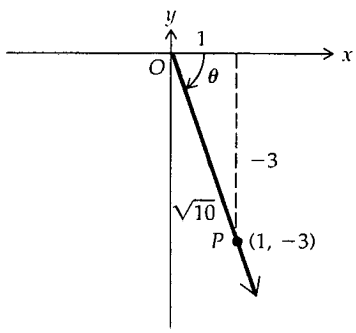


FIGURA 10

Antes de definir a função inversa da co-tangente, vamos nos referir ao Exemplo 3, onde provamos a identidade (2) envolvendo $\cos^{-1}$ e sen^{-1}. Essa identidade pode ser usada para definir a função inversa do co-seno e pode então ser provado que a imagem de $\cos^{-1}$ é $[0, \pi]$. Vamos usar esse tipo de procedimento para discutir a função inversa da co-tangente.

8.1.4 DEFINIÇÃO A **função inversa da co-tangente**, denotada por cotg^{-1}*, é definida por $\text{cotg}^{-1}\,x = \frac{1}{2}\pi - \text{tg}^{-1}\,x$ onde x é um número real qualquer.

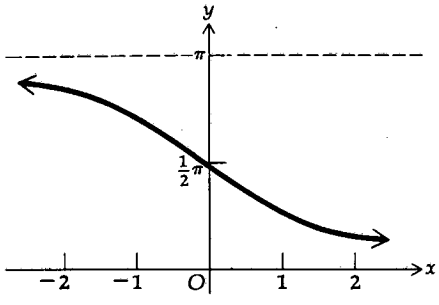
Segue da definição que o domínio de cotg^{-1} é o conjunto R de todos os números reais. Para obter a imagem escrevemos a equação da Definição 8.1.4 da seguinte forma

$$\text{tg}^{-1}\,x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{cotg}^{-1}\,x \tag{5}$$

Como

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \text{tg}^{-1}\,x < \tfrac{1}{2}\pi$$

*N. do T.: outra notação muito usada para essa função é: *arc cotg*.



$y = \text{cotg}^{-1} x$

FIGURA 11

Substituindo (5) nessa desigualdade, obtemos

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tfrac{1}{2}\pi - \text{cotg}^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

Substraindo $\frac{1}{2}\pi$ de cada membro, obtemos

$$-\pi < -\text{cotg}^{-1} x < 0$$

e agora multiplicando cada membro por -1 e invertendo o sentido das desigualdades, obtemos

$$0 < \text{cotg}^{-1} x < \pi$$

Logo, a imagem da função inversa da co-tangente é o intervalo aberto $(0, \pi)$. Um esboço de seu gráfico está na Figura 11.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6**

(a) $\text{tg}^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$ (b) $\text{tg}^{-1}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$

(c) $\text{cotg}^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi - \text{tg}^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$

(d) $\text{cotg}^{-1}(-1) = \frac{1}{2}\pi - \text{tg}^{-1}(-1) = \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4}\pi$ ◀

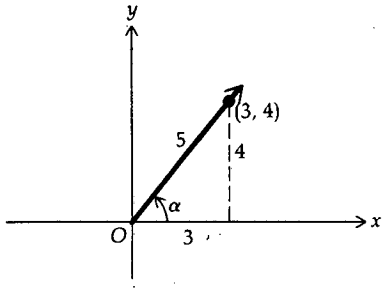


FIGURA 12

EXEMPLO 5 Ache o valor exato de $\cos[\text{cotg}^{-1}\frac{3}{4} + \text{cotg}^{-1}(-\frac{5}{12})]$.

Solução Seja $\alpha = \text{cotg}^{-1}\frac{3}{4}$ e $\beta = \text{cotg}^{-1}(-\frac{5}{12})$. Então,

$$\text{cotg}\,\alpha = \tfrac{3}{4} \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\text{cotg}\,\beta = -\tfrac{5}{12} \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{2}\pi < \beta < \pi$$

Queremos encontrar $\cos(\alpha + \beta)$. Da fórmula do co-seno da soma,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \tag{6}$$

Para determinar $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$, veja a Figura 12, que mostra um ângulo α no primeiro quadrante para o qual $\text{cotg}\,\alpha = \frac{3}{4}$. Da figura,

$$\text{sen}\,\alpha = \tfrac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5} \tag{7}$$

A Figura 13 mostra um ângulo β no segundo quadrante para o qual $\text{cotg}\,\beta = -\frac{5}{12}$. Da figura,

$$\text{sen}\,\beta = \tfrac{12}{13} \qquad \cos\beta = -\tfrac{5}{13} \tag{8}$$

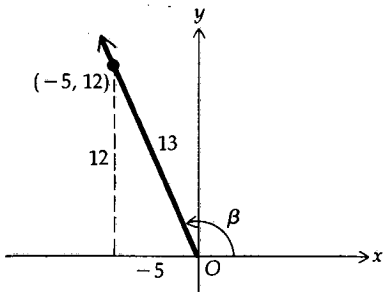
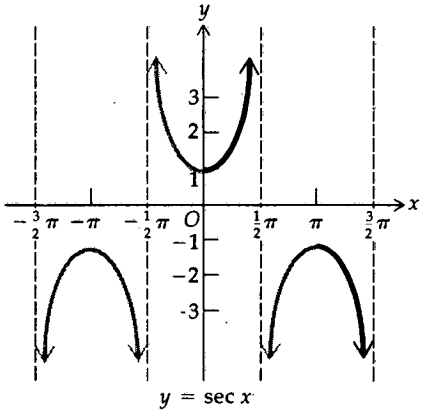


FIGURA 13

Substituindo (7) e (8) em (6) temos

$$\cos(\alpha + \beta) = \tfrac{3}{5}(-\tfrac{5}{13}) - \tfrac{4}{5}(\tfrac{12}{13}) = -\tfrac{63}{65}$$



$y = \sec x$

FIGURA 14

Para chegarmos à definição da *função inversa da secante*, vamos considerar primeiro um esboço do gráfico da função secante dado na Figura 14. Observe que ela é crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ e decrescente no intervalo $[\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Além disso, se $x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, então $\sec x \in (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$. Escolhemos o intervalo $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ pois a derivação da função inversa da secante, bem como outros cálculos com ela (na Secção 9.4, por exemplo), tornam-se mais simples se a função inversa da secante for definida de tal forma que quando $x < 0$ então $\pi \leqslant \sec^{-1} x \leqslant \frac{3}{2}\pi$. Assim sendo, daremos a definição a seguir.

8.1.5 DEFINIÇÃO A **função inversa da secante**, denotada por $\sec^{-1}$*, é definida da seguinte forma:

$$y = \sec^{-1} x \text{ se e somente se } x = \sec y \text{ e } \begin{cases} 0 \leqslant y < \frac{1}{2}\pi & \text{se } x \geqslant 1 \\ \pi \leqslant y < \frac{3}{2}\pi & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$$

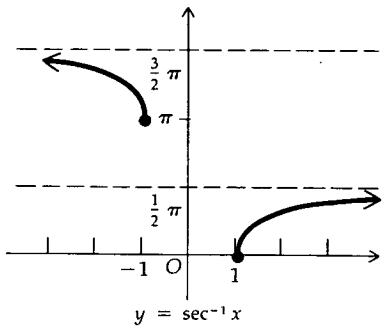


FIGURA 15

O domínio de $\sec^{-1}$ é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A imagem de $\sec^{-1}$ é $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Um esboço do gráfico de $\sec^{-1}$ está na Figura 15.

Da Definição 8.1.5 temos

$$\sec(\sec^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ em } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$
$$\sec^{-1}(\sec y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Vamos definir agora a *função inversa da co-secante* em termos da inversa da função secante.

8.1.6 DEFINIÇÃO A **função inversa da co-secante**, denotada por $\operatorname{cosec}^{-1}$**, é definida por

$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \text{ para } |x| \geqslant 1$$

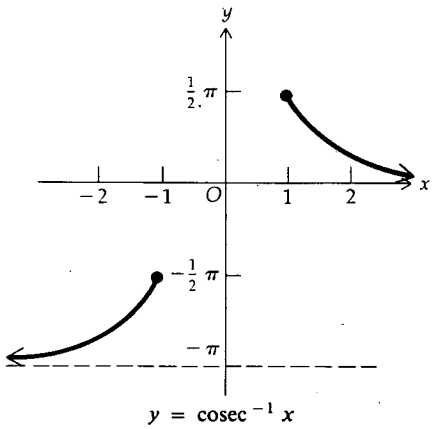


FIGURA 16

Da definição, o domínio de $\operatorname{cosec}^{-1}$ é $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. A imagem de $\operatorname{cosec}^{-1}$ pode se encontrada de forma análoga à que foi usada para determinar a imagem de cotg^{-1}. A imagem de $\operatorname{cosec}^{-1}$ é $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, e você deverá mostrar isso no Exercício 53. Um esboço do gráfico de $\operatorname{cosec}^{-1}$ está na Figura 16.

► **ILUSTRAÇÃO 7**

(a) $\sec^{-1} 2 = \frac{1}{3}\pi$

(b) $\sec^{-1}(-2) = \frac{4}{3}\pi$

(c) $\operatorname{cosec}^{-1} 2 = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1} 2 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$

(d) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2) = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1}(-2) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\pi = -\frac{5}{6}\pi$ ◄

EXERCÍCIOS 8.1

Nos Exercícios de 1 a 6, determine o valor funcional exato.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$; (c) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$; (d) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$
2. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (c) $\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. (a) $\operatorname{tg}^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\operatorname{tg}^{-1}(-\sqrt{3})$; (c) $\sec^{-1} \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; (d) $\sec^{-1}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$
4. (a) $\operatorname{cotg}^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\operatorname{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$; (c) $\operatorname{cosec}^{-1} \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; (d) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$
5. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 1$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$; (c) $\operatorname{cosec}^{-1} 1$; (d) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$; (e) $\operatorname{sen}^{-1} 0$
6. (a) $\cos^{-1} 1$; (b) $\cos^{-1}(-1)$; (c) $\sec^{-1} 1$; (d) $\sec^{-1}(-1)$; (e) $\cos^{-1} 0$
7. Dado que $x = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) cos x; (b) tg x; (c) cotg x; (d) sec x; (e) cosec x.
8. Dado que $x = \cos^{-1} \frac{1}{3}$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) sen x; (b) tg x; (c) cotg x; (d) sec x; (e) cosec x.
9. Faça o Exercício 7 se $x = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$.
10. Faça o Exercício 8 se $x = \cos^{-1}(-\frac{2}{3})$.
11. Dado que $y = \operatorname{tg}^{-1}(-2)$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) sen y; (b) cos y; (c) cotg y; (d) sec y; (e) cosec y.
12. Dado que $y = \operatorname{cotg}^{-1}(-\frac{1}{2})$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) sen y; (b) cos y; (c) tg y; (d) sec y; (e) cosec y.
13. Dado que $t = \operatorname{cosec}^{-1}(-\frac{3}{2})$, o valor exato de cada uma das funções: (a) sen t; (b) cos t; (c) tg t; (d) cotg t; (e) sec t.

* **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc sec*.
** **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc cosec*.

14. Dado que $t = \sec^{-1}(-3)$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) sen t; (b) cos t; (c) tg t; (d) cotg t; (e) cosec t.

Nos Exercícios de 15 a 40, ache o valor exato da quantidade dada.

15. (a) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{sen}^{-1}[\text{sen } (-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{5}{6}\pi)$; (d) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{11}{6}\pi)$

16. (a) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{sen}^{-1}[\text{sen } (-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{2}{3}\pi)$; (d) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \frac{5}{3}\pi)$

17. (a) $\cos^{-1}(\cos \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\cos^{-1}[\cos (-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\cos^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi)$; (d) $\cos^{-1}(\cos \frac{4}{3}\pi)$

18. (a) $\cos^{-1}(\cos \frac{1}{4}\pi)$; (b) $\cos^{-1}[\cos (-\frac{1}{4}\pi)]$; (c) $\cos^{-1}(\cos \frac{3}{4}\pi)$; (d) $\cos^{-1}(\cos \frac{5}{4}\pi)$

19. (a) $\text{tg}^{-1}(\text{tg } \frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{tg}^{-1}[\text{tg } (-\frac{1}{3}\pi]$; (c) $\text{tg}^{-1}(\text{tg } \frac{7}{6}\pi)$; (d) $\text{tg}^{-1}[\text{tg } (-\frac{4}{3}\pi)]$

20. (a) $\text{tg}^{-1}(\text{tg } \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{tg}^{-1}[\text{tg } (-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{tg}^{-1}(\text{tg } \frac{4}{3}\pi)$; (d) $\text{tg}^{-1}[\text{tg } (-\frac{7}{6}\pi)]$

21. (a) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg } \frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg } (-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg } \frac{7}{6}\pi)$; (d) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg } (-\frac{4}{3}\pi)]$

22. (a) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg } \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg } (-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg } \frac{4}{3}\pi)$; (d) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg } (-\frac{7}{6}\pi)]$

23. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\sec^{-1}[\sec (-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\sec^{-1}(\sec \frac{2}{3}\pi)$; (d) $\sec^{-1}(\sec \frac{4}{3}\pi)$

24. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{4}\pi)$; (b) $\sec^{-1}[\sec (-\frac{1}{4}\pi)]$; (c) $\sec^{-1}(\sec \frac{3}{4}\pi)$; (d) $\sec^{-1}(\sec \frac{5}{4}\pi)$

25. (a) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{cosec}^{-1}[\text{cosec } (-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{5}{6}\pi)$; (d) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{11}{6}\pi)$

26. (a) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{cosec}^{-1}[\text{cosec } (-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{2}{3}\pi)$; (d) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{5}{3}\pi)$

27. (a) $\text{tg}[\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$; (b) $\text{sen}[\text{tg}^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$

28. (a) $\cos[\text{tg}^{-1}(-3)]$; (b) $\text{tg}[\sec^{-1}(-3)]$

29. (a) $\cos[\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})]$; (b) $\text{sen}[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

30. (a) $\text{tg}[\text{cotg}^{-1}(-1)]$; (b) $\text{cotg}[\text{tg}^{-1}(-1)]$

31. $\cos[2 \text{ sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

32. $\text{tg}[2 \sec^{-1}(-\frac{5}{4})]$

33. $\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{2}{3} + \cos^{-1} \frac{1}{3})$

34. $\cos[\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) + \text{sen}^{-1} \frac{1}{4}]$

35. $\cos[\text{sen}^{-1} \frac{2}{3} + 2 \text{ sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

36. $\text{tg}(\text{tg}^{-1}(-\frac{2}{5}) - \cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{2}))$

37. $\text{tg}(\text{tg}^{-1} \frac{3}{4} - \text{sen}^{-1} \frac{1}{2})$

38. $\text{tg}[\sec^{-1} \frac{5}{3} + \text{cosec}^{-1}(-\frac{13}{12})]$

39. $\cos(\text{sen}^{-1} \frac{1}{3} - \text{tg}^{-1} \frac{1}{2})$

40. $\text{sen}[\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2 \text{ sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

41. Prove: $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}} + \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{4}\pi$.

42. Prove: $2 \text{ tg}^{-1} \frac{1}{3} - \text{tg}^{-1}(-\frac{1}{7}) = \frac{1}{4}\pi$.

Nos Exercícios de 43 a 50, faça um esboço do gráfico da função dada.

43. $f(x) = \frac{1}{2} \text{ sen}^{-1} x$

44. $g(x) = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2}x$

45. $g(x) = \text{tg}^{-1} 2x$

46. $f(x) = 2 \text{ tg}^{-1} x$

47. $F(x) = \cos^{-1} 3x$

48. $G(x) = \frac{1}{2}\sec^{-1} 2x$

49. $f(x) = 2 \text{ cotg}^{-1} \frac{1}{2}x$

50. $g(x) = \frac{1}{2}\cos^{-1} \frac{1}{2}x$

51. Um peso é suspenso por uma mola e vibra verticalmente, de acordo com a equação $y = 2 \text{ sen } 4\pi(t + \frac{1}{8})$, onde y cm é a distância orientada do peso a partir de sua posição central t s após começar o movimento e a direção positiva é para cima. (a) Resolva a equação em t. (b) Use a equação da parte (a) para determinar os três menores valores de t para os quais o peso está a 1 cm acima de sua posição central.

52. Uma corrente alternada com 60 ciclos por segundo (Hertz) é descrita pela equação $x = 20 \text{ sen } 120\pi(t - \frac{11}{720})$, onde x ampères é a corrente em t s. (a) Resolva a equação em t. (b) use a equação da parte (a) para determinar os três menores valores positivos de t para os quais a corrente é 10 ampères.

53. Prove que a imagem de cosec^{-1} é $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$.

54. Prove que $\text{tg}^{-1} x + \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\pi$, se $x > 0$. (*Sugestão*: use a identidade $\text{cotg } A = \text{tg}(\frac{1}{2}\pi - A)$).

8.2 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Como a função inversa do seno é contínua e crescente em seu domínio, segue do Teorema 7.2.3 que ela tem uma derivada. Para obter a fórmula de sua derivada tomamos

$$y = \text{sen}^{-1} x$$

que é equivalente a

$$x = \text{sen } y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Derivando ambos os membros dessa igualdade com relação a y teremos

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \tag{1}$$

Da identidade $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, substituindo sen y por x, obtemos

$$\cos^2 y = 1 - x^2$$

Se y está em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, cos y é não-negativo; assim,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{se } y \text{ estiver em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Substituindo essa relação em (1), obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

Do Teorema 7.2.3, $\dfrac{dy}{dx}$ é o recíproco de $\dfrac{dx}{dy}$; logo,

$$D_x(\text{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{2}$$

O domínio da derivada da função inversa do seno é o intervalo aberto $(-1, 1)$. De (2) e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

8.2.1 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $y = \text{sen}^{-1} x^2$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}(2x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

◀

Para obter a fórmula para a derivada da função inversa do co-seno, usamos (2) da Secção 8.1, que é

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x$$

Derivando com relação a x teremos

$$D_x(\cos^{-1} x) = D_x(\tfrac{1}{2}\pi - \text{sen}^{-1} x)$$

Assim,

$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3}$$

onde x está em $(-1, 1)$.

O próximo teorema segue de (3) e da regra da cadeia.

8.2.2 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$$

Vamos obter agora a fórmula para a derivada da função inversa da tangente. Se

$$y = \operatorname{tg}^{-1} x$$

então

$$x = \operatorname{tg} y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

Derivando ambos os membros da igualdade acima com relação a y iremos obter

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \tag{4}$$

Da identidade $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$ e substituindo tg y por x, temos

$$\sec^2 y = 1 + x^2$$

Substituindo essa equação em (4), obtemos

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$

Assim, do Teorema 7.2.3,

$$D_x(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{5}$$

O domínio da derivada da função inversa da tangente é o conjunto de todos os números reais.

De (5) e da regra da cadeia obtemos o teorema a seguir.

8.2.3 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{1}{x + 1}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{(x + 1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x + 1)^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + 2x + 2}$$

◄

Da definição 8.1.4,

$$\operatorname{cotg}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{tg}^{-1} x$$

Derivando com relação a x, obtemos a fórmula.

$$D_x(\operatorname{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Dessa fórmula e da regra da cadeia segue o teorema a seguir.

8.2.4 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{cotg}^{-1} u) = -\frac{1}{1 + u^2} D_x u$$

EXEMPLO 1 Ache $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = x^3 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x$$

Solução

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x + x^3 \cdot \frac{-1}{1 + \frac{1}{9}x^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 3x^2 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x - \frac{3x^3}{9 + x^2}$$

EXEMPLO 2 Ache $\frac{dy}{dx}$ se

$$\ln(x + y) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solução Derivando implicitamente ambos os membros da igualdade dada com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{x + y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x + y} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2 + x^2}$$

$$y^2 + x^2 + (y^2 + x^2)\frac{dy}{dx} = xy + y^2 - (x^2 + xy)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - x^2}{2x^2 + xy + y^2}$$

Para obter a fórmula para a derivada da inversa da função secante seja

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{e} \quad |x| \geqslant 1$$

Então,

$$x = \sec y \qquad \text{e } y \text{ está em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{6}$$

Derivando ambos os membros de (6) com relação a y obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y \qquad \text{e } y \text{ está em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{7}$$

Da identidade $\operatorname{tg}^2 y = \sec^2 y - 1$, $\sec y = x$, obtemos

$$\operatorname{tg}^2 y = x^2 - 1$$

Como y está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, tg y é não-negativa. Assim,

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{se } y \text{ estiver em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Substituindo (6) e a relação anterior em (7), teremos

$$\frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

Assim, do Teorema 7.2.3,

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{8}$$

onde $|x| > 1$. De (8) e da regra da cadeia segue o teorema a seguir.

8.2.5 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $f(x) = \sec^{-1}(3e^x)$, então

$$f'(x) = \frac{1}{3e^x\sqrt{(3e^x)^2 - 1}}(3e^x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9e^{2x} - 1}}$$ ◀

Da Definição 8.1.6,

$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \qquad \text{para } |x| \geqslant 1$$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{9}$$

onde $|x| > 1$. De (9) e da regra da cadeia, temos o teorema a seguir.

8.2.6 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{cosec}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

EXEMPLO 3 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = x \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

Solução

$$f'(x) = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + x \left[-\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \left[\frac{-x^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}}$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

No exemplo a seguir, um observador está olhando um quadro colocado em uma parede. Veja a Figura 1. Quando o observador está afastado da parede, o ângulo segundo o qual ele vê o quadro é pequeno. À medida que o observador se aproxima da parede, o ângulo irá aumentando, até atingir um valor máximo. Então, se o observador continuar se aproximando, o ângulo diminuirá. Quando o ângulo for máximo, diremos que o observador tem a "melhor visão" do quadro.

EXEMPLO 4 Um quadro com 1 m de altura é colocado em uma parede de tal forma que sua base esteja 2 m acima do nível dos olhos de um observador. Quantos metros o observador deverá se afastar da parede, para obter a melhor visão do quadro, isto é, para que o ângulo segundo o qual ele vê o quadro seja o máximo?

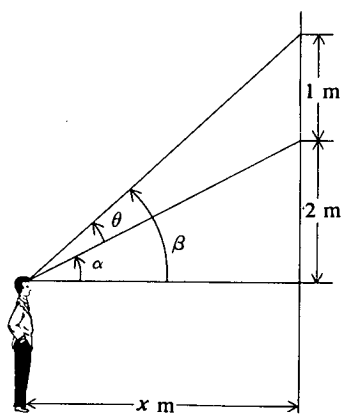


FIGURA 1

Solução Seja x m a distância do observador até a parede, θ a medida em radianos do ângulo segundo o qual o observador vê o quadro, α a medida do ângulo em radianos, segundo o qual o observador vê a parte da parede acima do nível dos olhos e abaixo do quadro, e $\beta = \alpha + \theta$. Veja a Figura 1.

Queremos encontrar o valor de x que irá tornar θ um máximo absoluto. Como x está no intervalo $(0, +\infty)$, o valor máximo absoluto de θ será um valor máximo relativo. Vemos, da figura, que

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{2}$$

Como $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

$$\beta = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \alpha = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{x}{2}$$

Substituindo esses valores de α e β na relação $\theta = \beta - \alpha$, obtemos

$$\theta = \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{3} - \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{2}$$

Derivando com relação a x, teremos

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{3}{3^2 + x^2} + \frac{2}{2^2 + x^2}$$

Equacionando $\frac{d\theta}{dx} = 0$, iremos obter

$$\begin{aligned} 2(3^2 + x^2) - 3(2^2 + x^2) &= 0 \\ -x^2 + (18 - 12) &= 0 \\ x^2 &= 6 \\ x &= 2{,}45 \end{aligned}$$

A solução $-2{,}45$ foi rejeitada por não estar no intervalo $(0, +\infty)$. Os resultados do teste da derivada primeira estão na Tabela 1. Como o valor máximo relativo de θ é um valor máximo absoluto, concluímos que o observador deve ficar a aproximadamente 2,45 m da parede.

Tabela 1

	$\frac{d\theta}{dx}$	conclusão
$0 < x < 12$	+	
$x = 12$	0	θ tem um valor máximo relativo
$12 < x < +\infty$	−	

EXERCÍCIOS 8.2

Nos Exercícios de 1 a 26, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}x$
2. $f(x) = \cos^{-1} 3x$
3. $g(x) = \operatorname{tg}^{-1} 2x$
4. $f(x) = \operatorname{cosec}^{-1} 2x$
5. $F(x) = 2\cos^{-1}\sqrt{x}$
6. $g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x^2$
7. $g(t) = \sec^{-1} 5t + \operatorname{cosec}^{-1} 5t$
8. $f(y) = \operatorname{cotg}^{-1} e^y$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2}$
10. $f(w) = 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{w}$
11. $F(x) = \operatorname{cotg}^{-1}\frac{2}{x} + \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2}$
12. $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^{-1} 3x)$
13. $h(y) = y\operatorname{sen}^{-1} 2y$
14. $f(t) = t^2\cos^{-1} t$
15. $g(x) = x^2\sec^{-1}\frac{1}{x}$
16. $g(s) = \cos^{-1} s + \frac{s}{1 - s^2}$
17. $f(x) = \cos^{-1}(\operatorname{sen} x)$
18. $h(x) = \operatorname{tg}^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$
19. $F(x) = \ln(\operatorname{tg}^{-1} x^2)$
20. $F(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2 + 4}$
21. $f(x) = 4\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}x + x\sqrt{4 - x^2}$
22. $f(t) = a\operatorname{sen}^{-1}\frac{t}{a} + \sqrt{a^2 - t^2}$
23. $h(x) = \operatorname{cosec}^{-1}(2e^{3x})$
24. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$
25. $G(x) = x\operatorname{cotg}^{-1} x + \ln\sqrt{1 + x^2}$
26. $f(t) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{t - 1}{t + 1}$

Nos Exercícios de 27 a 30, ache $\frac{dy}{dx}$.

27. $e^{x+y} = \cos^{-1} x$ **28.** $\ln(\text{sen}^2 3x) = e^x + \text{cotg}^{-1} y$

29. $x \text{ sen } y + x^3 = \text{tg}^{-1} y$ **30.** $\text{sen}^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x + y)$

31. Ache as equações das retas tangente e normal ao gráfico da equação $y = \sec^{-1}(2x + 1)$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pi)$.

32. No Exemplo 4, mostre que outra equação que define θ em termos de x é

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{7x}{x^2 + 144}$$

Use essa equação para determinar a que distância da parede o observador deve ficar para conseguir a melhor visão do quadro.

33. Um letreiro com 3 m de altura está colocado em uma parede, sendo que sua base está 2 m acima do nível dos olhos de uma mulher que tenta lê-lo. A que distância da parede ela deve ficar para ter a melhor visão do letreiro, isto é, para que o ângulo sob o qual ela vê o letreiro seja máximo?

34. O Exemplo 4 e o Exercício 33 são casos particulares da seguinte situação genérica: um objeto (como uma pintura ou um letreiro de sinalização) com a m de altura, está colocado em uma parede, de tal forma que sua base esteja a b m do nível dos olhos de um observador. Mostre que o observador terá a melhor visão do objeto quando a distância dele até a parede for $\sqrt{b(a + b)}$ m.

35. Um quadro com 40 cm de altura está colocado numa parede, sendo que sua base está a 30 cm acima do nível dos olhos de um observador. Se o observdor está se aproximando da parede a uma velocidade de 40 cm/s com que velocidade a medida do ângulo de visão da pintura estará variando quando o observador estiver a 1 m da parede?

36. Uma escada com 7 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada for puxada horizontalmente de tal forma que se afaste da parede e que o topo escorregue a uma velocidade de 1 m/s, qual a velocidade com que a medida do ângulo entre a escada e o chão estará variando quando o pé da escada estiver a 4 m da parede?

37. Um foco de luz está a 3 km de uma praia reta. Se o foco gira com velocidade angular de 2 rpm, ache a velocidade com que a luz percorre a praia quando o foco estiver a 2 km do ponto da praia mais próximo da luz.

38. Um homem em um cais está puxando um bote por uma corda a uma velocidade de 1 m/s. As mãos do homem estão 6 m acima do ponto em que a corda está amarrada no bote. Com que velocidade estará variando o ângulo formado entre a corda e a superfície da água quando restarem para ser puxados 16 m de corda?

39. Uma mulher está andando com uma velocidade de 1,5 m/s ao longo de um diâmetro de um pátio circular. Uma luz no extremo de um diâmetro perpendicular a seu caminho projeta sua sombra sobre a parede circular do pátio. Com que velocidade a sombra estará se movendo ao longo da parede quando a distância da mulher ao centro do pátio for $\frac{1}{2}r$? (r m é o raio do pátio)

40. No Exercício 39, qual a distância entre a mulher e o centro do pátio quando a velocidade de sua sombra na parede for de 90 cm/s?

41. Uma corda é amarrada a um peso e passa por um gancho que está 8 m acima do chão. A corda é puxada passando pelo gancho, a uma velocidade de $\frac{3}{4}$ m/s e arrasta o peso pelo chão. Se o comprimento da corda entre o peso e o gancho for de x m quando a medida em radianos do ângulo entre a corda e o chão for θ, ache a variação de θ em relação ao tempo, em termos de x.

42. Use diferenciais para encontrar um valor aproximado de $\text{sen}^{-1} 0{,}52$ com três casas decimais.

43. Resolva o Exemplo 3 da Secção 8.1, mostrando que $\text{sen}^{-1} x$ e $-\cos^{-1} x$ diferem por uma constante e então calcule-a.

44. Resolva o Exercício 54 da série de Exercícios 8.1, mostrando que $\text{tg}^{-1} x$ e $-\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ diferem por uma constante e então calcule-a.

45. Dada: $f(x) = \text{tg}^{-1}(1/x) - \text{cotg}^{-1} x$. (a) Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x no domínio de f. (b) Prove que não existe uma constante C para a qual $f(x) = C$ para todo x em seu domínio. (c) Por que a afirmação da parte (b) não contradiz o Teorema 5.1.2?

8.3 INTEGRAIS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Dos teoremas sobre as derivadas das funções trigonométricas inversas obtemos os teoremas a seguir que dão algumas fórmulas de integração indefinida.

8.3.1 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{sen}^{-1} u + C \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \text{tg}^{-1} u + C \tag{2}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \sec^{-1} u + C \tag{3}$$

A demonstração de cada fórmula é imediata, tomando a derivada do segundo membro. Temos também as fórmulas dadas no próximo teorema.

8.3.2 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0 \tag{4}$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0 \tag{5}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0 \tag{6}$$

Prova Essas fórmulas podem ser demonstradas calculando a derivada do segundo membro e obtendo o integrando. Provamos a fórmula (4).

$$D_u\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} D_u\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{se } a > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad \text{se } a > 0$$

As demonstrações de (5) e (6) serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 38 e 39). ■

As fórmulas do Teorema 8.3.2 também podem ser provadas, com a variação adequada da variável e então, com a aplicação do Teorema 8.3.1 (veja os Exercícios 40-42). Observe que as fórmulas do Teorema 8.3.2 incluem aquelas do Teorema 8.3.1, usando $a = 1$.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sqrt{4 - (3x)^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1} \frac{3x}{2} + C$$

Nos três exemplos a seguir, completamos o quadrado de uma expressão quadrática para indicar o integrando numa forma que nos possibilite usar o Teorema 8.3.2.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x) + 5}$$

Para completar o quadrado de $x^2 - \frac{2}{3}x$ somamos $\frac{1}{9}$ e como $\frac{1}{9}$ deve ser multiplicado por 3, realmente estamos somando $\frac{1}{3}$ ao denominador e assim devemos também subtrair dele $\frac{1}{3}$. Logo, teremos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} &= \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + 5 - \frac{1}{3}} \\
&= \int \frac{dx}{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{9}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{14}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3x - 1}{\sqrt{14}}\right) + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{(2x + 7)\,dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Solução Como $d(x^2 + 2x + 5) = (2x + 2)\,dx$, escrevemos o numerador como $(2x + 2)\,dx + 5\,dx$ e expressamos a integral original como a soma de duas integrais.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2x + 7)\,dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{(2x + 2)\,dx}{x^2 + 2x + 5} + 5\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \\
&= \ln|x^2 + 2x + 5| + 5\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} \\
&= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x + 1}{2} + C
\end{aligned}$$

Nota: $x^2 + 2x + 5 > 0$, para todo x $|x^2 + 2x + 5| = x^2 + 2x + 5$.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{3\,dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$$

Solução

$$\int \frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{(x^2+4x+4)-1}}$$
$$= 3\int \frac{d(x+2)}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$
$$= 3\sec^{-1}(x+2) + C$$

EXEMPLO 5 Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pela curva

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

pelo eixo x, eixo y e pela reta $x = 1$.

Solução A Figura 1 mostra a região e um elemento retangular de área. Se a área da região for A unidades de área,

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\xi_i^2}\,\Delta_i x$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \operatorname{tg}^{-1} x\Big]_0^1$$
$$= \operatorname{tg}^{-1} 1 - \operatorname{tg}^{-1} 0$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi - 0$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi$$

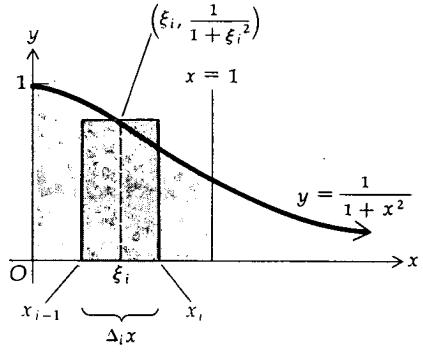


FIGURA 1

EXERCÍCIOS 8.3

Nos Exercícios de 1 a 25, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+25}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+16}$
4. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-16t^2}}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+(x-1)^2}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+(3-x)^2}$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}}$
8. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+16}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$
10. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{x^2-9}}$
11. $\displaystyle\int \frac{r\,dr}{\sqrt{16-9r^4}}$
12. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{16u^2-9}}$
13. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{7+e^{2x}}$
14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
16. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{2s-s^2}}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+3}$
21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$
23. $\displaystyle\int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$
24. $\displaystyle\int \frac{2\,dt}{(t-3)\sqrt{t^2-6t+5}}$
25. $\displaystyle\int \frac{2x^3\,dx}{2x^2-4x+3}$

Nos Exercícios de 26 a 34, calcule a integral definida.

26. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$
29. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-6t-5}}$
30. $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$

31. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ **32.** $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

33. $\int_1^e \frac{dx}{x[1 + (\ln x)^2]}$ **34.** $\int_0^{\pi/6} \frac{\sec^2 x\, dx}{1 + 9\,\mathrm{tg}^2 x}$

35. Ache a área da região limitada pela curva $y = 8/(x^2 + 4)$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 2$.

36. Ache a área da região limitada pelas curvas $x^2 = 4ay$ e $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$.

37. Ache a área da região limitada pelo eixo x, pela curva $y = 1/\sqrt{5 - 4x - x^2}$ e pelas retas $x = -\frac{7}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$.

Nos Exercícios 38 e 39, prove a fórmula dada, mostrando que a derivada do segundo membro é igual ao integrando.

38. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$

39. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C \quad \text{se } a > 0$

Nos Exercícios de 40 a 42, prove a fórmula indicada do Teorema 8.3.2, fazendo uma variação adequada da variável e então usando o Teorema 8.3.1.

40. Fórmula (4) **41.** Fórmula (5) **42.** Fórmula (6)

43. Na Secção 3.10, estabelecemos que uma partícula movendo-se numa reta terá um *movimento harmônico simples* se a medida de sua aceleração for sempre proporcional à medida de seu deslocamento a partir de um ponto fixo sobre a reta e se sua aceleração e deslocamento tiverem sempre sentidos opostos. Logo, se em t s a distância orientada da partícula até a origem for s cm e v cm/s for a velocidade da partícula, então uma equação diferencial para o movimento harmônico simples será

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s \tag{7}$$

onde k^2 é a constante de proporcionalidade e o sinal menos indica que a aceleração tem sentido oposto ao deslocamento. Como $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, segue que $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$. Assim sendo, podemos reescrever (7) como

$$v\frac{dv}{ds} = -k^2 s \tag{8}$$

(a) Resolva (8) para v, obtendo $v = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$. *Nota*: Tome a^2k^2 como a constante de integração que é arbitrária, e justifique essa escolha. (b) Tomando $v = \frac{ds}{dt}$ na solução da parte (a), obtemos a equação diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - s^2} \tag{9}$$

Tomando $t = 0$ no instante em que $v = 0$ (e portanto $s = a$), resolva (9) para obter

$$s = a\cos kt \tag{10}$$

(c) Mostre que o maior valor de $|s|$ é a. O número a é chamado de *amplitude* do movimento. (d) A partícula irá oscilar entre os pontos onde $s = a$ e $s = -a$. Se T s for o tempo necessário para a partícula ir de a até $-a$ e voltar, mostre que $T = 2\pi/k$. O número T é chamado de *período* do movimento.

44. Uma partícula move-se em linha reta de acordo com a equação do movimento $s = 5 - 10\,\mathrm{sen}^2 2t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem no tempo t s. Use o resultado da parte (b) do Exercício 43 para mostrar que o movimento é harmônico simples. Ache a amplitude e o período desse movimento.

45. Prove que o movimento do Exercício 44 é harmônico simples, mostrando que a equação diferencial (7) é satisfeita.

Nos Exercícios de 46 a 48, prove a fórmula, mostrando que a derivada do segundo membro é igual ao integrando.

46. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\cos^{-1} u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (1)? Por quê?

47. $\int \frac{du}{1 + u^2} = -\mathrm{cotg}^{-1} u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (2)? Por quê?

48. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = -\mathrm{cosec}^{-1} u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (3)? Por quê?

8.4 AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Certas combinações de e^x e e^{-x} aparecem tão freqüentemente nas aplicações de Matemática que receberam nomes especiais. Duas delas são as *funções seno* e *co-seno hiperbólicos*. No fim desta secção mostraremos que os valores funcionais delas estão relacionados às coordenadas de pontos sobre uma hipérbole equilátera de uma forma similar àquela em que as funções trigonométricas estão relacionadas com pontos sobre uma circunferência. A seguir temos as definições das funções seno e co-seno hiperbólicos.

8.4.1 DEFINIÇÃO A **função seno hiperbólico** é definida por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

O domínio e a imagem são o conjunto de todos os números reais.

8.4.2 DEFINIÇÃO A **função co-seno hiperbólico** é definida por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

O domínio é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o conjunto de todos os números no intervalo $[1, +\infty)$.

Como

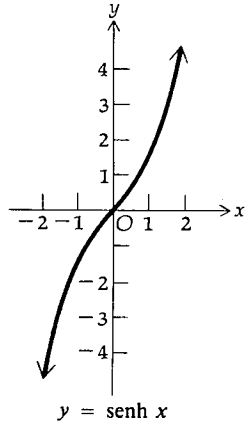
$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

o seno hiperbólico é uma função ímpar e o co-seno hiperbólico é uma função par.

As fórmulas das derivadas das funções seno e co-seno hiperbólicos são obtidas aplicando as Definições 8.4.1 e 8.4.2 e derivando as expressões envolvendo funções exponenciais. Assim

$$D_x(\operatorname{senh} x) = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \qquad D_x(\cosh x) = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.



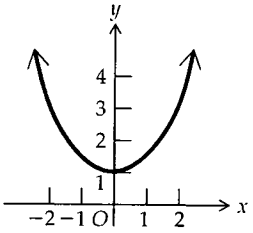
$y = \operatorname{senh} x$

FIGURA 1

8.4.3 TEOREMA Se u for uma função derivável de x,

$$D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u \, D_x u$$

$$D_x(\cosh u) = \operatorname{senh} u \, D_x u$$



$y = \cosh x$

FIGURA 2

Como $D_x(\operatorname{senh} x) > 0$ para todo x, a função seno hiperbólico é crescente em todo o seu domínio. Com essa informação, com o conhecimento de que ela é uma função ímpar e com alguns valores obtidos da tabela de funções hiperbólicas no apêndice, traçamos o gráfico da função seno hiperbólico da Figura 1.

A função co-seno hiperbólico é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ pois $D_x(\cosh x) < 0$ se $x < 0$ e é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ pois $D_x(\cosh x) > 0$ se $x > 0$. Além disso, o co-seno hiperbólico é uma função par. Com estas informações e com alguns valores do $\cosh x$ encontrados com uma calculadora, traçamos o gráfico da função co-seno hiperbólico da Figura 2.

As quatro funções hiperbólicas remanescentes são definidas em termos das funções seno e co-seno hiperbólicos. Observe que elas satisfazem identidades semelhantes àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas.

8.4.4 DEFINIÇÃO As **funções tangente, co-tangente, secante e co-secante hiperbólicas** são definidas da seguinte forma:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \tag{1}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \tag{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \tag{3}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \tag{4}$$

As funções hiperbólicas da Definição 8.4.4 podem ser expressas em termos das funções exponenciais, usando as Definições 8.4.1 e 8.4.2. Temos

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

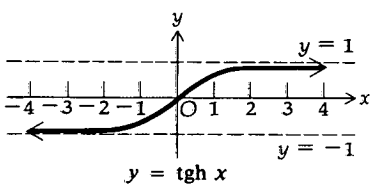


FIGURA 3

Um esboço do gráfico da função tangente hiperbólica está na Figura 3. Note que das Figuras 1, 2 e 3 podemos concluir que essas funções, ao contrário das funções trigonométricas correspondentes, não são periódicas.

Existem identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas que são similares àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas. Quatro delas foram dadas na Definição 8.4.4. As outras quatro identidades fundamentais são as seguintes:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} \tag{5}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{6}$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x \tag{7}$$

$$1 - \operatorname{cotgh}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x \tag{8}$$

A identidade (5) segue imediatamente de (1) e (2). A seguir está a demonstração de (6).

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}) \\ &= 1\end{aligned}$$

A identidade (7) pode ser demonstrada usando as fórmulas de tgh x e sech x em termos de e^x e e^{-x} como na prova acima, ou então uma demonstração al-

ternativa pode ser feita usando outras identidades, como:

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= \operatorname{sech}^2 x$$

A demonstração de (8) será deixada como exercício (veja o Exercício 1). A partir das oito identidades fundamentais, podemos provar outras. Algumas delas estão nos exercícios. Outras identidades, tais como as funções hiperbólicas da soma e da diferença de dois números e as funções hiperbólicas do dobro e da metade de um número, são similares às identidades trigonométricas correspondentes. Às vezes é muito útil o emprego das seguintes relações que decorrem das Definições 8.4.1 e 8.4.2.

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x \tag{9}$$

$$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} \tag{10}$$

Elas são usadas na demonstração da seguinte identidade:

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y \tag{11}$$

Da Definição 8.4.1

$$\operatorname{senh}(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

Aplicando (9) e (10) ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\operatorname{senh}(x + y) = \tfrac{1}{2}[(\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh y + \operatorname{senh} y) - (\cosh x - \operatorname{senh} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)]$$

Efetuando os cálculos do segundo membro da igualdade acima e combinando os termos obteremos a identidade (11).

Da mesma forma podemos provar

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \tag{12}$$

Se em (11) e (12) y for substituído por x, iremos obter as fórmulas

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \tag{13}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x \tag{14}$$

A fórmula (14), combinada com a identidade (6), dá duas fórmulas alternativas para $\cosh 2x$, que são

$$\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1 \tag{15}$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 \tag{16}$$

Resolvendo (15) e (16) em senh x e cosh x, respectivamente, e substituindo x por $\frac{1}{2}x$, iremos obter

$$\operatorname{senh}\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \tag{18}$$

Não temos um símbolo $\pm$ no segundo membro de (18) pois a imagem da função co-seno hiperbólico é $[1, +\infty)$. Os detalhes das demonstrações de (12) até (18) serão deixados como exercícios (veja os Exercícios 2, 4 e 5).

Para encontrar a derivada da função tangente hiperbólica usamos algumas das identidades.

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tgh} x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right) \\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

As fórmulas de derivação das funções hiperbólicas remanescentes são as seguintes: $D_x(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$; $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$; $D_x(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$. As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 15 e 16).

Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

8.4.5 TEOREMA

Se u for uma função de x derivável,

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tgh} u) &= \operatorname{sech}^2 u D_x u \\ D_x(\operatorname{cotgh} u) &= -\operatorname{cosech}^2 u D_x u \\ D_x(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u D_x u \\ D_x(\operatorname{cosech} u) &= -\operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u D_x u \end{aligned}$$

Observe que todas as fórmulas das derivadas das funções hiperbólicas seno, co-seno e tangente têm um sinal mais, enquanto que as derivadas da co-tangente, secante e co-secante hiperbólicas todas têm um sinal menos. Esta é a única diferença entre as fórmulas de derivação das funções hiperbólicas e trigonométricas.

EXEMPLO 1 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ sendo

$$y = \operatorname{tgh}(1 - x^2)$$

Solução

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 (1 - x^2) \cdot D_x(1 - x^2)$$
$$= -2x \operatorname{sech}^2 (1 - x^2)$$

EXEMPLO 2 Ache $f'(x)$ sendo

$$f(x) = \ln \operatorname{senh} x$$

Solução

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \cdot \cosh x$$
$$= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$
$$= \operatorname{cotgh} x$$

As fórmulas de integração indefinida do próximo teorema decorrem das fórmulas de derivação dos Teoremas 8.4.3 e 8.4.5.

8.4.6 TEOREMA

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$
$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$
$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$$
$$\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$$
$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = \operatorname{cosech} u + C$$

Os métodos usados para integrar as funções hiperbólicas são similares àqueles usados para funções trigonométricas. Os exemplos a seguir ilustram o método.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x \, dx$$

Solução

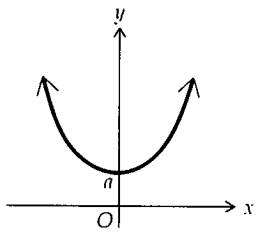
$$\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x \, dx = \int \cosh^2 x \, (\operatorname{senh} x \, dx)$$
$$= \tfrac{1}{3}\cosh^3 x + C$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \, dx \\ &= \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x \, dx \\ &= x - \operatorname{tgh} x + C\end{aligned}$$



$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad a > 0$

FIGURA 4

Catenária é a curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso. Alguns cabos de suspensão de pontes e fios de telefone presos a dois postes apresentam essa forma. Se o ponto mais baixo da catenária for $(0, a)$, podemos mostrar que a equação dela é

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad a > 0 \tag{19}$$

Um esboço da catenária está na Figura 4.

EXEMPLO 5 Ache o comprimento do arco da catenária definida por (19) entre os pontos $(0, a)$ e (x_1, y_1), onde $x_1 > 0$.

Solução Se

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{então} \quad f'(x) = a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Do Teorema 6.3.3, se o comprimento do arco dado for L unidades,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} \, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} \, dx \qquad \text{(de (6))} \\ &= \int_0^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \qquad \left(\text{pois } \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \geqslant 1\right) \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\Big]_0^{x_1} \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right) - a \operatorname{senh} 0 \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right)\end{aligned}$$

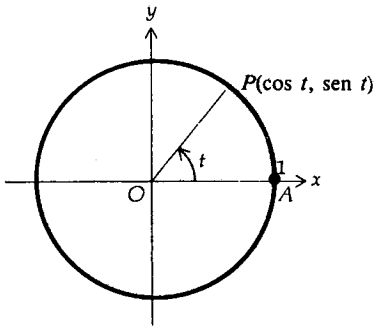


FIGURA 5

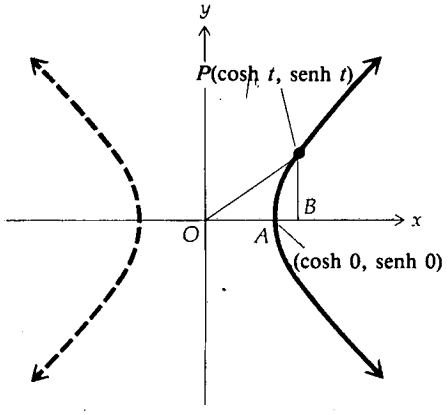


FIGURA 6

Na Secção 1.6 as funções seno e co-seno foram definidas como as coordenadas de um ponto na circunferência de círculo unitário

$$x^2 + y^2 = 1$$

Lembre-se da Definição 1.6.2 que se t for a medida em radianos do ângulo entre o eixo x e a reta que passa pela origem e pelo ponto $D(x, y)$ na circunferência de círculo unitário então

$$\text{sen } t = y \qquad \cos t = x$$

Veja a Figura 5. Substituindo os valores de x e y na equação da circunferência de círculo unitário, iremos obter a identidade

$$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

Na Secção 10.3 será mostrado que a curva

$$x^2 - y^2 = 1$$

é uma hipérbole equilátera, chamada de hipérbole unitária. Veja a Figura 6. Se t for um número real qualquer, então o ponto (cosh t, senh t) estará sobre essa hipérbole pois

$$\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$$

Observe que como cosh t nunca é menor do que 1, todos os pontos (cosh t, senh t) estão no ramo direito da hipérbole.

Vamos mostrar agora como as áreas sombreadas das Figuras 5 e 6 estão relacionadas. Como a área de um setor circular de raio r unidades e ângulo central com medida t rad é dada por $\frac{1}{2}r^2t$ unidades de área, a área do setor circular da Figura 5 será $\frac{1}{2}t$ unidades de área, pois $r = 1$. O setor AOP da Figura 6 é a região limitada pelo eixo x, pela reta OP e pelo arco AP da hipérbole unitária. Se A_1 unidades de área for a área do setor AOP, A_2 unidades de área for a área do triângulo OBP e A_3 unidades de área for a área da região ABP, teremos:

$$A_1 = A_2 - A_3 \tag{20}$$

Da fórmula para determinar a área do triângulo obtemos

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t \tag{21}$$

Vamos encontrar A_3 por integração:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^t \text{senh } u \, d(\cosh u) \\ &= \int_0^t \text{senh}^2 u \, du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t (\cosh 2u - 1)\, du \\ &= \tfrac{1}{4}\text{ senh } 2u - \tfrac{1}{2}u\Big]_0^t \end{aligned}$$

Logo,

$$A_3 = \tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t - \tfrac{1}{2}t$$

Substituindo essa igualdade e (21) em (20), teremos

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t - (\tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t - \tfrac{1}{2}t) \\ &= \tfrac{1}{2}t \end{aligned}$$

Assim sendo, tanto o número de unidades de área da área do setor circular AOP da Figura 5 quanto o número de unidades de área da área do setor AOP da Figura 6 são, em cada caso, a metade do valor do parâmetro associado ao ponto P. Para a circunferência de círculo unitário, o parâmetro t é a medida em radianos do ângulo AOP. Para a hipérbole unitária, t não é interpretado como a medida de um ângulo; entretanto, algumas vezes o termo *radiano hiperbólico* é usado para t.

Mostramos que os valores funcionais de sen h e cos h têm a mesma relação com a hipérbole unitária que os valores funcionais de seno e co-seno têm com a circunferência de círculo unitário. Assim, como seno e co-seno são chamados de *funções circulares*, senh e cosh são chamados de funções hiperbólicas.

EXERCÍCIOS 8.4

Nos Exercícios de 1 a 10, prove a identidade.

1. $1 - \operatorname{cotgh}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$
2. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
3. $\operatorname{tgh}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$
4. (a) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$; (b) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$;
   (c) $\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$; (d) $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$
5. (a) $\cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$;
   (b) $\operatorname{senh} \frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$
6. $\operatorname{cosech} 2x = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x$
7. (a) $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$; (b) $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$
8. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$
9. $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$
10. $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}(x + y) \operatorname{senh}(x - y)$
11. Prove: $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$, se n for inteiro positivo. (*Sugestão*: use a fórmula (9).)
12. Prove que a função tangente hiperbólica é ímpar e que a função secante hiperbólica é par.
13. Prove: $\operatorname{tgh}(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
14. Prove: $\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x} = e^{2x}$
15. Prove: (a) $D_x(\operatorname{senh} x) = \cosh x$; (b) $D_x(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$.
16. Prove: (a) $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$;
   (b) $D_x(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$.

Nos Exercícios de 17 a 30, ache a derivada da função dada.

17. $f(x) = \operatorname{tgh} \dfrac{4x + 1}{5}$
18. $g(t) = \cosh t^3$
19. $f(y) = \operatorname{senh} e^{2y}$
20. $f(x) = \operatorname{cotgh}(\ln x)$
21. $f(w) = \operatorname{sech}^2 4w$
22. $g(x) = \ln(\operatorname{senh} x^3)$
23. $f(x) = e^x \cosh x$
24. $h(x) = \operatorname{cotgh} \dfrac{1}{x}$
25. $h(t) = \ln(\operatorname{tgh} t)$
26. $F(x) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x^2)$
27. $G(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x^2)$
28. $f(x) = \ln(\operatorname{cotgh} 3x - \operatorname{cosech} 3x)$
29. $f(x) = x^{\operatorname{senh} x}$; $x > 0$
30. $g(x) = (\cosh x)^x$
31. Prove: (a) $\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln|\cosh u| + C$;
   (b) $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$.
32. Prove: $\int \operatorname{sech} u \, du = 2 \operatorname{tg}^{-1} e^u + C$.
33. Prove: $\int \operatorname{cosech} u \, du = \ln|\operatorname{tgh} \frac{1}{2}u| + C$.

Nos Exercícios de 34 a 43, calcule a integral indefinida.

34. $\int \operatorname{senh}^4 x \cosh x \, dx$
35. $\int e^t \cosh(e^t) \operatorname{senh}(e^t) \, dt$
36. $\int e^x \operatorname{cosech}^2 e^x \, dx$
37. $\int \dfrac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
38. $\int x \operatorname{sech}^2 x^2 \, dx$
39. $\int \operatorname{cotgh}^2 3x \, dx$
40. $\int \operatorname{sech}^3 x \operatorname{tg} \operatorname{h} x \, dx$
41. $\int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tgh}^5 x \, dx$
42. $\int \dfrac{e^{\cosh t}}{\operatorname{cosech} t} \, dt$
43. $\int \operatorname{tgh} x \ln(\cosh x) \, dx$

Nos Exercícios de 44 a 47, calcule a integral definida.

44. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{tgh} z \, dz$
45. $\int_0^{\ln 3} \operatorname{sech}^2 t \, dt$
46. $\int_{-1}^{1} (\cosh x - \operatorname{senh} x) \, dx$
47. $\int_0^2 \operatorname{senh}^3 x \cosh x \, dx$
48. Faça um esboço do gráfico da função co-tangente hiperbólica. Ache as equações das assíntotas.
49. Faça um esboço do gráfico da função secante hiperbólica. Ache os extremos relativos da função, os pontos de inflexão do gráfico, os intervalos nos quais o gráfico é côncavo para cima e para baixo.
50. Prove que a catenária é côncava para cima em todo ponto.
51. Ache a área da região limitada pela catenária do Exemplo 5, pelo eixo y, pelo eixo x e pela reta $x = x_1$ onde $x_1 > 0$.
52. Ache o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região do Exercício 51 em torno do eixo x.

53. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta, de acordo com a equação de movimento $s = e^{-ct/2}(A \operatorname{senh} t + B \cosh t)$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem a velocidade e a aceleração, respectivamente, da partícula em t s, ache v e a. Mostre também que a é a soma de dois números, um dos quais é proporcional a s e o outro proporcional a v.

54. Prove que a função seno hiperbólico é contínua e crescente em todo o seu domínio.

55. Prove que a função tangente hiperbólica é contínua e crescente em todo o seu domínio.

56. Prove que a função co-seno hiperbólico é contínua em todo o seu domínio, mas não é monótona. Ache os intevalos nos quais a função é crescente e onde é decrescente.

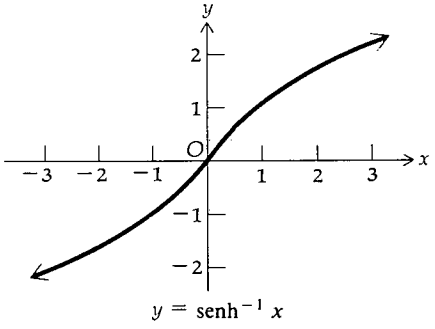
8.5 AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS *(Suplementar)*

Do gráfico da função seno hiperbólico (Figura 1 da Secção 8.4) vemos que uma reta horizontal intercepta o gráfico em um e somente um ponto; logo, a função seno hiperbólico é biunívoca. Além disso, a função seno hiperbólico é contínua e crescente em seu domínio (veja o Exercício 54 nos Exercícios 8.4). Logo, pelo Teorema 7.1.5, a função tem uma inversa.

8.5.1 DEFINIÇÃO

A função inversa do seno hiperbólico, denotada por $\operatorname{senh}^{-1} x$, é definida da seguinte forma:

$y = \operatorname{senh}^{-1} x$ se e somente se $x = \operatorname{senh} y$



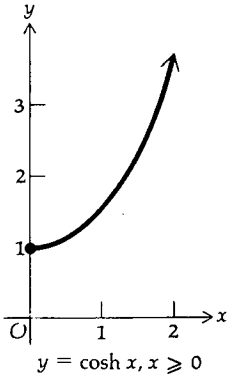
$y = \operatorname{senh}^{-1} x$

FIGURA 1

Um esboço do gráfico da função inversa do seno hiperbólico está na Figura 1. Seu domínio é o conjunto R de todos os números reais e sua imagem é também o conjunto R.

Segue, da Definição 8.5.1, que

$$\operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1} x) = x \text{ e } \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{senh} y) = y$$



$y = \cosh x, x \geqslant 0$

FIGURA 2

Da Figura 2 na Secção 8.4 observamos que uma rea horizontal $y = k$, onde $k > 1$, intercepta o gráfico da função co-seno hiperbólico em dois pontos. Logo, para cada número maior do que 1 na imagem dessa função correspondem dois números em seu domínio. Assim, a função co-seno hiperbólico não é biunívoca e não possui uma inversa. Entretanto, definimos uma função F da seguinte maneira:

$$F(x) = \cosh x \text{ para } x \geqslant 0$$

O domínio de F é o intervalo $[0, +\infty)$ e a imagem de F é o intervalo $[1, +\infty)$. Um esboço do gráfico de F está na Figura 2. A função F é contínua e crescente em seu domínio, assim sendo, pelo Teorema 7.1.5 F tem uma inversa a qual chamaremos de *função inversa do co-seno hiperbólico*.

8.5.2 DEFINIÇÃO **A função inversa do co-seno hiperbólico**, denotada por $\cosh^{-1}$, é definida da seguinte maneira:

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \cosh y \text{ e } y \geqslant 0$$

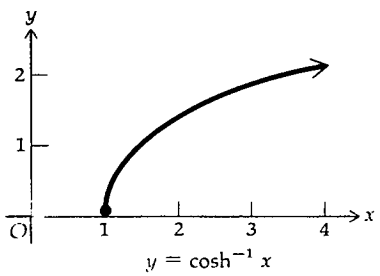


FIGURA 3

Um esboço do gráfico da função inversa do co-seno hiperbólico está na Figura 3. O domínio dessa função é o intervalo $[1, +\infty)$, e a imagem é o intervalo $[0, +\infty)$. Da Definição 8.5.2,

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x \qquad \text{se } x \geqslant 1$$

e

$$\cosh^{-1}(\cosh y) = y \qquad \text{se } y \geqslant 0$$

Da mesma forma que ocorria com a função seno hiperbólico, uma reta horizontal intercepta os gráficos das funções tangente, co-tangente e co-secante hiperbólicas em um único ponto. No caso da função tangente hiperbólica, isto pode ser visto na Figura da Secção 8.4.3. Cada uma dessas funções é, portanto, biunívoca e, além disso, elas são contínuas e monótonas em seu domínio. Dessa forma, cada uma tem uma função inversa.

8.5.3 DEFINIÇÃO **A função inversa da tangente hiperbólica**, a **função inversa da co-tangente hiperbólica** e a **função inversa da co-secante hiperbólica**, denotadas respectivamente por tgh^{-1}, cotgh^{-1} e cosech^{-1}, são definidas da seguinte forma:

$$y = \text{tgh}^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \text{tgh } y$$

$$y = \text{cotgh}^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \text{cotgh } y$$

$$y = \text{cosech}^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \text{cosech } y$$

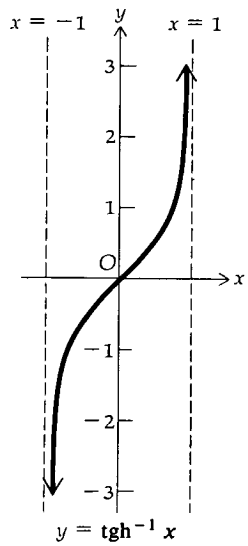


FIGURA 4

Um esboço do gráfico da função inversa da tangente hiperbólica está na Figura 4.

Como $\text{sech } x = 1/\cosh x$ e a função co-seno hiperbólico não é biunívoca, segue que a função secante hiperbólica não é biunívoca. Logo, ela não tem uma inversa. Entretanto, procedendo da mesma forma que fizemos com a função co-seno hiperbólico, vamos definir uma nova função que tenha inversa. Seja G a função definida por

$$G(x) = \text{sech } x \qquad \text{para } x \geqslant 0$$

Podemos mostrar que G é contínua e monótona em seu domínio, logo, G tem uma inversa, que é chamada de *função inversa da secante hiperbólica.*

8.5.4 DEFINIÇÃO **A função inversa da secante hiperbólica**, denotada por sech^{-1}, é definida da seguinte maneira:

$$y = \text{sech}^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \text{sech } y \text{ e } y \geqslant 0$$

As funções inversas hiperbólicas podem ser expressas em termos de logaritmos naturais. Isso não surpreende, pois as funções hiperbólicas são definidas em termos da função exponencial e a função logaritmo natural é a inversa da função exponencial.

A seguir estão estas expressões para senh^{-1}, $\cosh^{-1}$, tgh^{-1} e $\operatorname{cotgh}^{-1}$

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad x \text{ um número real qualquer} \tag{1}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geqslant 1 \tag{2}$$

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} \qquad |x| < 1 \tag{3}$$

$$\operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1} \qquad |x| > 1 \tag{4}$$

Vamos provar (2) e deixar a demonstração das demais fórmulas como exercícios (veja os Exercícios de 1 a 3).

Para provar (a), seja $y = \cosh^{-1} x$, $x \geqslant 1$. Então, da Definição 8.5.2, temos que $x = \cosh y$, $y \geqslant 0$. Aplicando a Definição 8.4.2 para $\cosh y$ teremos

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad y \geqslant 0$$

do que obtemos

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \qquad y \geqslant 0$$

Resolvendo essa equação para e^y, teremos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 - 1} \qquad y \geqslant 0 \tag{5}$$

Sabemos que $y \geqslant 0$ e $x \geqslant 1$. Logo $e^y \geqslant 1$. Quando $x = 1$, $x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$ e $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1$. Além disso, quando $x > 1$, temos $0 < x - 1 < x + 1$; assim $\sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}$. Logo,

$$\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 1} < \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$$

resultando $x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}$. Logo, quando $x > 1$, $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$. Conseqüentemente, podemos desconsiderar o sinal negativo em (5). Como $y = \cosh^{-1} x$, temos

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geqslant 1$$

que é (2).

EXEMPLO 1 Expresse em termos de logaritmo natural cada um dos valores funcionais dados. (a) $\operatorname{senh}^{-1} 2$; (b) $\operatorname{tgh}^{-1}(-\frac{4}{5})$.

Solução

(a) De (1),

$$\operatorname{senh}^{-1} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

(b) De (3),

$$\operatorname{tgh}^{-1}(-\tfrac{4}{5}) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 3^{-2}$$

$$= -\ln 3$$

Para obter a fórmula da derivada da função inversa do seno hiperbólico, seja $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, e então $x = \operatorname{senh} y$. Assim, como $\frac{dx}{dy} = \cosh y$ e $\frac{dy}{dx}$ é o recíproco de $\frac{dx}{dy}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \tag{6}$$

Da identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ obtemos $\cosh y = \sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}$, onde, ao tomarmos a raiz quadrada, desconsideramos o sinal negativo pois $\cosh y \geqslant 1$. Logo, como $x = \operatorname{senh} y$, $\cosh y = \sqrt{x^2 + 1}$. Substituindo esse valor de $\cosh y$ em (6), obtemos

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Essa fórmula também pode ser obtida a partir de (1), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) &= D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

As fórmulas para as derivadas das outras cinco funções hiperbólicas inversas são obtidas de forma análoga à que foi empregada para a derivada da função inversa do seno hiperbólico. Serão propostos exercícios para a sua obtenção (veja os Exercícios de 4 até 8). Dessas fórmulas e da regra da cadeia segue o próximo teorema.

8.5.5 TEOREMA Se u for uma função de x derivável,

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u \tag{7}$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u \qquad u > 1 \tag{8}$$

$$D_x(\operatorname{tgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| < 1 \tag{9}$$

$$D_x(\operatorname{cotgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| > 1 \tag{10}$$

$$D_x(\operatorname{sech}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{1 - u^2}} D_x u \qquad 0 < u < 1 \tag{11}$$

$$D_x(\operatorname{cosech}^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} D_x u \qquad u \neq 0 \tag{12}$$

EXEMPLO 2 Ache $f'(x)$ sendo

$$f(x) = \text{tgh}^{-1}(\cos 2x)$$

Solução De (9)

$$f'(x) = \frac{1}{1 - \cos^2 2x}(-2 \operatorname{sen} 2x)$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

$$= \frac{-2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$= -2 \operatorname{cosec} 2x$$

EXEMPLO 3 Comprove que $D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) = \cosh^{-1} x$.

Solução

$$D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) = \cosh^{-1} x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \cosh^{-1} x$$

A principal aplicação das funções hiperbólicas inversas é na integração. Tal tópico será objeto da Secção Suplementar 9.8.

EXERCÍCIOS 8.5.

Nos Exercícios de 1 a 8, prove a fórmula indicada desta Secção.

1. Fórmula (1) **2.** Fórmula (3) **3.** Fórmula (4)
4. Fórmula (8) **5.** Fórmula (9) **6.** Fórmula (10)
7. Fórmula (11) **8.** Fórmula (12)

Nos Exercícios de 9 a 10, expresse a quantidade dada em termos do logaritmo natural.

9. (a) $\text{senh}^{-1} \frac{1}{4}$; (b) $\text{tgh}^{-1} \frac{1}{2}$

10. (a) $\cosh^{-1} 3$; (b) $\text{cotgh}^{-1}(-2)$

Nos Exercícios de 11 a 28, encontre a derivada da função dada.

11. $f(x) = \text{senh}^{-1} x^2$ **12.** $G(x) = \cosh^{-1} \frac{1}{3}x$
13. $F(x) = \text{tgh}^{-1} 4x$ **14.** $h(w) = \text{tgh}^{-1} w^3$
15. $a(x) = \text{cotgh}^{-1}(3x + 1)$ **16.** $f(r) = \text{cosech}^{-1} \frac{1}{2}r^2$
17. $f(x) = x^2 \cosh^{-1} x^2$ **18.** $h(x) = (\text{sech}^{-1} x)^2$
19. $f(x) = \text{senh}^{-1}(\text{tg } x)$ **20.** $g(x) = \text{tgh}^{-1}(\text{sen } 3x)$
21. $h(x) = \cosh^{-1}(\text{cosec } x)$ **22.** $F(x) = \text{cotgh}^{-1}(\cosh x)$
23. $f(z) = (\text{cotgh}^{-1} z^2)^3$ **24.** $f(t) = \text{senh}^{-1} e^{2t}$
25. $g(x) = \text{tgh}^{-1}(\cos e^x)$ **26.** $h(x) = \cosh^{-1}(\ln x)$
27. $G(x) = x \text{ senh}^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$
28. $H(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1} - x \text{ tgh}^{-1} x$

Nos Exercícios de 29 a 31, faça um esboço do gráfico da função indicada.

29. A função inversa da co-tangente hiperbólica.
30. A função inversa da secante hiperbólica.
31. A função inversa da co-secante hiperbólica.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8

1. Dado $x = \text{sen}^{-1} \frac{3}{5}$ e $y = \cos^{-1}(-\frac{4}{5})$, ache o valor exato de cada uma das seguintes funções: (a) cos x; (b) sen y; (c) tg x; (d) tg y.

2. Dado $x = \cos^{-1} \frac{7}{25}$ e $y = \text{tg}^{-1}(-\frac{7}{24})$, ache o valor exato de cada uma das seguintes funções: (a) sen x; (b) sen y; (c) cos y; (d) tg x.

Nos exercícios 3 e 4 ache o valor exato da quantidade dada.

3. (a) $\text{sen}[2 \cos^{-1}(-\frac{12}{13})]$;
(b) $\text{tg}[\cos^{-1} \frac{3}{5} + \text{sen}^{-1}(-\frac{7}{25})]$

4. (a) $\text{tg}[2 \text{ sen}^{-1}(-\frac{24}{25})]$;
(b) $\cos[\text{tg}^{-1} \frac{4}{3} - \text{sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

Nos Exercícios de 5 a 16, ache a derivada da função dada.

5. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} 2^x$ **6.** $g(x) = x^2 \operatorname{sen}^{-1} 2x$

7. $F(x) = \operatorname{senh}^3 2x$ **8.** $h(x) = e^x(\cosh x + \operatorname{senh} x)$

9. $f(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2+1}$ **10.** $G(w) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{w-3}{3w+1}\right)$

11. $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh}\sqrt{x})$ **12.** $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{tg} 3x)$

13. $h(x) = \operatorname{cosech}^2 e^{2x}$ **14.** $g(x) = \cos^{-1}(\operatorname{tgh} 2x)$

15. $f(x) = (\cosh x)^{1/x}$ **16.** $f(x) = \sec^{-1}(\cosh x)$

Nos Exercícios 17 e 18, faça um esboço do gráfico da função dada.

17. $f(x) = 2 \operatorname{tgh} \frac{1}{2}x$ **18.** $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} 3x$

Nos Exercícios 19 e 20 ache dy/dx por derivação implícita.

19. $\operatorname{cotg}^{-1}\dfrac{x^2}{3y} + xy^2 = 0$ **20.** $\operatorname{tg}^{-1}(x+3y) = \ln y$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral indefinida.

21. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ **22.** $\displaystyle\int x \operatorname{cotgh} \tfrac{1}{2}x^2\,dx$

23. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^2 3x\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7+5x-2x^2}}$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{2t^2+3t+5}$ **26.** $\displaystyle\int \frac{dy}{9e^y + e^{-y}}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-8}}$ **28.** $\displaystyle\int \frac{\cosh t\,dt}{\sqrt{\operatorname{senh} t}}$

Nos Exercícios de 29 a 32, calcule a integral definida.

29. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(t+2)\,dt}{\sqrt{4t-t^2}}$ **30.** $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\cosh y}\,dy$ **32.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+2x+5}$

33. Num circuito elétrico, a força eletromotriz é x volts em t s, onde $E = 20 \cos 120\pi t$. (a) Resolva a equação em t. Use a equação da parte (a) para achar o menor valor positivo de t para o qual a força eletromotriz é (b) 10 volts; (c) 5 volts (d) -10 volts; (e) -5 volts.

34. Um peso é suspenso por uma mola e vibra verticalmente de acordo com a equação $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi(t + \frac{1}{6})$, onde y cm é a distância orientada do peso, a partir de sua posição de equilíbrio t s após começar o movimento e a direção positiva é para cima. (a) Resolva a equação em t. Use a equação da parte (a) para determinar o menor valor positivo de t para o qual o deslocamento do peso em relação à sua posição de equilíbrio é (b) 2 cm e (c) 3 cm.

35. Mostre que $\cosh(\ln x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$

36. Prove: (a) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{cotgh} x = 1$; (b) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{cosech} x = 0$.

37. Ache a área da região limitada pela curva $y = 9/\sqrt{9-x^2}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 2\sqrt{2}$.

38. Ache o comprimento da catenária $y = \cosh x$ de $(\ln 2, \frac{5}{4})$ até $(\ln 3, \frac{5}{3})$.

39. Ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sqrt{\operatorname{senh} x}$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = \ln 2$, em torno do eixo x.

40. A *gudermaniana*, assim chamada em homenagem ao matemático alemão Christoph Gudermann (1798-1852), é a função definida por $\operatorname{gd} x = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x)$. Mostre que $D_x(\operatorname{gd} x) = \operatorname{sech} x$.

41. Um holofote está a $\frac{1}{2}$ km de uma estrada reta e mantém sua luz focalizada em um automóvel que está viajando a uma velocidade escalar constante de 60 km/h. Ache a taxa segundo a qual o feixe de luz está mudando de direção (a) quando o carro está no ponto da estrada mais perto do holofote e (b) quando o carro está a $\frac{1}{2}$ km desse ponto.

42. Um quadro com 150 cm é colocado numa parede com sua base a 210 cm do nível dos olhos de um observador. Se o observador está se aproximando da parede com uma velocidade de 90 cm/s, com que velocidade a medida do ângulo segundo o qual o observador vê o quadro estará variando quando o observador estiver a 3 m da parede?

43. Um avião está voando a uma velocidade de 300 km/h, a uma altitude de 4 km. Se um observador está no chão, ache a taxa de variação no tempo da medida do ângulo de elevação do avião em relação ao observador, quando ele está sobre um ponto do solo a 2 km do observador.

44. Um helicóptero deixa o solo num ponto a 250 m de um observador e sobe verticalmente a 7,5 m/s. Ache a taxa de variação no tempo da medida do ângulo de elevação do helicóptero quando ele estiver a 180 m do solo.

45. Dois pontos, A e B, são diametralmente opostos nas praias de um lago circular com 1 km de diâmetro. Uma pessoa deseja ir do ponto A ao ponto B. Ela pode remar a uma velocidade de $1\frac{1}{2}$ km/h e andar a uma velocidade de 5 km/h. Ache qual o menor tempo gasto para ir de A até B.

46. Resolva o Exercício 45 caso a pessoa possa remar e andar com as velocidades de 2 e 4 km/h, respectivamente.

Os Exercícios de 47 a 55 pertencem à Secção Supementar 8.5. Nos Exercícios 47 e 48, expresse as quantidades dadas em termos do logaritmo natural.

47. $\cosh^{-1} 2$ **48.** $\operatorname{tgh}^{-1} \frac{1}{4}$

Nos Exercícios de 49 a 52, ache a derivada da função dada.

49. $h(w) = w^2 \operatorname{senh}^{-1} 2w$

50. $f(x) = \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{sen}\sqrt{x})$

51. $f(x) = \operatorname{sech}^{-1} e^{-2x}$

52. $g(t) = \cosh^{-1}\sqrt{t^2+1}$

53. O gráfico da equação

$$x = a \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

é chamado de *tratroz*. Prove que a inclinação da curva em qualquer ponto (x, y) é $-y/\sqrt{a^2-y^2}$.

NOVE

O valor exato de uma integral definida pode ser calculado pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, contanto que uma antiderivada (ou integral indefinida) do integrando possa ser encontrada. Alguns métodos para avaliar integrais indefinidas já foram dados, e outros serão apresentados neste capítulo.

Na Secção 9.1, discutimos as técnicas de integração amplamente usadas, chamadas de *integração por partes*, baseadas na fórmula para a derivada de um produto. As duas secções seguintes dizem respeito às integrais de potências das funções trigonométricas. Integrandos envolvendo potências do seno e do coseno aparecem na Secção 9.2 e aqueles contendo potências das outras quatro funções trigonométricas aparecem na Secção 9.3. Substituições trigonométricas são aplicadas na Secção 9.4 para simplificar integrandos envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$,

$\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$. As frações parciais são usadas para integrar funções racionais nas Secções 9.5 e 9.6. Mais substituições para avaliar integrais indefinidas são dadas na Secção 9.7. Os integrandos naquela secção envolvem potências fracionárias de uma variável ou são potências racionais do seno e do coseno. Na Secção Suplementar 9.8 as funções hiperbólicas inversas são aplicadas na integração para dar novas formas de resultados obtidos anteriormente através de outros métodos.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Uma pequena tabela de integrais pode ser encontrada ao final deste volume e a Secção A.1 no apêndice dá instruções de como usá-la. Algumas vezes é necessário empregar técnicas de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela. Assim sendo, você deverá adquirir a capacidade de reconhecer qual a técnica a ser empregada numa dada integral. Além disso, é importante desenvolver habilidades de cálculo em todos os ramos da Matemática e os exercícios deste capítulo são uma boa oportunidade de treino. Por essas razões aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral definida através do cálculo de uma integral indefinida. Isto é, podemos ter uma integral definida que exista, mas o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Um exemplo de tal integral definida é

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\, dt$$

Uma calculadora programável ou um computador utilizando os métodos numéricos discutidos na Secção 5.10 podem ser usados para aproximar o valor dessa integral definida. Outro procedimento é dado no Exemplo 2 da Secção 13.3, onde uma série infinita é usada.

As fórmulas de integração indefinida que foram dadas nos capítulos anteriores e que são usadas com maior freqüência são dadas abaixo e foram numeradas para referências posteriores.

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\, du = au + C$ onde a é uma constante qualquer

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$

4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ onde $a > 0$ e $a \neq 1$

7. $\int e^u\, du = e^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$
13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$
14. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$
15. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
16. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$
17. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$
21. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$
22. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$
23. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$
24. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$
25. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$
26. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

9.1 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil chamado *integração por partes*. Se f e g forem funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, iremos obter

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int D_x[f(x)g(x)]\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx} \tag{1}$$

Chamaremos (1) de **fórmula de integração por partes**. Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \quad \text{e} \quad v = g(x)$$

Então

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

assim sendo, (1) torna-se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int u\,dv$ em termos de uma outra integral, $\int v\,du$. Escolhendo adequadamente u e dv, pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira. Quando escolhemos as substituições para u e dv, em geral pretendemos que dv seja o fator do integrando mais complicado que se possa integrar diretamente, e que u seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples. A seguir estão exemplos e ilustrações mostrando o método.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos calcular

$$\int x \ln x\,dx$$

Para determinar quais as substituições para u e dv, devemos ter em mente que para encontrar v precisamos saber integrar dv. Isso sugere que $dv = x\,dx$ e $u = \ln x$. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{e} \quad du = \frac{dx}{x}$$

Da fórmula (2)

$$\begin{aligned}\int x \ln x\,dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx - C_1\int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2 \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2\end{aligned}$$

◀

Na Ilustração 1, observe que a primeira constante de integração C_1 não aparece na resposta final. C_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln x\,dx$. Essa situação vale em geral e provamos isso da seguinte forma: escrevendo $v + C_1$ na fórmula (2), teremos

$$\begin{aligned}\int u\,dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du \\ &= uv + C_1 u - \int v\,du - C_1\int du \\ &= uv + C_1 u - \int v\,du - C_1 u \\ &= uv - \int v\,du\end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrever C_1 quando calcularmos v a partir de dv.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A resposta na Ilustração 1 pode ser escrita como

$\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

Verificamos esse resultado calculando a derivada de um produto.

$$D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}x + x\ln x - \tfrac{1}{2}x$$
$$= x\ln x$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para calcular

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

usamos integração por partes com $dv = xe^{x^2}\,dx$ e $u = x^2$. Então

$v = \frac{1}{2}e^{x^2}$ e $du = 2x\,dx$

Da fórmula (2)

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = x^2(\tfrac{1}{2}e^{x^2}) - \int (\tfrac{1}{2}e^{x^2})2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int x\cos x\,dx$$

Solução Seja $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$. Então

$du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$

Assim

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx$$
$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 1, se em vez de nossas escolhas de u e dv conforme está acima, tivéssemos tomado

$u = \cos x$ e $dv = x\,dx$

então

$du = -\operatorname{sen} x\,dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$

Assim

$$\int x\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

A integral do segundo membro é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente, indicando assim que as escolhas feitas para u e dv não são boas. ◀

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes. Isso está ilustrado no exemplo abaixo.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Solução Seja $u = x^2$ e $dv = e^x \, dx$. Então

$$du = 2x \, dx \quad \text{e} \quad v = e^x$$

Temos, então,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Vamos aplicar a integração por partes ao segundo membro. Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = e^x \, dx$. Então,

$$d\bar{u} = dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + \bar{C} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + \bar{C}) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \qquad \text{onde } C = -2\bar{C} \end{aligned}$$

A integração por partes é freqüentemente usada quando o integrando envolve logaritmos, funções trigonométricas inversas e produtos de funções.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$$

Solução Seja $u = \operatorname{tg}^{-1} x$ e $dv = dx$. Então

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \text{e} \quad v = x$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1 + x^2} \\ &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \tfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \end{aligned}$$

Uma situação que ocorre às vezes quando estamos usando integração por partes é mostrada no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solução Seja $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Então

$$du = e^x \, dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x$$

Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de sen x temos cos x. Aplicamos a integração por partes novamente, sendo $\overline{u} = e^x$ e $d\overline{v} = \cos x \, dx$. Então,

$$d\overline{u} = e^x \, dx \quad \text{e} \quad \overline{v} = \operatorname{sen} x$$

Assim,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right)$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Assim, se somarmos $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os membros da igualdade, teremos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima tem uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escrita como $2C$; assim, quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será C. Assim, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ao aplicarmos a integração por partes em uma dada integral, um determinado par de escolhas para u e dv pode funcionar, enquanto que outro par pode falhar. Vimos isso na Ilustração 4 e um outro caso ocorre na Ilustração 5.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** No Exemplo 4, na etapa em que tínhamos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

se calcularmos a integral à direita tomando $\overline{u} = \cos x$ e $d\overline{v} = e^x \, dx$, temos

$$d\overline{u} = -\operatorname{sen} x \, dx \quad \text{e} \quad \overline{v} = e^x$$

Assim, iremos obter

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right) \\ &= \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

◀

Nos Exercícios 53 e 54 será pedido que você derive as seguintes fórmulas, onde a e n são números reais não-nulos.

$$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C \tag{3}$$

$$\int e^{au} \cos nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C \tag{4}$$

Integrais da forma daquelas em (3) e (4) são freqüentes em problemas envolvendo circuitos elétricos como nos Exercícios 55-57, pertencentes à Secção Suplementar 7.8.

EXERCÍCIOS 9.1

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int xe^{3x}\, dx$
2. $\int x \cos 2x\, dx$
3. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
4. $\int x\, 3^x\, dx$
5. $\int \ln x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^{-1} w\, dw$
7. $\int (\ln x)^2\, dx$
8. $\int x \sec^2 x\, dx$
9. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$
13. $\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$
15. $\int e^x \cos x\, dx$
16. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx$
20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
22. $\int \cos^{-1} 2x\, dx$
23. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$
24. $\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x}\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 34, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 x^2 3^x\, dx$
26. $\int_{-1}^2 \ln(x+2)\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$
28. $\int_0^{\pi^2/2} \cos \sqrt{2x}\, dx$
29. $\int_0^2 xe^{2x}\, dx$
30. $\int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos 2z\, dz$
31. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$
32. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$
33. $\int_2^4 \sec^{-1} \sqrt{t}\, dt$
34. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx$
35. Ache a área da região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo x.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo y.
38. Ache a área da região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec}^2 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{4}\pi$.
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = 2xe^{-x/2}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região do Exercício 39.
41. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $2e^{-x}$ kg/m. Se a barra tiver 6 m de comprimento, ache a massa e o centro de massa da barra.
42. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = e^x$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 3$.
43. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e pelo eixo y.
44. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$, gira em torno da da reta $x = \frac{\pi}{2}$. Ache o volume do sólido gerado.
45. Um tanque cheio de água tem a forma de um sólido de revolução formado quando a região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo x. Ache o trabalho realizado ao bombear toda a água para a borda do tanque. A distância é medida em metros. Tome o eixo x vertical e orientado para baixo.
46. Uma partícula move-se ao longo de uma reta sendo a distância da partícula a partir da origem em t s igual a s m. Se v m/s for a velocidade em t s, $s = 0$ quando $t = 0$, e $v \cdot s = t \operatorname{sen} t$, ache s em termos de t e também s quando $t = \frac{\pi}{2}$.
47. A função custo marginal é C' e $C'(x) = \ln x$, onde $x > 1$. Ache a função custo total se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(1) = 5$.
48. Um fabricante descobriu que se $100x$ unidades de uma mercadoria forem produzidas por semana, o custo marginal será determinado por $x2^{x/2}$, e o rendimento marginal será determinado por $8 \cdot 2^{-x/2}$, onde o custo de produção e o rendimento são em milhares. Se os custos fixados semanalmen-

te chegam a $ 2.000, ache o lucro semanal máximo que poderá ser obtido.

49. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é um número real qualquer.

$$\int x^r \ln x\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C & \text{se } r = -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int x^3 \ln x\, dx$.

50. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r e q são números reais quaisquer:

$$\int x^r(\ln x)^q\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}(\ln x)^q}{r+1} - \dfrac{q}{r+1}\displaystyle\int x^r(\ln x)^{q-1}\, dx \text{ se } r \neq -1 \\ \dfrac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C \text{ se } r = -1 \text{ e } q \neq -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula deduzida em (a) para calcular $\int x^4(\ln x)^2\, dx$

51. (a) Mostre que se $m \geqslant 2$ e m for inteiro,

$$\int \sec^m x\, dx = \frac{\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\, dx$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int \sec^6 x\, dx$.

52. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é qualquer número real:

$$\int x^r e^x\, dx = x^r e^x - r\int x^{r-1} e^x\, dx$$

(b) Use a fórmula derivada em (a) para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

53. Deduza a fórmula (3).

54. Deduza a fórmula (4).

Os Exercícios de 55 a 57 referem-se à Secção Suplementar 7.8.

55. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 10 sen 10 t volts em t s e um resistor de 3 ohms, além de um indutor de 1 henry ligado em série. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$, quando $t = 0$, encontre (a) i quando $t = 0{,}1$ e (b) i quando $t = 3$.

56. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 100 sen 200 t volts em t s e um resistor de 10 ohms, além de um indutor de 0,1 henry ligado em série. (a) Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t. (b) Dê um valor aproximado de i para valores maiores de t em termos de funções seno e co-seno.

57. Faça o Exercício 56 se o circuito elétrico tiver uma força eletromotriz de 120 sen $120\pi t$ volts e um resistor de 100 ohms; as demais condições são as mesmas.

9.2 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E CO-SENO

Vamos considerar quatro casos de integrais indefinidas envolvendo potências de seno e co-seno, conforme as potências sejam pares ou ímpares.

Caso 1: $\int \operatorname{sen}^n u\, du$ ou $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro ímpar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x(\cos x\, dx) \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\, dx) \\ &= \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx \end{aligned} \tag{1}$$

Para a segunda integral do lado direito de (1) observe que sendo $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\, dx$, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\, dx) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Como a primeira integral do lado direito de (1) é $\operatorname{sen} x + C_2$,

$$\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\, dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

A solução desse caso é semelhante à do Caso 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

◀

Caso 3: $\int \operatorname{sen}^n u\, du$ e $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro par.

O método usado no Caso 1 e no Caso 2 não funciona neste caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$

◀

Caso 4: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, ambos m e n são pares.

A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx \\
&\quad = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx \\
&\quad = \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x \, dx \\
&\quad = \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx \\
&\quad = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C \\
&\quad = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$$

Solução Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x \, dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x \, dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C \\
&= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região no primeiro quadrante, à esquerda da reta $x = \frac{\pi}{2}$ e limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução Vamos usar os símbolos A, M_x, M_y, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ definidos na Secção 6.4. A região e o i-ésimo elemento retangular estão na Figura 1. Primeiro vamos calcular a área da região.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \gamma_i \, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos a Definição 6.4.2 para calcular M_x e M_y. Para calcular M_y, usaremos integração por partes com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} \gamma_i]^2 \, \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \left[x - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{4} [\tfrac{1}{2}\pi] \\ &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \operatorname{sen} \gamma_i \, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -x \cos x \Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi \cos \tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

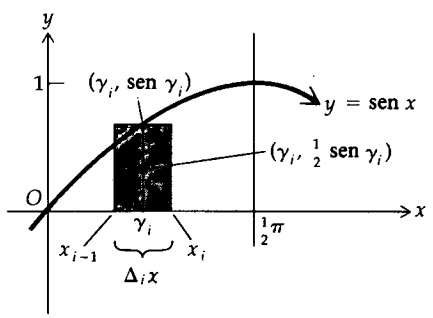


FIGURA 1

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{1}{1} & &= \frac{\frac{1}{8}\pi}{1} \\ &= 1 & &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(1, \frac{1}{8}\pi)$.

O próximo exemplo envolve um outro tipo de integral contendo um produto de seno e co-seno.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$$

Solução Vamos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)x$$

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx = \int (\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 5x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx + \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{10}\cos 5x + C$$

EXERCÍCIOS 9.2

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$
3. $\int \cos^3 4x \operatorname{sen} 4x\,dx$
4. $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$
6. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$
7. $\int \operatorname{sen}^4 z\,dz$
8. $\int \cos^5 x\,dx$
9. $\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$
12. $\int \cos^6 x\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 2t \cos^4 2t\,dt$
15. $\int \operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t\,dt$
16. $\int \sqrt{\cos z}\operatorname{sen}^3 z\,dz$
17. $\int \dfrac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}\,dx$
18. $\int \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2}y \cos^2 \tfrac{1}{2}y\,dy$
19. $\int \cos 4x \cos 3x\,dx$
20. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx$
21. $\int \operatorname{sen} 3y \cos 5y\,dy$
22. $\int \cos t \cos 3t\,dt$
23. $\int (\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 2t)^2\,dt$
24. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x\,dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$
26. $\int_0^1 \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2}\pi t\,dt$
27. $\int_0^1 \operatorname{sen}^4 \tfrac{1}{2}\pi x\,dx$
28. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t\,dt$
29. $\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi t \cos^2 \pi t\,dt$
30. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx$
31. $\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx$
32. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x \cos^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$

33. Calcule $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ por três métodos: (a) fazendo a substituição $u = \operatorname{sen} x$; (b) fazendo a substituição $u = \cos x$; (c) usando a identidade de $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. Explique a aparência diferente das respostas obtidas em (a), (b) e (c).
34. Se n for um inteiro positivo qualquer, prove que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

35. Se n for um inteiro positivo ímpar, prove que

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = 0$$

Nos Exercícios de 36 a 38, m e n são inteiros positivos; mostre que a fórmula dada é verdadeira.

36. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \cos m\pi x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
37. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \operatorname{sen} m\pi x\,dx = 0$
38. $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação de um arco da senóide em torno do eixo x.
41. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno do eixo x.
42. A região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
43. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno da reta $y = 1$.
44. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido de revolução gerado.
45. Ache o centróide da região de $x = 1$ a $x = \frac{\pi}{2}$, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x.
46. Ache o centróide da região descrita no Exercício 44.
47. Prove

$$\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

48. Prove

$$\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

O Exercício 49 refere-se à Secção Suplementar 6.7.

49. A face de um dique tem a forma de um arco da curva $y = -100 \cos \frac{1}{200}\pi x$, $x \in [-100, 100]$, e a superfície da água chega até a borda do dique. Ache a força decorrente da pressão da água na face do dique se a distância for medida em metros.

9.3 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DA TANGENTE, CO-TANGENTE, SECANTE E CO-SECANTE

Vamos lembrar as seguintes fórmulas envolvendo tangente, co-tangente, secante e co-secante:

$$\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C \qquad \int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C \qquad \int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\,du \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\,du \tag{1}$$

onde m e n são inteiros não-negativos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

(a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$
$= \int \sec^2 x\,dx - \int dx$
$= \operatorname{tg} x - x + C$

(b) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx$
$= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int dx$
$= -\operatorname{cotg} x - x + C$ ◀

Vamos distinguir agora os vários casos das integrais da forma (1).

Caso 1: $\int \operatorname{tg}^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cotg}^n u\,du$ onde n é um inteiro positivo.

Escrevemos

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^{n-2} u(\sec^2 u - 1)$$

$$\operatorname{cotg}^n u = \operatorname{cotg}^{n-2} u \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cotg}^{n-2} u(\operatorname{cosec}^2 u - 1)$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{cotg}^4 3x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}^4 3x\,dx &= \int \operatorname{cotg}^2 3x(\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\,dx \\ &= \int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^2 3x\,dx - \int \operatorname{cotg}^2 3x\,dx \\ &= \tfrac{1}{9}(-\operatorname{cotg}^3 3x) - \int (\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\,dx \\ &= -\tfrac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + x + C\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro par positivo.

Escrevemos

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u$$

$$\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u = (\operatorname{cotg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 u$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx &= \int (\operatorname{cotg}^2 x + 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x\,dx \\ &= \int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + 2\int \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx \\ &= -\tfrac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

Caso 3: $\int \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro ímpar positivo.

Para integrar portências ímpares de secante e co-secante, usaremos integração por partes. O procedimento está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \sec^3 x\,dx$$

Solução Seja $u = \sec x$ e $dv = \sec^2 x\,dx$. Então

$$du = \sec x \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{tg} x$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Somando $\int \sec^3 x\,dx$ a ambos os membros, obtemos

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + 2C$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Caso 4: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro par positivo.

Esse caso está ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^5 x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x\,dx \\ &= \int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\,dx \\ &= \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + \tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C\end{aligned}$$

Caso 5: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde m é um inteiro ímpar positivo.

O próximo exemplo ilustra esse caso.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x\,dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) \\ &= \int \sec^{10} x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) - 2\int \sec^8 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) + \int \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) \\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

Caso 6: $\int \text{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \text{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou co-secante. Por exemplo,

$$\int \text{tg}^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx$$
$$= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

EXERCÍCIOS 9.3

Nos Exercícios de 1 a 30, calcule a integral indefinida.

1. $\int \text{tg}^2 5x\, dx$
2. $\int \text{cotg}^2 4t\, dt$
3. $\int x \text{cotg}^2 2x^2\, dx$
4. $\int e^x \text{tg}^2(e^x)\, dx$
5. $\int \text{cotg}^3 t\, dt$
6. $\int \text{tg}^4 x\, dx$
7. $\int \text{tg}^6 3x\, dx$
8. $\int \text{cotg}^5 2x\, dx$
9. $\int \sec^4 x\, dx$
10. $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx$
11. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$
12. $\int \sec^5 x\, dx$
13. $\int e^x \text{tg}^4(e^x)\, dx$
14. $\int \dfrac{\sec^4(\ln x)}{x}\, dx$
15. $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$
16. $\int \text{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
17. $\int \text{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$
18. $\int (\sec 5x + \operatorname{cosec} 5x)^2\, dx$
19. $\int (\text{tg}\, 2x + \text{cotg}\, 2x)^2\, dx$
20. $\int \dfrac{dx}{1 + \cos x}$
21. $\int \dfrac{2 \operatorname{sen} w - 1}{\cos^2 w}\, dw$
22. $\int \dfrac{\text{tg}^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
23. $\int \text{tg}^5 3x\, dx$
24. $\int \dfrac{\text{tg}^4 y}{\sec^5 y}\, dy$
25. $\int \dfrac{du}{1 + \sec \frac{1}{2}u}$
26. $\int \dfrac{\operatorname{cosec}^4 x}{\text{cotg}^2 x}\, dx$
27. $\int \dfrac{\sec^3 x}{\text{tg}^4 x}\, dx$
28. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx$
29. $\int \dfrac{\text{tg}^3(\ln x)\sec^6(\ln x)}{x}\, dx$
30. $\int \dfrac{\sec^4 w}{\sqrt{\text{tg}\, w}}\, dw$

Nos Exercícios de 31 a 36, calcule a integral definida.

31. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \text{tg}^3 4x\, dx$
32. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} 3 \sec^4 2t\, dt$
33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$
34. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\text{tg}^3 x}{\sec x}\, dx$
35. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^6 t}\, dt$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{cotg}^3 w\, dw$

37. Ache a área da região limitada pela curva $y = \text{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.
38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 3 \operatorname{cosec}^3 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ em torno do eixo x.
39. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sec^2 x$, pelos eixos e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$ em torno do eixo x.
40. Prove: $\int \text{cotg}\, x \operatorname{cosec}^n x\, dx = -\dfrac{\operatorname{cosec}^n x}{n} + C$, se $n \neq 0$.
41. Prove: $\int \text{tg}^n x\, dx = \dfrac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.
42. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 40 para $\int \text{tg}\, x \sec^n x\, dx$, se $n \neq 0$.
43. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 41 para $\int \text{cotg}^n x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.

9.4 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Se o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas. Vamos considerar cada forma como um caso separado.

Caso 1: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, onde $a > 0$.

Vamos introduzir uma nova variável θ tomando $u = a \operatorname{sen} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \cos \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\cos \theta \geqslant 0$. Então $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$, e

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$$

Como $\operatorname{sen} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

Solução Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $0 < \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

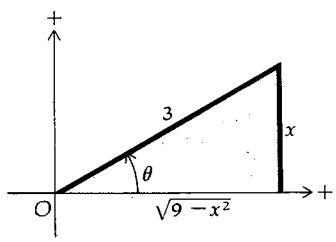
$$\begin{aligned}\sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= 3\sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= 3 \cos \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta}\,(3 \cos \theta \, d\theta) \\ &= \int \operatorname{cotg}^2 \theta \, d\theta \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)\, d\theta \\ &= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C\end{aligned}$$

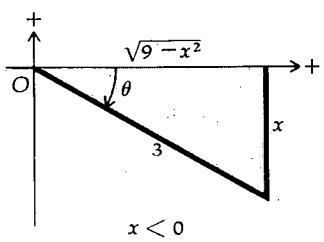
Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. Para encontrar $\operatorname{cotg} \theta$, consulte as Figuras 1 (para $x > 0$) e 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt{9 - x^2}/x$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{3} + C$$



$x > 0$

FIGURA 1



$x < 0$

FIGURA 2

Caso 2: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável θ fazendo $u = a \operatorname{tg} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$, e

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}$$
$$= a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$
$$= a\sqrt{\sec^2 \theta}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec \theta \geqslant 1$. Assim $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$, e

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$$

Como $\operatorname{tg} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx$$

Solução Substituímos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 5}$$
$$= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 \theta}$$
$$= \sqrt{5} \sec \theta$$

Logo,

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx = \int \sqrt{5} \sec \theta (\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta)$$
$$= 5 \int \sec^3 \theta \, d\theta$$

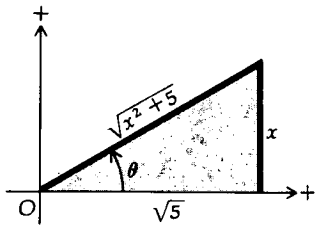
Usando o resultado do Exemplo 4 da Secção 9.3, temos

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx = \tfrac{5}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \tfrac{5}{2} \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

Determinamos $\sec \theta$ das Figuras 3 (para $x \geqslant 0$) e 4 (para $x < 0$), onde $\operatorname{tg} \theta = x/\sqrt{5}$. Em ambos os casos vemos que $\sec \theta = \sqrt{x^2 + 5}/\sqrt{5}$. Logo,

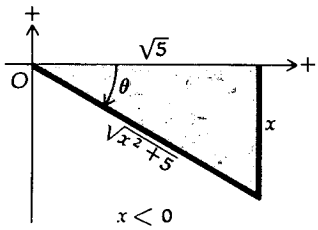
$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C$$
$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 5} + x| - \tfrac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$$
$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 5} + x) + C_1$$

Observe que substituímos $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2 + 5} + x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto.



$x \geqslant 0$

FIGURA 3



$x < 0$

FIGURA 4

Caso 3: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável fazendo $u = a \sec \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant a \quad \text{e} \quad \pi \leqslant \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{se } u \leqslant -a$$

Então $du = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} \\ &= a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\theta \geqslant 0$. Assim, $\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}\theta$$

Como $\sec\theta = u/a$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$$

EXEMPLO 3 Calcule

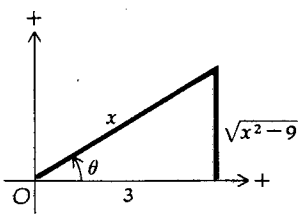
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}}$$

Solução Seja $x = 3\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9} \\ &= 3\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} \\ &= 3\operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{3\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta \cdot 3\operatorname{tg}\theta} \\ &= \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) + C \\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C\end{aligned}$$

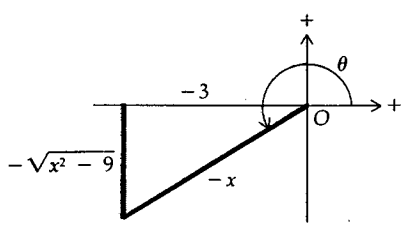


$x > 3$

FIGURA 5

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e obtemos sen θ e cos θ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, e obtemos sen θ e cos θ da Figura 6. Em ambos os casos $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2 - 9}/x$ e $\cos\theta = 3/x$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C \\ &= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C\end{aligned}$$



$x < -3$

FIGURA 6

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

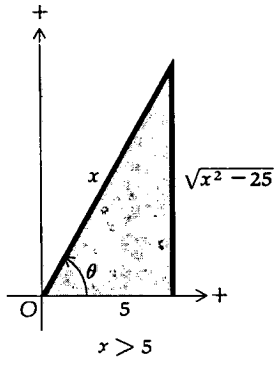


FIGURA 7

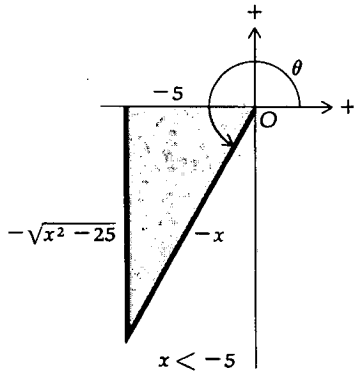


FIGURA 8

Solução Seja $x = 5 \sec \theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 25} &= \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25} \\ &= 5\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= 5 \operatorname{tg} \theta\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \int \frac{5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{5 \operatorname{tg} \theta} \\ &= \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C\end{aligned}$$

Para encontrar tg θ, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec \theta = \frac{1}{5}x$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{5}\sqrt{x^2 - 25}$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}\right| + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| - \ln 5 + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C_1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}}$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int dx/(6 - x^2)^{3/2}$ fazemos a substituição $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$. Nesse caso, podemos restringir θ ao intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, pois estamos calculando uma integral definida para a qual $x > 0$, uma vez que x está em [1, 2]. Assim, $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e $dx = \sqrt{6} \cos \theta \, d\theta$. Além disso,

$$\begin{aligned}(6 - x^2)^{3/2} &= (6 - 6 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6} \cos^3 \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6} \cos \theta \, d\theta}{6\sqrt{6} \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \sec^2 \theta \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{6} \operatorname{tg} \theta + C\end{aligned}$$

Encontramos tg θ da Figura 9, na qual sen $\theta = x/\sqrt{6}$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Assim, tg $\theta = x/\sqrt{6 - x^2}$, e portanto

$$\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6-x^2}} + C$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6-x^2}}\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30}$$

$$= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}$$

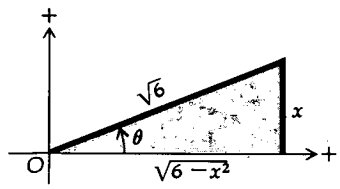


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 9.4

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+6}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
6. $\int \sqrt{1-u^2}\,du$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$
8. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2-7}}$
9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^2}$
10. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$
11. $\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}}$
12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16+x^2}}$
13. $\int \frac{2\,dt}{t\sqrt{t^4+25}}$
14. $\int \frac{x^3\,dx}{(25-x^2)^2}$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
17. $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$
18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$
19. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{(4-\operatorname{tg}^2 x)^{3/2}}$
20. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}$
21. $\int \frac{\ln^3 w\,dw}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}}$
22. $\int \frac{dz}{(z^2-6z+18)^{3/2}}$
23. $\int \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}$
24. $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\,dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$
26. $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$
27. $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$
28. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
29. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
30. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$
31. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$
32. $\int_4^8 \frac{dw}{(w^2-4)^{3/2}}$

33. Use os métodos das secções anteriores (isto é, sem substituição trigonométrica) para calcular as integrais:
    (a) $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$ (b) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{3-2x^2}}$
34. Ache a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x^2-9}/x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.
35. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ e $x = 3$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 34 em torno do eixo y.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região à direita do eixo y, limitada pela curva $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ e pelo eixo x, em torno do eixo x.
38. Ache o comprimento do arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1).
39. Ache o centro de massa de uma barra com 8 cm se a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo é $\rho(x)$ g/cm onde $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 36}$.
40. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $\sqrt{9 + x^2}$ kg/m. Ache a massa e o centro de massa da barra, sabendo que ela tem 3 m.
41. Ache o centróide da região limitada pela curva $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.

42. Use integração para obter πr^2 unidades de área para a área da região cercada por uma circunferência com r unidades de raio.

Os Exercícios de 43 a 45 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

43. Uma tubulação horizontal cilíndrica tem um diâmetro interno de 4 m e tem uma extremidade fechada por um registro circular que se ajusta à tubulação. Se a tubulação contiver água até uma profundidade de 3 m, ache a força no registro, exercida pela pressão da água.

44. Uma comporta num canal de irrigação tem a forma de um segmento de círculo com 40 cm de raio. A parte superior da comporta é horizontal e 30 cm acima do ponto mais baixo. Se o nível da água estiver 20 cm acima da borda da comporta, ache a força sobre ela, exercida pela pressão da água.

45. Um tanque de automóvel tem a forma de um cilindro circular reto com 8 cm de raio, com um eixo horizontal. Ache a força total num extremo, quando a gasolina atingir 12 cm de profundidade, sabendo que a densidade da gasolina é ρ g/cm^3.

9.5 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR TEM SOMENTE FATORES LINEARES

Da definição de função racional, H será racional se $H(x) = P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Vimos previamente que se o grau do numerador não for menor do que o grau do denominador, temos uma fração imprópria e, nesse caso, dividimos o numerador pelo denominador até obter uma fração própria, isto é, uma fração cujo numerador tenha grau menor do que o grau do denominador. Por exemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

Assim, se quisermos integrar

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}\, dx$$

o problema se reduz a integrar

$$\int (x^2 - 6)\, dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4}\, dx$$

Em geral, então, estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$.

Para fazer isso, em geral é necessário escrever $P(x)/Q(x)$ como a soma de *frações parciais*. Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos onde os fatores quadráticos não têm zeros reais. Algumas vezes pode ser difícil encontrar esses fatores de $Q(x)$; porém, um teorema de Álgebra Avançada estabelece que teoricamente isso sempre pode ser feito.

Após fatorar $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos, o método de determinar as frações parciais irá depender da natureza desses fatores. Vamos considerar separadamente os vários casos. Os resultados de Álgebra Avançada, que não estão provados aqui, fornecem a forma da fração parcial em cada caso.

Caso 1: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e nenhum é repetido. Isto é,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots (a_nx + b_n)$$

onde não existem dois fatores idênticos. Nesse caso escrevemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Observe que na igualdade acima, em vez de $=$ usamos $\equiv$ (que se lê idêntico), pois (1) é uma identidade.

A ilustração a seguir mostra como obter os valores de A_i.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para calcular

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$$

fatoramos o denominador obtendo

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

Assim,

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \tag{1}$$

Como (1) é uma identidade, deve ser válida para todo x exceto 0, 2 e -1. De (1),

$$x - 1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \tag{2}$$

A igualdade (2) é uma identidade válida para todos os valores de x inclusive 0, 2 e -1. Queremos encontrar as constantes A, B e C. Substituindo x por 0 em (2), obtemos

$$-1 = -2A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{2}$$

Substituindo x por 2 em (2), obtemos

$$1 = 6B \quad \Leftrightarrow \quad B = \tfrac{1}{6}$$

Substituindo x por -1 em (2), obtemos

$$-2 = 3C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{2}{3}$$

Há um outro método para encontrar os valores de A, B e C. Se no segundo membro de (2) agruparmos os termos,

$$x - 1 \equiv (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A$$

Como temos uma identidade, os coeficientes do primeiro membro devem ser iguais aos coeficientes correspondentes do segundo membro. Assim,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, e $C = -\frac{2}{3}$. Substituindo esses valores em (1), teremos

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}$$

Assim, a integral dada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{6}\ln|x-2| - \tfrac{2}{3}\ln|x+1| + \tfrac{1}{6}\ln C$$
$$= \tfrac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + \ln C)$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{Cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| \quad \blacktriangleleft$$

Caso 2: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e alguns são repetidos.

Suponha que $(a_ix + b_i)$ seja um fator que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(a_ix+b_i)^2} + \frac{A_p}{a_ix+b_i}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ são constantes a serem determinadas.

O Exemplo 1 a seguir ilustra esse caso e o método de determinar cada A_i.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^3-1)\,dx}{x^2(x-2)^3}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2} \tag{3}$$

Multiplicando ambos os membros de (3) pelo mínimo múltiplo comum, teremos

$$x^3 - 1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2 \tag{4}$$

Substituindo x por 2 em (4), obtemos

$$7 = 4C \iff C = \tfrac{7}{4}$$

Substituindo x por 0 em (4), obtemos

$$-1 = -8A \iff A = \tfrac{1}{8}$$

Substituímos esses valores de A e C em (4) e expandindo as potências dos binômios, teremos

$$x^3 - 1 \equiv \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \tfrac{7}{4}x^2 + Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^3 - 1 \equiv (B+E)x^4 + (\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E)x^3 + (-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E)x^2 + (\tfrac{3}{2} - 8B)x - 1$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, obtemos

$$B + E = 0$$
$$\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E = 1$$
$$-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E = 0$$
$$\tfrac{3}{2} - 8B = 0$$

Resolvendo, obtemos

$$B = \tfrac{3}{16} \qquad D = \tfrac{5}{4} \qquad E = -\tfrac{3}{16}$$

Logo, de (3)

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{x-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3}\,dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2} \\
&\quad = -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + C \\
&\quad = \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Solução

$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}$$

Multiplicando por $(u - a)(u + a)$, obtemos

$$1 \equiv A(u + a) + B(u - a)$$

$$1 \equiv (A + B)u + Aa - Ba$$

Igualando os coeficientes, teremos

$$A + B = 0$$

$$Aa - Ba = 1$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos

$$A = \frac{1}{2a} \qquad B = -\frac{1}{2a}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a} \\
&= \frac{1}{2a}\ln|u - a| - \frac{1}{2a}\ln|u + a| + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C
\end{aligned}$$

O tipo de integral do exemplo acima ocorre com uma freqüência tal que justifica ser dado como fórmula. Não é necessário memorizá-la pois trata-se de uma integração por frações parciais extremamente simples.

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

Se tivermos $\int du/(a^2 - u^2)$, escreveremos

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = -\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$$

Essa integração será também dada como fórmula.

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$$

Na Secção 7.7 discutimos o crescimento exponencial que ocorre quando a taxa de crescimento de uma grandeza é proporcional à quantidade da grandeza existente num dado instante. Obtemos o modelo matemático

$$f(t) = Be^{kt} \tag{5}$$

onde k é uma constante positiva, B unidades representa a quantidade presente inicialmente e $f(t)$ unidades é o quanto existirá após t unidades de tempo, onde $f(t) \geqslant B$ para $t \geqslant 0$. Também foi discutido na Secção 7.7 o crescimento limitado, o qual ocorre quando uma grandeza cresce a uma taxa proporcional à diferença entre um número positivo fixo A e o seu tamanho. Um modelo matemático que descreve a situação é

$$f(t) = A - Be^{-kt} \tag{6}$$

onde B e k são constantes positivas e $A - B \leqslant f(t) < A$ para $t \geqslant 0$. As Figuras 1 e 2 apresentam esboços dos gráficos de (5) e (6), respectivamente.

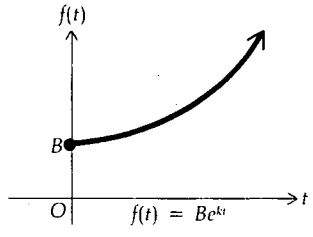


FIGURA 1

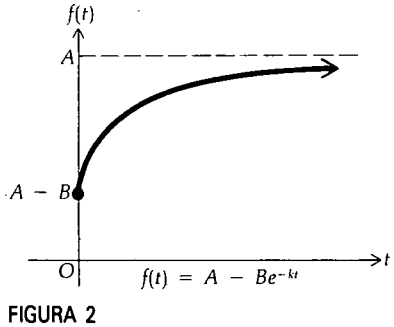


FIGURA 2

Considere agora o crescimento de uma população que é afetado pelo meio ambiente, o qual impõe uma limitação superior em seu tamanho. Por exemplo, espaço ou reprodução podem ser fatores limitados pelo meio ambiente. Em tais casos, o modelo matemático do tipo (5) não se aplica, pois a população não cresce além de um certo ponto. Um modelo que leva em conta os fatores ambientais é obtido quando uma quantidade está crescendo a uma taxa conjuntamente propocional a seu tamanho e à diferença entre um número A, positivo fixo, e seu tamanho. Assim, se y unidades for a quantidade de uma grandeza presente em t unidades de tempo,

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y) \tag{7}$$

onde k é uma constante positiva, e $0 < y < A$ para $t \geqslant 0$.

Para resolver (7) primeiro separamos as variáveis, obtendo

$$\frac{dy}{y(A - y)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = k \int dt \tag{8}$$

Escrevendo o integrando à esquerda como soma de frações parciais, teremos

$$\frac{1}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A-y}\right)$$

Assim,

$$\int \frac{dy}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A-y}\right)dy$$

$$= \frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A-y|) + C_1$$

Logo, de (8), temos

$$\frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A-y|) = kt + C_2$$

$$\ln|A-y| - \ln|y| = -Akt - AC_2$$

$$\ln\left|\frac{A-y}{y}\right| = -Akt - AC_2$$

$$\left|\frac{A-y}{y}\right| = e^{-Akt}e^{-AC_2}$$

Como $0 < y < A$, $(A-y)/y > 0$. Assim sendo, podemos omitir as barras de valor absoluto. Com $B = e^{-AC_2}$ temos

$$A - y = Bye^{-Akt}$$

$$y(1 + Be^{-Akt}) = A$$

$$y = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \tag{9}$$

Se tomarmos $y = f(t)$, então essa igualdade pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \qquad t \geqslant 0 \tag{10}$$

onde A, B e k são constantes positivas. Para fazer um esboço do gráfico de f, consideremos primeiro $\lim_{t \to +\infty} f(t)$. De (10),

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{A}{1 + B\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-Akt}}$$

$$= \frac{A}{1 + B \cdot 0}$$

$$= A$$

e $f(t)$ está tendendo a A através de valores menores que A. Logo, a reta $f(x)$ A é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Como $f(0) = \dfrac{A}{1+B}$, o gráfico

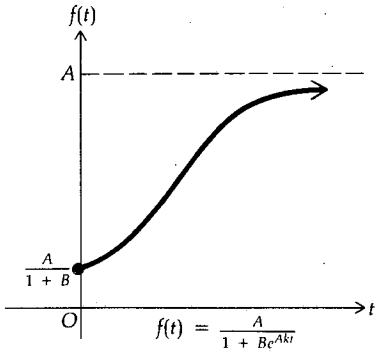


FIGURA 3

intercepta o eixo $f(t)$ em $\frac{A}{1 + B}$. No Exercício 38 você deverá mostrar que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $t = \frac{1}{Ak} \ln B$. Com essa informação fazemos um esboço do gráfico, conforme mostra a Figura 3. Ele é chamado de curva do *crescimento logístico*. Observe que quando d é pequeno, o gráfico é similar ao do crescimento exponencial da Figura 1; à medida que t cresce, a curva torna-se semelhante àquela do crescimento limitado da Figura 2.

Uma aplicação do crescimento logístico em Economia é dada pela divulgação de informações sobre um dado produto. O crescimento logístico é usado em Biologia para descrever o alastramento de uma doença e em Sociologia, para descrever a propagação de um boato ou rumor.

EXEMPLO 3 Em uma comunidade de 45.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a contraíram e ao número de pessoas que não a contraíram. (a) Se 200 pessoas tiveram a gripe quando irrompeu a epidemia e 2.800 pessoas tiveram gripe 3 semanas depois, ache um modelo matemático que descreva a epidemia. Pelas estimativas, qual o número de pessoas que terá gripe (b) após 5 semanas e (c) após 10 semanas? (d) Se a epidemia continuar indefinidamente, quantas pessoas irão contraí-la?

Solução

(a) Se t semanas já se passaram desde que irrompeu a epidemia e y pessoas contraíram a gripe após as t semanas, então

$$\frac{dy}{dt} = ky(45.000 - y) \tag{11}$$

Tabela 1

t	0	3	5	10
y	200	2.800	y_5	y_{10}

onde k é uma constante e $0 < y < 45.000$ para todo $t \geqslant 0$. As condições laterais são dadas na Tabela 1, onde y_5 e y_{10} são o número de pessoas com gripe após 5 e 10 semanas, respectivamente.

A equação diferencial (11) tem a forma de (7) e sua solução geral é da forma de (9). Logo, a solução geral de (11) é

$$y = \frac{45.000}{1 + Be^{-45.000kt}} \tag{12}$$

Como $y = 200$ quando $t = 0$, de (12) temos

$$200 = \frac{45.000}{1 + Be^0}$$

$$1 + B = 225$$

$$B = 224$$

Substituindo esse valor de B em (12), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-45.000kt}} \tag{13}$$

Quando $t = 3$, $y = 2.800$. Assim, de (13) temos

$$2.800 = \frac{45.000}{1 + 224e^{-135.000k}}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = \frac{45.000}{2.800}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = 16{,}0714$$

$$e^{-135.000k} = \frac{15{,}0714}{224}$$

$$-135.000k = \ln 0{,}0672830$$

$$k = -\frac{\ln 0{,}0672830}{135.000}$$

$$k = 0{,}0000199915$$

Substituindo esse valor de k em (13), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}}$$

que é o modelo matemático pedido.

(b) Como $y = y_5$ quando $t = 5$,

$$y_5 = \frac{45.000}{1 + 244e^{-4{,}49808}}$$

$$= \frac{45.000}{1 + 224(0{,}0111303)}$$

$$= 12.882{,}2$$

(c) Como $y = y_{10}$ quando $t = 10$,

$$y_{10} = \frac{45.000}{1 + 224e^{-8{,}99616}}$$

$$= \frac{45.000}{1 + 224(0{,}000123885)}$$

$$= 43.785{,}0$$

Logo, 12.882 pessoas devem contrair a gripe após 5 semanas e 43.785 devem contraí-la após 10 semanas.

(d) Como

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}} = \frac{45.000}{1 + 224 \cdot 0}$$

$$= 45.000$$

toda a comunidade de 45.000 pessoas irá contrair a gripe se a epidemia continuar indefinidamente.

Em Química, a *lei de ação das massas* fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais. Sob certas condições, sabe-se que uma substância A reage com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado.

Suponhamos que existam inicialmente α g de A e β g de B e que r g de A combinem-se com s g de B para formar $(r + s)$ g de C. Se houver x g de C em t unidades de tempo, então C conterá $rx/(r + s)$ g de A e $sx/(r + s)$ g de B. O número de gramas da substância A que restou é $\alpha - rx/(r + s)$, e o

número de gramas de B que restou é $\beta - sx/(r + s)$. Logo, a lei de ação de massas dá

$$\frac{dx}{dt} = K\left(\alpha - \frac{rx}{r+s}\right)\left(\beta - \frac{sx}{r+s}\right)$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Essa equação pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krs}{(r+s)^2}\left(\frac{r+s}{r}\alpha - x\right)\left(\frac{r+s}{s}\beta - x\right)$$

Tomando

$$k = \frac{Krs}{(r+s)^2} \qquad a = \frac{r+s}{r}\alpha \qquad b = \frac{r+s}{s}\beta$$

essa igualdade torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{14}$$

Podemos separar as variáveis em (14) e obter

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt$$

Se $a = b$, então o primeiro membo da equação pode ser integrado usando a fórmula da potência. Se $a \neq b$, podemos usar frações parciais para a integração.

EXEMPLO 4 Uma reação química faz com que uma substância A combine-se com uma substância B para formar uma substância C, de acordo com a lei de ação de massas. Se na equação (14) $a = 8$, $b = 6$ e 2 g de substância C formaram-se em 10 min, quantos gramas de C terão se formado em 15 min?

Tabela 2

t	0	10	15
x	0	2	x_{15}

Solução Se x g da substância C formaram-se em t min, temos as condições laterais mostradas na Tabela 2, onde x_{15} g da substância C serão formados em 15 min. A equação (14) torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(8 - x)(6 - x)$$

Separando as variáveis, temos

$$\int \frac{dx}{(8-x)(6-x)} = k\int dt \tag{15}$$

Escrevendo o integrando como soma de frações parciais, iremos obter

$$\frac{1}{(8-x)(6-x)} \equiv \frac{A}{8-x} + \frac{B}{6-x}$$

$$1 \equiv A(6 - x) + B(8 - x)$$

Substituindo x por 6, obtemos $B = \frac{1}{2}$, e substituindo x por 8, obtemos $A = -\frac{1}{2}$. Assim sendo, (15) pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{8-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{6-x} = k\int dt$$

Integrando, teremos

$$\tfrac{1}{2}\ln|8-x| - \tfrac{1}{2}\ln|6-x| + \tfrac{1}{2}\ln|C| = kt$$

$$\ln\left|\frac{6-x}{C(8-x)}\right| = -2kt$$

$$\frac{6-x}{8-x} = Ce^{-2kt}$$

Substituindo $x = 0$, $t = 0$, nesta equação, obtemos $C = \frac{3}{4}$. Logo,

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}e^{-2kt} \tag{16}$$

Substituindo $x = 2$, $t = 10$ em (16), teremos

$$\tfrac{4}{6} = \tfrac{3}{4}e^{-20k}$$

$$e^{-20k} = \tfrac{8}{9}$$

Substituindo $x = x_{15}$, $t = 15$ em (16), teremos

$$\frac{6-x_{15}}{8-x_{15}} = \frac{3}{4}e^{-30k}$$

$$4(6-x_{15}) = 3(e^{-20k})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = 3(\tfrac{8}{9})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = \frac{16\sqrt{2}}{9}(8-x_{15})$$

$$x_{15} = \frac{54-32\sqrt{2}}{9-4\sqrt{2}}$$

$$x_{15} \approx 2{,}6$$

Portanto, 2,6 g de substância C serão formados em 15 min.

EXERCÍCIOS 9.5

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$
3. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x}$
5. $\displaystyle\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}\,dw$
6. $\displaystyle\int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2}\,dt$
7. $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$
12. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$
15. $\displaystyle\int \frac{3z+1}{(z^2-4)^2}\,dz$
16. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-11x+5)\,dx}{x^3-4x^2+5x-2}$
17. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1}$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral definida.

21. $\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$

22. $\int_0^4 \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+7x+3}$

23. $\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx$

24. $\int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

25. $\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx$

26. $\int_0^1 \frac{(3x^2+7x)\,dx}{x^3+6x^2+11x+6}$

27. $\int_0^5 \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

28. $\int_0^4 \frac{x^2dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$

29. Ache a área da região limitada pela curva $y = (x-1)/(x^2-5x+6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.
30. Ache a área, no primeiro quadrante, da região limitada pela curva $(x+2)^2y = 4-x$.
31. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 29 gira em torno do eixo y.
32. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 30 gira em torno do eixo x.
33. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = (x-1)/(x^2-5x+6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.
34. Ache o centróide da região, no primeiro quadrante, limitada pela curva $(x+2)^2y = 4-x$.
35. Um dia em um campus universitário com 5.000 alunos, onde se esperava uma assembléia estudantil um aluno ouviu que certo estudante polêmico iria fazer, durante a assembléia, um discurso explosivo. Essa informação foi transmitida para amigos que, por sua vez, a transmitiram a outros. A taxa com que se espalhou essa informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. (a) Se após 10 min 144 pessoas ouviram a informação, ache o modelo matemático que descreve a divulgação da notícia. Quantas pessoas terão ouvido a notícia (b) após 15 min e (c) após 20 min? (d) Quantas pessoas eventualmente ouvirão a notícia?
36. Numa determinada cidade com população A, 20% dos habitantes ouviram pelo rádio a notícia de um escândalo político local. A taxa de disseminação da informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. Se após 1 hora 50% da população já sabe do escândalo, quanto tempo levará para que 80% da população tome conhecimento do fato?
37. Numa comunidade onde A pessoas são suscetíveis a um determinado vírus, a taxa de propagação do vírus é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que o contraíram e ao número de pessoas suscetíveis que não o contraíram. Se 10% dos suscetíveis contraíram o vírus inicialmente e 25% foram infectados após 3 semanas, qual a porcentagem dos suscetíveis que foram infectados após 6 semanas?
38. Mostre que o gráfico da função f definida por (10) tem um ponto de inflexão em $t = \frac{1}{Ak}\ln B$.
39. Um fabricante que começou a operar quatro anos atrás determinou que o rendimento das vendas vem crescendo estavelmente à taxa de $\frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}$ milhões por ano, onde t é o número de anos que a fábrica vem operando. Estima-se que o rendimento total das vendas continuará crescendo à mesma taxa nos próximos dois anos. Se o rendimento total do ano que acabou foi de \$ 6 milhões, qual será o rendimento total das vendas esperado daqui a um ano? Dê a resposta com precisão de \$ 100.
40. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v m/s for a velocidade após t s, então

$$v = \frac{t+3}{t^2+3t+2}$$

Ache a distância percorrida pela partícula desde o instante em que $t = 0$ ao instante em que $t = 2$.

41. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 5$, $b = 4$ e 1 g de C seja formado em 5 min. Quantos gramas de C deverão ser formados em 10 min?
42. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 6$, $b = 3$ e 1 g de C seja formado em 4 min. Quanto tempo irá decorrer para estarem formados 2 g de C?
43. Em qualquer instante, a taxa segundo a qual uma substância se dissolve é proporcional ao produto da quantidade presente em qualquer instante pela diferença entre a concentração da substância na solução naquele instante e a concentração da substância em uma solução saturada. Uma quantidade de material insolúvel é misturada com 40 g de sal, inicialmente. O sal é dissolvido num tanque com 20 litros de água. Se 5 g de sal dissolvem-se em 10 min e se a concentração de sal numa solução saturada for de 3 g/L, qual a quantidade de sal dissolvido em 20 min?

9.6 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR CONTÉM FATORES QUADRÁTICOS

A discussão de integração de funções racionais por frações parciais continua com os dois casos onde o denominador contém fatores quadráticos *irredutíveis*. Lembre-se da Álgebra, que um fator ax^2+bx+c será irredutível se uma equação $ax^2+bx+c = 0$ não tiver raízes reais, isto é, $b^2-4ac < 0$.

Caso 3: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos, e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + C}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^2 - 2x - 3)\,dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como a seguinte soma de frações parciais:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros de (1) pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \tag{2}$$

Podemos calcular C substituindo x por 1 em (2) e obtendo

$$-4 = 5C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{4}{5}$$

Substituímos C por $-\frac{4}{5}$ em (2) e multiplicando o segundo membro, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (A - \tfrac{4}{5})x^2 + (B - A - \tfrac{8}{5})x + (-\tfrac{8}{5} - B)$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, teremos

$$\begin{aligned} A - \tfrac{4}{5} &= 1 \\ B - A - \tfrac{8}{5} &= -2 \\ -\tfrac{8}{5} - B &= -3 \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \tfrac{9}{5} \qquad B = \tfrac{7}{5}$$

Substituindo os valores de A, B e C em (1), teremos

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-\frac{4}{5}}{x - 1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}\,dx \\ &\quad = \frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x - 1} \end{aligned} \tag{3}$$

Para integrar $\int (x\,dx)/(x^2 + 2x + 2)$ vemos que a diferencial do denominador é $2(x + 1)\,dx$; assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, iremos obter

$$\frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{9}{5}\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Substituindo essa desigualdade em (3) e combinando os termos, teremos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx &= \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1| \\ &= \tfrac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \tfrac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}(x+1) - \tfrac{8}{10}\ln|x-1| + \tfrac{1}{10}\ln C \\ &= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{C(x^2+2x+2)^9}{(x-1)^8}\right| - \frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}(x+1)\end{aligned} \tag{4}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1 podemos evitar algumas passagens, se, em vez de (1), expressarmos a fração original como

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{D(2x+2)+E}{x^2+2x+2} + \frac{F}{x-1}$$

Nota: Escrevemos $D(2x + 2) + E$ em vez de $Ax + B$ pois

$$2x + 2 = D_x(x^2 + 2x + 2)$$

Então, resolvendo para D, E e F, obtemos

$$D = \tfrac{9}{10} \qquad E = -\tfrac{2}{5} \qquad F = -\tfrac{4}{5}$$

resultando diretamente (4). ◀

Caso 4: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2+bx+c)^p} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_px + B_p}{ax^2+bx+c}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se o denominador contém o fator $(x^2 - 5x + 2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax + B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex + F}{x^2-5x+2}$$

ou, de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x-5)+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{C(2x-5)+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{E(2x-5)+F}{x^2-5x+2}$$ ◀

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

Solução

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}$$

Multiplicando ambos os membros dessa relação pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x - 2 \equiv A(x^2 - 4x + 5)^2 + x(2Bx - 4B + C) + x(x^2 - 4x + 5)(2Dx - 4D + E) \quad (5)$$

$$x - 2 \equiv Ax^4 + 16Ax^2 + 25A - 8Ax^3 + 10Ax^2 - 40Ax + 2Bx^2 - 4Bx + Cx + 2Dx^4 - 12Dx^3 + Ex^3 + 26Dx^2 - 4Ex^2 - 20Dx + 5Ex$$

$$x - 2 \equiv (A + 2D)x^4 + (-8A - 12D + E)x^3 + (26A + 2B + 26D - 4E)x^2 + (-40A - 4B + C - 20D + 5E)x + 25A \quad (6)$$

O valor de A pode ser calculado de (5), substituindo x por 0. Se igualarmos os coeficientes em (6) e resolvermos simultaneamente as equações resultantes, iremos obter

$$A = -\tfrac{2}{25} \qquad B = \tfrac{1}{5} \qquad C = \tfrac{1}{5} \qquad D = \tfrac{1}{25} \qquad E = -\tfrac{4}{25}$$

Logo,

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} = -\frac{2}{25}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5} - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} \quad (7)$$

Vamos calcular separadamente as integrais do terceiro e quinto termos do segundo membro de (7)

$$\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$$

Seja $x - 2 = \operatorname{tg}\theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 2$. Então $dx = \sec^2\theta\,d\theta$ e $(x-2)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1$. Logo,

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^2}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C_1$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1$$

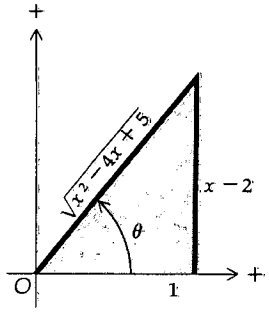
Como $\operatorname{tg}\theta = x - 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < 0 < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x-2)$. Encontramos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ das Figuras 1 (se $x \geqslant 2$) e 2 (se $x < 2$). Em ambos os casos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

Assim,

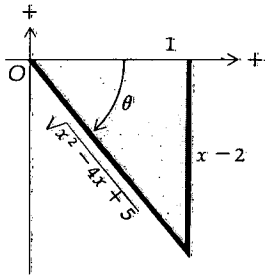
$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_1 \tag{8}$$



$x \geqslant 2$

FIGURA 1



$x < 2$

FIGURA 2

Considerando agora a outra integral no segundo membro de (7), teremos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C_2$$

Substituindo essa relação e (8) em (7), teremos

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)}$$

$$+ \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C$$

$$= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C$$

EXERCÍCIOS 9.6

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3+x}$
2. $\displaystyle\int \frac{(x+4)\,dx}{x(x^2+4)}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^4-1}$
4. $\displaystyle\int \frac{(x^2-4x-4)\,dx}{x^3-2x^2+4x-8}$
5. $\displaystyle\int \frac{(t^2+t+1)\,dt}{(2t+1)(t^2+1)}$
6. $\displaystyle\int \frac{3w^3+13w+4}{w^3+4w}\,dw$
7. $\displaystyle\int \frac{(x^2+x)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$
10. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{4x^4+4x^3+x^2}$
11. $\displaystyle\int \frac{(2x^2-x+2)\,dx}{x^5+2x^3+x}$
12. $\displaystyle\int \frac{(2x^3+9x)\,dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$
13. $\displaystyle\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)\,dz}{(z^2-2z+5)^2}$
14. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$
15. $\displaystyle\int \frac{(x^2+2x-1)\,dx}{27x^3-1}$
16. $\displaystyle\int \frac{e^{5x}\,dx}{(e^{2x}+1)^2}$
17. $\displaystyle\int \frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2}$
18. $\displaystyle\int \frac{(2x^2+3x+2)\,dx}{x^3+4x^2+6x+4}$
19. $\displaystyle\int \frac{(\sec^2 x+1)\sec^2 x\,dx}{1+\operatorname{tg}^3 x}$
20. $\displaystyle\int \frac{(6w^4+4w^3+9w^2+24w+32)\,dw}{(w^3+8)(w^2+3)}$

Nos Exercícios de 21 a 29, calcule a integral definida.

21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(4+5x^2)\,dx}{x^3+4x}$
22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+2x^2+x+2}$

23. $\int_3^4 \frac{(5x^3 - 4x)\,dx}{x^4 - 16}$

24. $\int_0^1 \frac{9\,dx}{8x^3 + 1}$

25. $\int_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$

26. $\int_0^{1/2} \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 - 1}$

27. $\int_0^1 \frac{(x^2 + 3x + 3)\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

28. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x}$

29. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12\,dt}{e^{2t} + 16}$

30. Use métodos anteriores a esta secção (isto é, sem frações parciais), para calcular as integrais:

(a) $\int \frac{(x^2 - 4x + 6)\,dx}{x^3 - 6x^2 + 18x}$ (b) $\int \frac{3x + 1}{(x + 2)^4}\,dx$

31. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^2 + 1)^3 = x^3$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

32. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^3 + 8) = 4$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região do Exercício 32.

34. Ache a abscissa do centróide da região do Exercício 32.

35. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de forma que v cm/s seja a velocidade da partícula, decorridos t s; então

$$v = \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}$$

Ache a fórmula da distância percorrida pela partícula do instante $t = 0$ ao instante $t = t_1$.

9.7 OUTRAS SUBSTITUIÇÕES

Se um integrando envolver potências fracionárias de uma variável x, o integrando poderá ser simplificado pela substituição

$$x = z^n$$

onde n é o menor denominador comum entre os denominadores dos expoentes. Isso será ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

Solução Seja $x = z^6$, então $dx = 6z^5\,dz$. Assim,

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{z^3(6z^5\,dz)}{1 + z^2}$$

$$= 6\int \frac{z^8}{z^2 + 1}\,dz$$

Dividindo o numerador pelo denominador, teremos

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1 + x^{1/3}} = 6\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2 + 1}\right)dz$$

$$= 6(\tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{5}z^5 + \tfrac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{tg}^{-1} z) + C$$

$$= \tfrac{6}{7}x^{7/6} - \tfrac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\operatorname{tg}^{-1} x^{1/6} + C$$

Não há uma regra geral para determinar qual a substituição que irá resultar num integrando mais simples. O exemplo a seguir mostra outra situação onde racionalizamos o integrando dado.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^5\sqrt{x^2 + 4}\,dx$$

Solução Seja $z = \sqrt{x^2 + 4}$. Então $z^2 = x_2 + 4$ e $2z\,dz = 2x\,dx$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx &= \int (x^2)^2\sqrt{x^2+4}\,x\,dx \\
&= \int (z^2-4)^2 z(z\,dz) \\
&= \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2)\,dz \\
&= \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{8}{5}z^5 + \tfrac{16}{3}z^3 + C \\
&= \tfrac{1}{105}z^3[15z^4 - 168z^2 + 560] + C \\
&= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}[15(x^2+4)^2 - 168(x^2+4) + 560] + C \\
&= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C
\end{aligned}$$

Se um integrando for uma função racional de sen x e cos x ele poderá ser reduzido a uma função racional de z pela substituição

$$z = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x$$

como será mostrado por um exemplo. Para obter as fórmulas de sen x e cos x em termos de z vamos usar as seguintes identidades: sen $2y$ = 2 sen y cos y e cos $2y$ = 2 cos^2 y − 1 com $y = \frac{1}{2}x$. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x & \cos x &= 2\cos^2\tfrac{1}{2}x - 1 \\
&= 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} & &= \frac{2}{\sec^2\frac{1}{2}x} - 1 \\
&= 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{1}{2}x} & &= \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} - 1 \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} & &= \frac{2}{1+z^2} - 1 \\
&= \frac{2z}{1+z^2} & &= \frac{1-z^2}{1+z^2}
\end{aligned}$$

Como $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned}
dz &= \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x)\,dx
\end{aligned}$$

Assim,

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

Vamos estabelecer esses resultados sob a forma de teorema.

9.7.1 TEOREMA Se $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, então

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}$$

Solução Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$. Então, das fórmulas do Teorema 9.7.1, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} &= \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1 - \dfrac{2z}{1+z^2} + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \\
&= 2\int \frac{dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)} \\
&= 2\int \frac{dz}{2 - 2z} \\
&= \int \frac{dz}{1-z} \\
&= -\ln|1 - z| + C \\
&= -\ln|1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x| + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, calcule

$$\int \sec x\, dx$$

Solução Com $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ e as fórmulas do Teorema 9.7.1, temos que

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{2\,dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{1-z^2} \\
&= 2\int \frac{dz}{1-z^2} \\
&= \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C \qquad \text{(Secção 9.5)} \\
&= \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}\right| + C
\end{aligned}$$

Podemos escrever o valor de $\int \sec x\, dx$ do Exemplo 4 de outra forma, tomando $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ e usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Assim,

$$\int \sec x\,dx = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$\boxed{\int \sec x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right| + C} \tag{1}$$

No Teorema 5.4.5 tínhamos a fórmula

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

obtida pela multiplicação do numerador e do denominador do integrando por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Há ainda outra forma para $\int \sec x\,dx$ obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{\cos x\,dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \int \frac{du}{1 - u^2} \qquad (\text{sendo } u = \operatorname{sen} x \text{ e } du = \cos x\,dx) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right|^{1/2} + C
\end{aligned}$$

Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo x, $1 + \operatorname{sen} x$ e $1 - \operatorname{sen} x$ são não-negativos. Assim, as barras de valor absoluto podem ser removidas e teremos

$$\boxed{\int \sec x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} + C} \tag{2}$$

EXERCÍCIOS 9.7

Nos Exercícios de 1 a 31, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3 + \sqrt{x}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$
4. $\displaystyle\int x(1 + x)^{2/3}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x}}{1 - x}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x + 2}}$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x - 2}}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x} - \sqrt{x + 4}}$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}$
11. $\displaystyle\int \frac{(2x^5 + 3x^2)\,dx}{\sqrt{1 + 2x^3}}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$
13. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{8 + 7\cos x}$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$
15. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{7 + 8\cos x}$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x + 2}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5\operatorname{sen} x}$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - 1}$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$
22. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 2\operatorname{sen} x + 3}$

23. $\int \frac{8\,dx}{3\cos 2x + 1}$

24. $\int \frac{\cos x\,dx}{3\cos x - 5}$

25. $\int \frac{\cos x\,dx}{1 + 2\cos x}$

26. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}$

27. $\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} x(6 + 7\cos 2x)}$

28. $\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} 2x(1 - \cos 2x)}$

29. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x + 2\cos x + 3}$

30. $\int \frac{5\,dx}{6 + 4\sec x}$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2}$

32. Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ por dois métodos: (a) use a substituição $x = 1/z$; (b) use a substituição $\sqrt{x^2 + 2x - 1} = z - x$.

Nos Exercícios de 33 a 44, calcule a integral definida.

33. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

34. $\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x + 1}\,dx$

35. $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} + 9)}$

36. $\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}$

37. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5\operatorname{sen} x + 3}$

38. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos 2x}$

39. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\,dx}{2\operatorname{sen} 2x + 1}$

40. $\int_0^{\pi/4} \frac{8\,dx}{\operatorname{tg} x + 1}$

41. $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3\,dx}{2\cos x + 1}$

42. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{2 + \cos x}$

43. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

44. $\int_2^{11} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

45. Calcule $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ por dois métodos: (a) tomando $x = z^2$; (b) escrevendo $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ e tomando $u = \sqrt{x} - 1$

46. Use a substituição desta secção, $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ para mostrar que $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

47. Mostre que a fórmula (2) desta secção é equivalente à fórmula $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$. (*Sugestão:* multiplique o numerador e denominador sob o radical por $(1 + \operatorname{sen} x)$.)

48. Usando a substituição $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, prove que

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C$$

49. Mostre que o resultado do Exercício 48 é equivalente à fórmula $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$. (*Sugestão*: use um método similar ao sugerido no Exercício 47.)

50. Calcule a integral

$$\int \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x}\,dx$$

por dois métodos: (a) tomando $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$; (b) tomando $u = \frac{1}{2}x$ e obtendo uma integral envolvendo funções trigonométricas de u.

9.8 INTEGRAIS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS (*Suplementar*)

As funções hiperbólicas inversas podem ser aplicadas em integração e algumas vezes o seu uso abrevia consideravelmente os cálculos. Entretanto, esse procedimento não soluciona nenhum problema novo. Teremos somente novas formas de obter resultados.

Da fórmula (7) na Secção 8.5

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u$$

de onde obtemos a fórmula de integração

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \operatorname{senh}^{-1} u + C$$

Se a fórmula (1) da Secção 8.5 for usada para expressar $\operatorname{senh}^{-1} u$ como logaritmo natural, obteremos o teorema a seguir.

9.8.1 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \operatorname{senh}^{-1} u + C = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C$$

A fórmula (8) da Secção 8.5 é

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u \qquad \text{onde } u > 1$$

de onde segue que

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + C \qquad \text{se } u > 1$$

Combinando esse resultado com a fórmula (2) da Secção 8.5, obtemos o teorema a seguir.

9.8.2 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + C$$
$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + C \quad \text{se } u > 1$$

As fórmulas (9) e (10) da Secção 8.5 são, respectivamente,

$$D_x(\operatorname{tgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| < 1$$

$$D_x(\operatorname{cotgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| > 1$$

Das duas fórmulas acima obtemos

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \begin{cases} \operatorname{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \operatorname{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

Com essa fórmula e com as fórmulas (3) e (4) da Secção 8.5 temos o próximo teorema.

9.8.3 TEOREMA

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \begin{cases} \operatorname{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \operatorname{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C \quad \text{se } u \neq 1$$

Temos também as três fórmulas dadas no teorema a seguir.

9.8.4 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C$$
$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad \text{se } a > 0 \qquad (1)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C$$
$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \quad \text{se } u > a > 0 \qquad (2)$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \frac{1}{a} \operatorname{cotgh}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C \quad \text{se } u \neq a \text{ e } a \neq 0 \qquad (3)$$

Prova Podemos provar as fórmulas encontrando as derivadas do segundo membro e obtendo o integrando, ou, ainda mais diretamente, usando uma substitui-

ção por função hiperbólica. A prova de (1), derivando o segundo membro, é a seguinte:

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

e como $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$; assim,

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

Para obter a representação com logaritmo natural usamos a fórmula (1) da Secção 8.5 e temos

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} = \ln\left(\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a}\right)$$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a$$

Logo,

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a + C$$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C_1$$

onde $C_1 = C - \ln a$.

A demonstração de (2) por uma substituição por função hiperbólica usa a identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. Seja $u = a \cosh x$, onde $x > 0$; então $du = a \operatorname{senh} x\, dx$ e $x = \cosh^{-1}(u/a)$. Substituindo no integrando, obtemos

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2 \cosh^2 x - a^2}}$$

$$= \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

$$= \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\operatorname{senh}^2 x}}$$

Como $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$. Além disso, como $x > 0$, $\operatorname{senh} x > 0$; Logo, $\sqrt{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{senh} x$. Então,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{a \operatorname{senh} x}$$

$$= \int dx$$

$$= x + C$$

$$= \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

A representação com logaritmo natural pode ser obtida de forma semelhante à que foi usada na fórmula (1). A demonstração da fórmula (3) será deixada como exercício (veja o Exercício 23). ■

As fórmulas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 dão uma representação alternativa da integral em questão. Ao calcular uma integral, na qual uma dessas fórmulas ocorre, a representação por função hiperbólica inversa pode ser mais fácil de usar e às vezes, menos incômoda para escrever. Observe que a forma com logaritmos naturais da fórmula (3) foi obtida na Secção 9.5, usando frações parciais.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$$

Solução Vamos aplicar a fórmula (1), depois de completar o quadrado.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 4}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} \\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C \\ &= \ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}) + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Solução De (2)

$$\begin{aligned}\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \cosh^{-1}\frac{x}{5}\Big]_6^{10} \\ &= \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1{,}2\end{aligned}$$

Com uma calculadora obtemos $\cosh^{-1} 2 \approx 1{,}32$ e $\cosh^{-} 1{,}2 \approx 0{,}62$. Assim,

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} \approx 0{,}70$$

Em vez de aplicar as fórmulas, as integrais com as formas daquelas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 podem ser obtidas usando uma substituição por função hiperbólica e procedendo de forma similar àquela usada para substituição trigonométrica.

EXEMPLO 3 Calcule a integral do Exemplo 1 sem usar uma fórmula, mas usando uma substituição por função hiperbólica.

Solução Na solução do Exemplo 1 a integral dada foi reescrita como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

Se $x - 3 = 2 \operatorname{senh} u$, então $dx = 2 \cosh u\, du$ e $u = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{2}(x-3)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} &= \int \frac{2\cosh u\, du}{\sqrt{4\operatorname{senh}^2 u + 4}} \\
&= \int \frac{2\cosh u\, du}{2\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + 1}} \\
&= \int \frac{\cosh u\, du}{\sqrt{\cosh^2 u}} \\
&= \int \frac{\cosh u\, du}{\cosh u} \\
&= \int du \\
&= u + C \\
&= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado do Exemplo 1.

EXERCÍCIOS 9.8

Nos Exercícios de 1 a 16, expresse a integral indefinida em termos de uma função hiperbólica inversa e como um logaritmo natural.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{25-x^2}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-16}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{4e^x - e^{-x}}$
7. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{5-e^{-2t}}}$
10. $\displaystyle\int \frac{dw}{4w-w^2-3}$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-4x-x^2}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+24}$
14. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-6z-8}}$
15. $\displaystyle\int \frac{3\,dw}{w\sqrt{4\ln^2 w+9}}$
16. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$

Nos Exercícios de 17 a 22, calcule a integral definida e expresse a resposta em termos de um logaritmo natural.

17. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$
18. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1-x^2}$
19. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$
20. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
21. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}$
22. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$

23. Prove a fórmula (3) usando uma substituição por função hiperbólica.
24. Uma curva passa pelo ponto $(0, a)$, $a > 0$ e a inclinação em qualquer ponto é $\sqrt{y^2/a^2 - 1}$. Prove que a curva é uma catenária.
25. Um homem com um pára-quedas salta de um avião e quando o pára-quedas se abre, sua velocidade é de 60 m/s. Se v m/s for sua velocidade t s após a abertura do pára-quedas

$$\frac{324}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 324 - v^2$$

Resolva essa equação diferencial para obter

$$t = \frac{18}{g}\left(\operatorname{cotgh}^{-1}\frac{v}{18} - \operatorname{cotgh}^{-1}\frac{5}{3}\right)$$

26. Mostre que $\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$, usando uma substituição trigonométrica para calcular $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$.

27. A região limitada pela curva $y = (16 - x^2)^{-1/2}$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$ gira em torno do eixo x. Mostre que o volume do sólido gerado é $\frac{1}{4}\pi[\operatorname{tgh}^{-1}\frac{3}{4} - \operatorname{tgh}^{-1}(-\frac{1}{2})]$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 E REVISÃO DE INTEGRAÇÃO

Nos Exercícios de 1 a 62, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{tg}^2 4x \cos^4 4x\, dx$

2. $\int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x}\, dx$

3. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - e^x}}$

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

5. $\int \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}\, dx$

6. $\int \frac{dt}{t^4 + 1}$

7. $\int \cos^2 \tfrac{1}{3}x\, dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1}\, dx$

9. $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3}\, dx$

10. $\int \frac{dy}{\sqrt{y} + 1}$

11. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$

12. $\int \cos 0 \cos 2\theta\, d\theta$

13. $\int \frac{dx}{x + x^{4/3}}$

14. $\int t\sqrt{2t - t^2}\, dt$

15. $\int (\sec 3x + \operatorname{cosec} 3x)^2\, dx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

17. $\int \frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t}\, dt$

18. $\int x^3 e^{3x}\, dx$

19. $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}\, dx$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}\, dx$

21. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx$

22. $\int t \operatorname{sen}^2 2t\, dt$

23. $\int \frac{dr}{\sqrt{3 - 4r - r^2}}$

24. $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\, dx$

25. $\int x^3 \cos x^2\, dx$

26. $\int \frac{y\, dy}{9 + 16y^4}$

27. $\int e^{t/2} \cos 2t\, dt$

28. $\int \frac{du}{u^{5/8} - u^{1/8}}$

29. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{4 + \operatorname{sen}^4 x}\, dx$

30. $\int \frac{\sqrt{w - a}}{w}\, dw,\ a > 0$

31. $\int \operatorname{sen}^5 nx\, dx$

32. $\int \frac{dx}{x \ln x(\ln x - 1)}$

33. $\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$

34. $\int \frac{dx}{5 + 4\sec x}$

35. $\int \frac{2y^2 + 1}{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}\, dy$

36. $\int \frac{x^5\, dx}{(x^2 - a^2)^3}$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x}$

38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

39. $\int \sqrt{4t - t^2}\, dt$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + 3x^2}}$

41. $\int \frac{dx}{x^4 - x}$

42. $\int \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}\, dt$

43. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - 9e^{2x}}}$

44. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos 2x}$

45. $\int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$

46. $\int \frac{\operatorname{cotg} x\, dx}{3 + 2\operatorname{sen} x}$

47. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

48. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - 6 - x^2}}$

49. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{cosec} x}$

50. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

51. $\int \frac{\cos 3t\, dt}{\operatorname{sen} 3t\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t - \frac{1}{4}}}$

52. $\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 34)^2}$

53. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^4}\, dx$

54. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x\, dx$

55. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t}}{\sqrt{1 - 2t}}\, dt$

56. $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{x - 1}}}$

58. $\int \frac{dx}{2 + 2\operatorname{sen} x + \cos x}$

59. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$

61. $\int x^n \ln x\, dx$

62. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x\, dx,\ n > 0$

Nos Exercícios de 63 a 94, calcule a integral definida.

63. $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos x}\, dx$

64. $\int_{1/2}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$

65. $\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2}\, dx$

66. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

67. $\int_0^2 \frac{t^3\, dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

68. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\, dt$

69. $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2\, dx}{(16 - x^2)^{3/2}}$

70. $\int_0^1 \frac{xe^x\, dx}{(1 + x)^2}$

71. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x\,dx$

72. $\int_0^2 \frac{(1-x)\,dx}{x^2+3x+2}$

73. $\int_{\pi/12}^{\pi/8} \operatorname{cotg}^3 2y\,dy$

74. $\int_0^2 (2^x + x^2)\,dx$

75. $\int_a^{a/2} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\,dx$

76. $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

77. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{(2x^2-2x+1)\,dx}{x^3+x}$

78. $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$

79. $\int_1^{10} \log_{10}\sqrt{ex}\,dx$

80. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\,dx$

81. $\int_1^2 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$

82. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} xe^{x^2}\cos x^2\,dx$

83. $\int_0^{\pi} |\cos^3 x|\,dx$

84. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\operatorname{tg}^5 x|\,dx$

85. $\int_0^{1/2} \frac{2x\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

86. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

87. $\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}}$

88. $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^4 3x}$

89. $\int_0^1 \sqrt{2y+y^2}\,dy$

90. $\int_0^4 \frac{x^2\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

91. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{12+13\cos t}$

92. $\int_0^3 \frac{dr}{(r+2)\sqrt{r+1}}$

93. $\int_0^{16} \sqrt{4-\sqrt{x}}\,dx$

94. $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}{1+\cos\frac{1}{2}t}\,dt$

95. A densidade linear de uma barra com 3 m de comprimento num ponto a x m de uma extremidade é ke^{-3x} kg/m. Encontre a massa e o centro de massa da barra.

96. Ache o centro de massa de uma barra com 4 m, se a densidade linear num ponto a x m do extremo esquerdo for $\sqrt{9+x^2}$ kg/m.

97. Ache o comprimento do arco da parábola $y^2 = 6x$ de $x = 6$ a $x = 12$.

98. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$, pela reta $x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ e pelo eixo x.

99. Ache a área da região limitada pelo laço da curva $x^2 = y^4(1 - y^2)$.

100. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = e$.

101. Ache o volume do sólido de revolução gerado ao girar em torno do eixo y a região limitada pela curva $y = \ln 2x$, pelo eixo x e pela reta $x = e$.

102. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \frac{5-x}{(x+1)^2}$, pelo eixo x e pelo eixo y gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

103. Duas substâncias químicas A e B reagem para formar a substância C e a taxa de variação da quantidade de C é proporcional ao produto das quantidades de A e B restantes em cada instante dado. Inicialmente, existem 60 g de A e 60 g de B. Para formar 5 g de C são necessários 3 g de A e 2 g de B. Após 1 h, foram formados 15 g de C. (a) Se x g de C são formados após t h, ache uma expressão para x em termos de t. (b) Ache a quantidade de C após 3 h.

104. Um tanque tem a forma de um sólido obtido ao girar a região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pelas retas $x = e$ e $x = e^2$ em torno do eixo x. Se o tanque estiver cheio de água, qual o trabalho feito ao bombear toda a água até a borda do tanque? A distância é medida em metros. Tome o eixo x positivo vertical e orientado para baixo.

105. Ache o centróide da região do Exercício 99.

106. Ache o centróide da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^2 - x^3$.

107. Ache o centróide da região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

108. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \cos x$.

109. Um lago pode ter no máximo 10.000 peixes, de forma que a taxa de crescimento dos peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 10.000 e o número presente. O lago contém inicialmente 400 peixes e 6 semanas depois havia 3.000 peixes. (a) Quantos peixes existirão no lago após 8 semanas? (b) Quando é máxima a taxa de crescimento? Isto é, após quantas semanas o lago irá conter 5.000 peixes?

110. Em uma cidade com 12.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que tiveram a gripe e ao número de pessoas que não a contraíram. Cinco dias atrás 400 pessoas estavam com gripe e hoje 1.000 pessoas já foram contagiadas. (a) Qual o número esperado de pessoas com gripe amanhã? (b) Em quantos dias a epidemia estará se alastrando o mais rápido possível? Isto é, quando é que metade da população será contagiada?

Os Exercícios 111 e 112 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

111. A extremidade vertical de um tanque de água tem 3 m de largura na borda e 2 m de profundidade, tendo a forma da região limitada pelo eixo x e pelo arco da curva $y = 2\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi x$. Se o tanque estiver cheio de água, ache a força exercida pela pressão da água na extremidade.

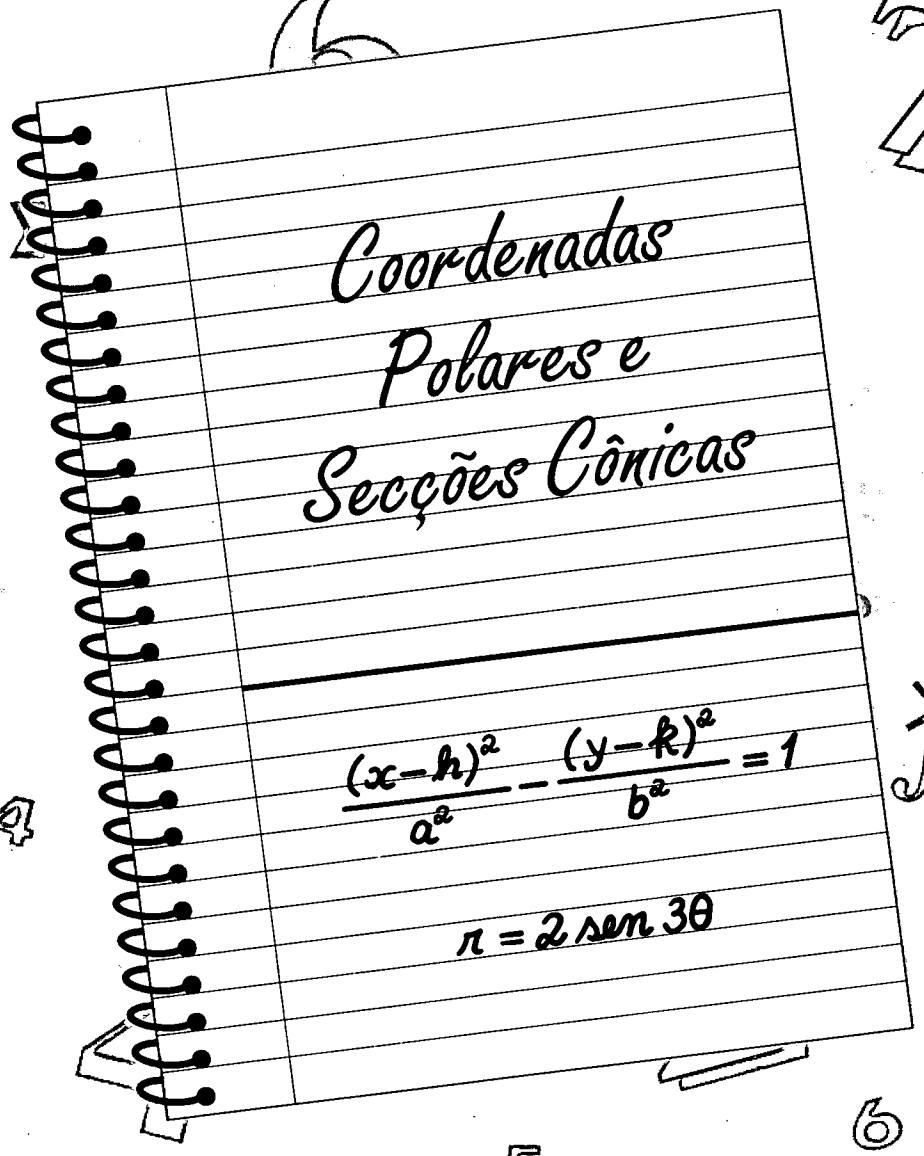
112. Uma tora tem a forma de uma região limitada por uma reta e um arco senóide. Se a tora for submersa verticalmente na água, de modo que a reta seja o limite inferior, 2 m abaixo da superfície da água, ache a força na tora, exercida pela pressão da água.

Os Exercícios 113 e 114 referem-se à Secção Suplementar 9.8. Obtenha o resultado por uma substituição da função hiperbólica.

113. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{cotgh}\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$

114. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\operatorname{senh}\left(\operatorname{tgh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$

DEZ



O conteúdo deste capítulo é oriundo da Geometria Analítica. Você pode ter estudado parte dessa matéria em um curso preparatório de Cálculo; nesse caso, tais tópicos poderão ser estudados como uma revisão, ou omitidos.

Nas quatro primeiras secções discutimos as *secções cônicas* (ou *cônicas*), que são curvas de intersecção de um plano com um cone circular reto. Há três tipos de curvas que ocorrem dessa forma: a *parábola*, a *elipse* (incluindo a circunferência como caso particular) e a *hipérbole*. A curva obtida depende da inclinação relativa entre o eixo do cone e o plano secante. O matemático grego Apolônio estudou as secções cônicas, em aproximadamente 225 a.C., em termos de Geometria, usando esta visão.

Na Secção 10.1 vamos discutir a parábola e nas duas secções seguintes trataremos da elipse e da hipérbole. Em nosso estudo de cada uma das curvas, primeiro vamos mostrar como o cone e o plano secante são tomados para obter a secção cônica em questão. Em seguida, definimos a curva como um conjunto de pontos em um plano. Foi provado que tal definição é conseqüência da definição da curva como uma secção cônica, pelo matemático belga G.P. Dandelin (1794-1847) em 1822. Variações dessa prova podem ser dadas para uma parábola e para uma hipérbole. Introduzimos a *rotação de eixos* na Secção 10.4, para podermos considerar as cônicas cujos eixos não são nem horizontais, nem verticais.

As Secções de 10.5 a 10.7 são dedicadas a uma discussão de *coordenadas polares* e algumas de suas aplicações. Há um tratamento unificado das secções cônicas que utiliza suas equações polares na Secção 10.8. Na Secção Suplementar 10.9 apresentamos retas tangentes de curvas polares.

10.1 A PARÁBOLA E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

No estudo da geometria das secções cônicas, o cone é considerado como tendo duas folhas, estendendo-se indefinidamente em ambas as direções. Uma parte do cone circular reto com duas folhas está na Figura 1. Uma **geratriz** (ou **elemento**) do cone é uma reta que está sobre o cone; todas as geratrizes de um cone contêm o ponto V, chamado **vértice**. Na Figura 2 temos um cone e um plano secante paralelo a uma e somente a uma geratriz. A cônica é uma *parábola*.

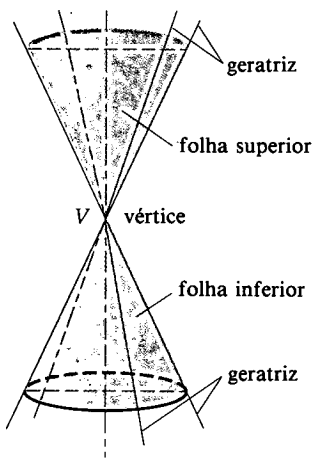


FIGURA 1

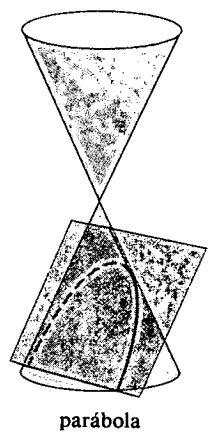


FIGURA 2

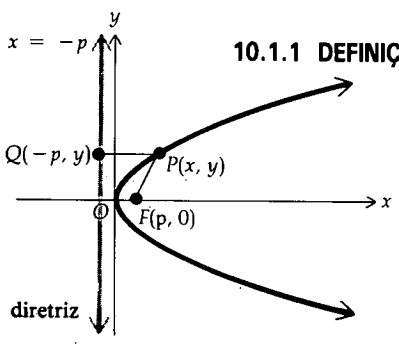


FIGURA 3

10.1.1 DEFINIÇÃO

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano, equidistantes de um ponto e de uma reta fixos. O ponto fixo é chamado de **foco** e a reta fixa é chamada de **diretriz**.

Vamos deduzir agora a equação de uma parábola a partir de sua definição. Para que essa equação seja a mais simples possível, vamos escolher o eixo x perpendicular à diretriz, contendo o foco. A origem será tomada sobre o eixo x e no ponto médio, entre a diretriz e o foco. Convém ressaltar que estamos fazendo uma escolha particular dos eixos (e *não* da parábola). Veja a Figura 3.

Seja p a distância orientada $\overline{OF}$. O foco será o ponto $F(p, 0)$, e a diretriz será a reta de equação $x = -p$. Um ponto $P(x, y)$ estará na parábola se e so-

mente se P for eqüidistante de F e da diretriz. Isto é, se $Q(-p, y)$ for o pé da perpendicular à diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

e

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

P está sobre a parábola se e somente se

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros obtemos

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

Vamos enunciar esse resultado sob a forma de teorema.

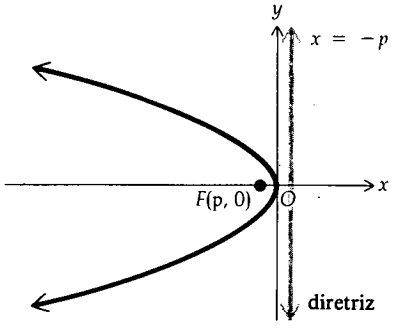


FIGURA 4

10.1.2 TEOREMA A equação da parábola com foco em $(p, 0)$, tendo como diretriz a reta $x = -p$ é

$$y^2 = 4px$$

Na Figura 3, p é positivo; mas p pode ser negativo pois é a distância orientada $\overline{OF}$. A Figura 4 mostra uma parábola para a qual $p < 0$.

Das Figuras 3 e 4 vemos que para a equação $y^2 = 4px$ a parábola abre-se para a direita, se $p > 0$ e para a esquerda, se $p < 0$. O ponto médio entre o foco e a diretriz da parábola é chamado **vértice**. O vértice das parábolas nas Figuras 3 e 4 é a origem. A reta que passa pelo vértice e pelo foco é chamada de **eixo** da parábola. O eixo das parábolas nas Figuras 3 e 4 é o eixo x.

Na dedução acima, se os eixos x e y forem trocados entre si, então o foco será o ponto $F(0, p)$ e a diretriz será a reta com equação $y = -p$. Uma equação dessa parábola é $x^2 = 4py$.

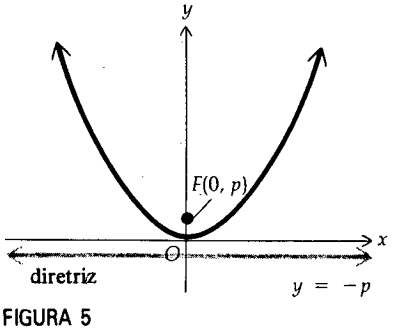


FIGURA 5

10.1.3 TEOREMA A equação da parábola com foco em $(0, p)$ e tendo como diretriz a reta $y = -p$ é

$$x^2 = 4py$$

Se $p > 0$, a parábola abre-se para cima, conforme mostra a Figura 5; se $p < 0$, a parábola abre-se para baixo, conforme mostra a Figura 6. Em cada caso, o vértice está na origem e o eixo da parábola coincide com o eixo y.

Ao fazer um esboço do gráfico de uma parábola é útil considerar a corda que passa pelo foco, perpendicular ao eixo da parábola, pois os pontos extremos dessa corda são dois pontos sobre a parábola. Tal corda é chamada de *latus rectum* da parábola. O comprimento do *latus rectum* é $|4p|$. (Veja o Exercício 20.)

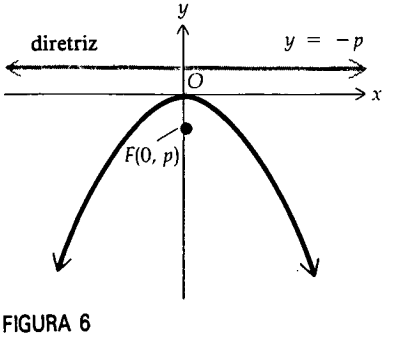


FIGURA 6

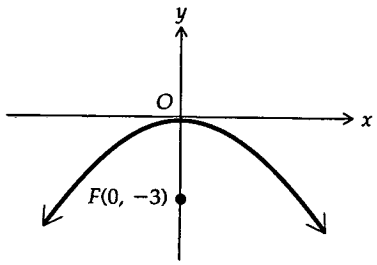


FIGURA 7

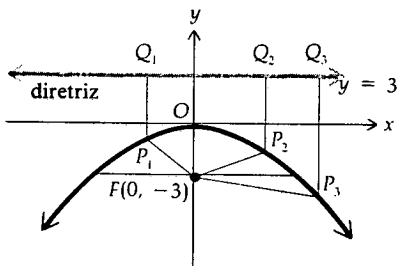


FIGURA 8

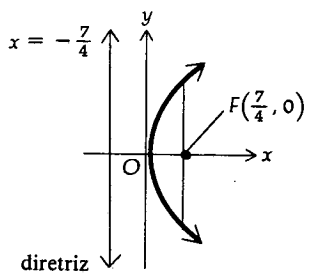


FIGURA 9

EXEMPLO 1 Ache a equação da parábola tendo seu foco em $(0, -3)$ e sendo $y = 3$ sua diretriz. Faça um esboço do gráfico.

Solução Como o foco está no eixo y e também está abaixo da diretriz, a parábola abre-se para baixo e $p = -3$. Logo, a equação da parábola é

$$x^2 = -12y$$

O comprimento do *latus rectum* é

$$|4(-3)| = 12$$

Um esboço do gráfico está na Figura 7.

Qualquer ponto sobre a parábola da Figura 7 é eqüidistante do foco e da diretriz. Na Figura 8 são mostradas três de tais pontos (P_1, P_2 e P_3) e temos

$$|\overline{FP_1}| = |\overline{P_1Q_1}| \qquad |\overline{FP_2}| = |\overline{P_2Q_2}| \qquad |\overline{FP_3}| = |\overline{P_3Q_3}|$$

EXEMPLO 2 Dada a parábola de equação $y^2 = 7x$, encontre as coordenadas do foco, a equação da diretriz e o comprimento do *latus rectum*. Faça um esboço do gráfico.

Solução A equação dada é da forma $y^2 = 4px$; assim

$$4p = 7$$

$$p = \tfrac{7}{4}$$

Como $p > 0$, a parábola abre-se para a direita. O foco está no ponto $F(\frac{7}{4}, 0)$. A equação da diretriz é $x = -\frac{7}{4}$. O comprimento do *latus rectum* é 7. Um esboço do gráfico está na Figura 9.

Para encontrar a equação geral de uma parábola com vértice num ponto distinto da origem e com diretriz paralela a um eixo coordenado, consideramos primeiro o conceito de *translação de eixos*.

Note que o formato da curva não é afetado pela posição dos eixos coordenados, mas a equação da curva é alterada.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se uma circunferência com raio 3 tiver seu centro no ponto $(4, -1)$, então a sua equação será

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

Entretanto se a origem estiver no centro, a circunferência terá uma equação mais simples, ou seja,

$$x^2 + y^2 = 9$$ ◀

Se os eixos coordenados puderem ser tomados como desejarmos, então faremos uma escolha tal que as equações resultem o mais simples possível. Se os eixos forem dados, contudo, freqüentemente queremos encontrar a equação mais simples da curva dada, referida a outro conjunto de eixos.

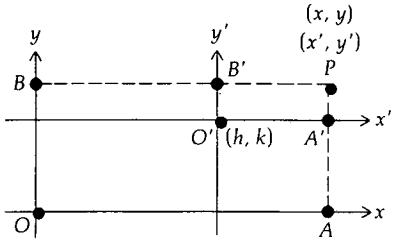


FIGURA 10

Em geral, se no plano, com x e y dados, escolhermos os novos eixos coordenados paralelos àqueles dados anteriormente, dizemos que houve uma **translação de eixos** no plano.

Vamos supor que os eixos x e y sejam transladados para os eixos x' e y' com origem no ponto (h, k) em relação aos eixos dados. Vamos supor também que os números positivos estejam do mesmo lado da origem tanto em relação aos eixos x' e y' quanto em relação aos eixos x e y. Veja a Figura 10.

Um ponto P no plano, tendo coordenadas (x, y) em relação ao sistema de coordenadas dado, terá coordenadas (x', y') em relação aos novos eixos. Para obter a relação entre esses dois conjuntos de coordenadas, trace uma reta por P, paralela aos eixos y e y' e também uma reta por P, paralela aos eixos x e x'. Suponha que a primeira reta intercepte o eixo x num ponto A e x' num ponto A', enquanto a segunda reta intercepta o eixo y num ponto B e y' num ponto B'.

Em relação aos eixos x e y, as coordenadas de P são (x, y), as coordenadas de A são $(x, 0)$ e as de A' são (x, k). Como $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$,

$$y' = y - k \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

Em relação aos eixos x e y, as coordenadas de B são $(0, y)$, e as coordenadas de B' são (h, y). Como $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$,

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad x = x' + h$$

Provamos o teorema a seguir

10.1.4 TEOREMA

Se (x, y) representa um ponto P em relação a um dado conjunto de eixos e (x', y') for a representação de P após os eixos terem sido transladados para uma nova origem com coordenadas (h, k) em relação aos eixos dados , então

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$
$$\Leftrightarrow \quad x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

Se uma equação de uma curva é dada em x e y, então uma equação em x' e y' será obtida substituindo x por $x' + h$ e y por $y' + k$. O gráfico de uma equação em x e y em relação aos eixos x e y é exatamente o mesmo conjunto de pontos que o gráfico da equação correspondente em x' e y', em relação aos eixos x' e y'.

EXEMPLO 3 Dada a equação

$$x^2 + 10x + 6y + 19 = 0$$

ache a equação do gráfico em relação aos eixos x' e y' após uma translação de eixos para a nova origem $(-5, 1)$. Faça um esboço do gráfico e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução Um ponto P representado por (x, y) em relação ao sistema de eixos anterior, tem a representação (x', y') em relação ao novo sistema de eixos. Então, do Teorema 10.1.4, com $h = -5$ e $k = 1$,

$$x = x' - 5 \quad \text{e} \quad y = y' + 1$$

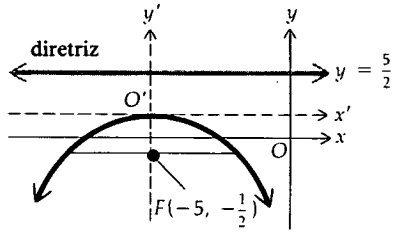


FIGURA 11

Substituindo esses valores de x e y na equação dada, obtemos

$$(x' - 5)^2 + 10(x' - 5) + 6(y' + 1) + 19 = 0$$

$$x'^2 - 10x' + 25 + 10x' - 50 + 6y' + 6 + 19 = 0$$

$$x'^2 = -6y'$$

O gráfico dessa equação em relação a x' e y' é uma parábola com vértice na origem, abrindo-se para baixo, e com $4p = -6$. O gráfico em relação aos eixos x e y é, então, uma parábola tendo seu vértice em $(-5, 1)$, seu foco em $(-5, -\frac{1}{2})$ e a reta $y = \frac{5}{2}$ como sua diretriz. Um esboço do gráfico com ambos os conjuntos de eixos está na Figura 11.

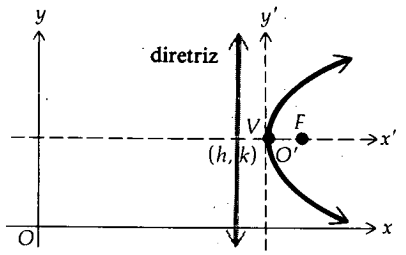


FIGURA 12

O exemplo acima ilustra como uma equação pode ser reduzida a uma forma mais simples por uma translação de eixos adequada.

Vamos aplicar a translação de eixos para encontrar a equação geral da parábola tendo diretriz paralela aos eixos coordenados e vértice no ponto (h, k). Em particular, vamos supor que a diretriz seja paralela ao eixo y. Se o vértice estiver no ponto $V(h, k)$, então a diretriz terá equação $x = h - p$ e o foco estará no ponto $F(h + p, k)$. Sejam x' e y' eixos tais que a origem O' esteja em $V(h, k)$. Veja a Figura 12.

A equação da parábola da Figura 12 em relação aos eixos x' e y' é

$$y'^2 = 4px'$$

Para obter uma equação dessa parábola em relação aos eixos x e y, substituímos x' por $x - h$ e y' por $y - k$, o que dá

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

O eixo dessa parábola é paralelo ao eixo x.

Analogamente, se a diretriz da parábola for paralela ao eixo x e o vértice estiver em $V(h, k)$, então o seu foco estará em $F(h, k + p)$ e $y = k - p$ será a equação da diretriz, e uma equação da parábola em relação aos eixos x e y será

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

O eixo dessa parábola é paralelo ao eixo y. Provamos então o teorema a seguir.

10.1.5 TEOREMA

Se p for a distância orientada do vértice ao foco, a equação da parábola com vértice em (h, k) e com eixo paralelo ao eixo x será

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{1}$$

Uma parábola com o mesmo vértice e com eixo paralelo ao eixo y tem por equação

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{2}$$

EXEMPLO 4 Ache uma equação da parábola que tenha a reta $y = 1$ como diretriz e o ponto $F(-3, 7)$ como foco. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

Solução Como a diretriz é paralela ao eixo x, o eixo será paralelo ao eixo y e a equação terá a forma (2).

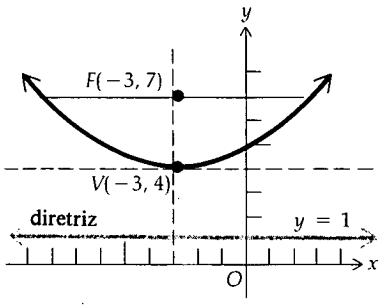


FIGURA 13

Como o vértice V está no ponto médio entre a diretriz e o foco, V tem coordenadas $(-3, 4)$. A distância orientada do vértice ao foco é p; assim

$$p = 7 - 4 \Leftrightarrow p = 3$$

Logo, a equação é

$$(x + 3)^2 = 12(y - 4)$$

Elevando ao quadrado e simplificando teremos

$$x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$$

Um esboço do gráfico da parábola está na Figura 13.

EXEMPLO 5 Dada a parábola com equação

$$y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$$

ache o vértice, o foco, a equação da diretriz, a equação do eixo e o comprimento do *latus rectum*. Faça um esboço do gráfico.

Solução Reescreva a equação dada sob a forma

$$y^2 + 8y = -6x - 1$$

Completando o quadrado dos termos envolvendo y no primeiro membro da equação e somando 16 de ambos os lados obtemos

$$y^2 + 8y + 16 = -6x + 15$$

$$(y + 4)^2 = -6(x - \tfrac{5}{2})$$

Comparando essa equação com (1), temos

$$k = -4 \qquad h = \tfrac{5}{2}$$

e

$$4p = -6 \Leftrightarrow p = -\tfrac{3}{2}$$

Logo, o vértice está em $(\frac{5}{2}, -4)$, a equação do eixo é $y = -4$ o foco está em $(1, -4)$, a equação da diretriz é $x = 4$, e o comprimento do *latus rectum* é 6. Um esboço do gráfico na Figura 14.

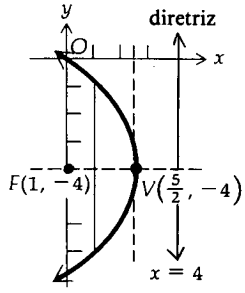


FIGURA 14

Na Secção 1.3 há uma discussão da equação geral do segundo grau em duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

onde $B = 0$ e $A = C$. Então, o gráfico de (3) é uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio. Quando o gráfico for um ponto ou o conjunto vazio, dizemos que ele é uma *circunferência degenerada*. Consideremos agora (3), onde $B = 0$ e $AC = 0$. Neste caso, $A = 0$ ou $C = 0$, mas ambos não podem ser nulos pois então teríamos, em (3), A, B e C nulos e (3) não seria uma equação do segundo grau. Suponha em (3) $B = 0$, $A = 0$ e $C \neq 0$, então temos a equação

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

Se $D \neq 0$, esta será a equação de uma parábola, pois ela pode ser obtida de (1) realizando-se as operações indicadas e reagrupando os termos. Se em (4) $D = 0$, então a equação torna-se

$$Cy^2 + Ey + F = 0$$

O gráfico dessa equação pode ser duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio; qualquer um desses gráficos será chamado de *parábola degenerada*.

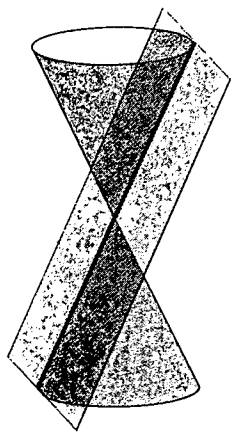
▶ **ILUSTRAÇÃO 2** O gráfico da equação $4y^2 - 9 = 0$ são duas retas paralelas; $9y^2 + 6y + 1 = 0$ é a equação de uma reta e $2y^2 + y + 1 = 0$ não é satisfeita por nenhum valor real de y. ◀

Uma discussão análoga ocorre em (3) $B = 0$, $C = 0$ e $A \neq 0$. Os resultados estão resumidos no teorema a seguir.

10.1.6 TEOREMA Se na equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F = 0$$

$B = 0$ e $A = 0$ e $C \neq 0$ ou $C = 0$ e $A \neq 0$, então o gráfico será um dos seguintes: uma parábola, duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.



reta

FIGURA 15

No começo desta secção indicamos que uma parábola é obtida como uma secção cônica quando o plano secante é paralelo a uma e somente a uma geratriz do cone. Se o plano secante contiver o vértice do cone e apenas uma geratriz, como na Figura 15, então teremos uma reta que é uma parábola degenerada. A parábola degenerada que consiste em duas retas paralelas não pode ser obtida como uma secção cônica, a não ser que consideremos um cilindro circular como um cone degenerado (com vértice no infinito). Então, um plano paralelo aos elementos do cilindro e que corte dois elementos distintos produz a parábola degenerada que consiste em duas retas paralelas.

Existe uma propriedade interessante das parábolas que tem aplicações na construção de holofotes, faróis dianteiros dos automóveis e telescópios. Na Figura 16, a reta PT é a reta tangente no ponto P ao gráfico da parábola. O ponto F é o foco da parábola e α é a medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT. A reta PR é paralela ao eixo da parábola e β é a medida do ângulo entre PR e PT. No Exercício 48 será pedido que você prove que $\alpha = \beta$. Devido a essa igualdade, num espelho parabólico de um holofote, raios de luz de uma fonte localizada no foco são refletidos ao longo de retas paralelas ao eixo. Um princípio similar envolve os refletores parabólicos nos faróis dianteiros de um automóvel. Para um espelho parabólico num telescópio refletor, ocorre uma situação inversa, onde raios de luz de um objeto no céu, que incidem no espelho paralelamente ao eixo, são refletidos por ele e passam pelo foco.

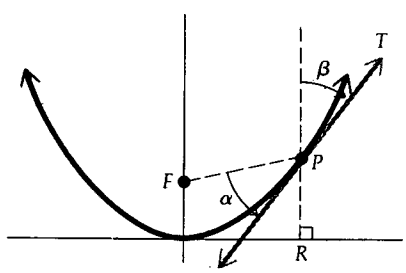


FIGURA 16

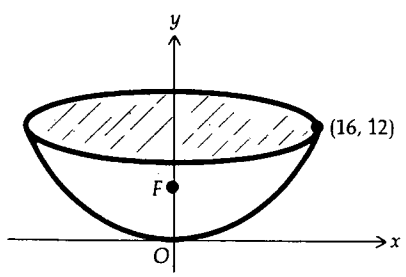


FIGURA 17

EXEMPLO 6 Um espelho parabólico tem uma profundidade de 12 cm no centro e o diâmetro na face do espelho é de 32 cm. Ache a distância do vértice ao foco.

Solução Veja a Figura 17. Os eixos coordenados são escolhidos de tal forma que a parábola tenha seu vértice na origem, seu eixo ao longo do eixo y e abra-se para cima. Logo, a equação da parábola é da forma

$$x^2 = 4py$$

onde p cm é a distância do vértice ao foco. Como o ponto (16, 12) está na parábola, suas coordenadas satisfazem a equação e temos

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = \tfrac{16}{3}$$

Logo, a distância do vértice ao foco é $5\ \frac{1}{3}$ cm.

Há outras aplicações práticas de parábolas. A trajetória de um projétil será uma parábola se o movimento for considerado num plano e a resistência do ar for desprezada. Às vezes, os arcos são parabólicos e os cabos de suspensão de pontes podem ter a forma de uma parábola. Antenas para receber os sinais de televisão via satélite são, também, parabólicas.

EXERCÍCIOS 10.1

Para cada uma das parábolas nos Exercícios de 1 a 8, ache as coordenadas do foco, a equação da diretriz e o comprimento do latus rectum. *Faça um esboço da parábola.*

1. $x^2 = 4y$ **2.** $y^2 = 6x$ **3.** $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$ **5.** $x^2 + y = 0$ **6.** $y^2 + 5x = 0$
7. $2y^2 - 9x = 0$ **8.** $3x^2 + 4y = 0$

Nos Exercícios de 9 a 17, ache uma equação da parábola com as propriedades dadas.

9. Foco (5, 0); diretriz $x = -5$.
10. Foco (0, 4); diretriz $y = -4$.
11. Foco (0, −2); diretriz $y - 2 = 0$.
12. Foco $(-\frac{5}{3}, 0)$; diretriz $5 - 3x = 0$.
13. Foco $(\frac{1}{2}, 0)$ diretriz $2x + 1 = 0$
14. Foco $(0, \frac{2}{3})$; diretriz $3y + 2 = 0$.
15. Vértice (0, 0); aberta para esquerda; o comprimento do *latus rectum* é 6.
16. Vértice (0, 0); aberta para cima; o comprimento do *latus rectum* é 3.
17. Vértice (0, 0); diretriz $2x = -5$.
18. Ache a equação da parábola que tem vértice na origem, eixo no eixo x e passa pelo ponto (2, −4).
19. Ache a equação da parábola que tem vértice na origem, eixo no eixo y e passa pelo ponto (−2, −4).
20. Prove que o comprimento do *latus rectum* de uma parábola é $|4p|$.

Nos Exercícios de 21 a 26, ache uma nova equação para o gráfico da equação dada após uma translação de eixos para a nova origem, conforme está indicado. Trace os eixos originais e os novos e faça um esboço do gráfico.

21. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$; (−3, −2)
22. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$; (3, 5)
23. $y^2 - 6x + 9 = 0$; $(\frac{3}{2}, 0)$
24. $y^2 + 3x - 2y + 7 = 0$; (−2, 1)
25. $y - 4 = 2(x - 1)^3$; (1, 4)
26. $(y + 1)^2 = 4(x - 2)^3$; (2, −1)

Nos Exercícios de 27 a 32, ache o vértice, o foco, uma equação do eixo e uma equação da diretriz da parábola dada. Faça um esboço do gráfico.

27. $x^2 + 6x + 4y + 8 = 0$ **28.** $4x^2 - 8x + 3y - 2 = 0$
29. $y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$ **30.** $3y^2 - 8x - 12y - 4 = 0$
31. $2y^2 = 4y - 3x$ **32.** $y = 3x^2 - 3x + 3$

Nos Exercícios de 33 a 40, ache uma equação da parábola com as propriedades dadas. Faça um esboço do gráfico.

33. Vértice em (2, 4); foco em (−3, 4).
34. Vértice em (1, −3); diretriz $y = 1$.
35. Foco em (−1, 7); diretriz $y = 3$.
36. Foco em $(-\frac{3}{4}, 4)$; diretriz $x = -\frac{5}{4}$.
37. Vértice em (3, −2); eixo $x = 3$; comprimento do *latus rectum* é 6.
38. Diretriz $x = -2$; eixo $y = 4$; comprimento do *latus rectum* é 8.
39. Vértice em (−4, 2); eixo $y = 2$; passa pelo ponto (0, 6).
40. Os extremos do *latus rectum* são (1, 3) e (7, 3).

41. Os extremos do *latus rectum* de uma parábola são $(5, k)$ e $(-5, k)$. Se o vértice da parábola está na origem e ela se abre para baixo, ache (a) o valor de k; (b) a equação da parábola.
42. Suponha que a água escoando por um cano horizontal a 25 m acima do chão descreva uma parábola cujo vértice está na extremidade do cano. Se num ponto 8 m abaixo da linha do cano o fluxo da água curvou-se 10 m para fora de uma linha vertical que passa pela extremidade do cano, a que distância dessa linha vertical a água atingirá o solo?
43. O cabo de uma ponte suspensa tem a forma de uma parábola quando a carga é uniformemente distribuída na horizontal. A distância entre duas colunas é 150 m, os pontos de suporte do cabo nas colunas estão 22 m acima da pista e o ponto mais baixo do cabo está 7 m acima da pista. Ache a distância vertical do cabo a um ponto na pista a 15 m do pé de uma coluna.

44. Um arco parabólico tem uma altura de 20 m e uma largura de 36 m na base. Se o vértice da parábola estiver no topo do arco, a que altura acima da base ele terá 18 m de largura?

45. Prove que, sobre uma parábola, o ponto mais próximo do foco é o vértice.

46. Suponha que a órbita de determinado cometa seja uma parábola com o Sol no foco. Quando o cometa está a 100 milhões de quilômetros do Sol, o ângulo entre o eixo da parábola e a reta do Sol até o cometa é de 45°. Use o resultado do Exercício 45 para determinar a menor distância entre o cometa e o Sol.

47. Um telescópio refletor tem um espelho parabólico para o qual a distância do vértice ao foco é 3 m. Se o diâmetro na superfície do espelho for 64 cm, qual a profundidade do espelho no centro?

48. Na Figura 16, prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão:* escolha os eixos coordenados de tal forma que a parábola tenha seu vértice na origem e seu eixo ao longo do eixo y e que se abra para cima. Seja Q a intersecção da reta tangente PT com o eixo y. Prove que $\alpha = \beta$, mostrando que ΔQPF é isósceles.)

49. A equação da diretriz de uma parábola é $x + y = 0$ e seu foco está no ponto (1, 1). Ache (a) a equação do eixo da parábola, (b) as coordenadas do vértice e (c) o comprimento do *latus rectum*.

50. Se uma parábola tiver seu foco na origem e o eixo x como eixo, prove que ela deve ter uma equação da forma $y^2 = 4kx + 4k^2$, $k \neq 0$.

51. Se os eixos forem transladados para uma nova origem tendo coordenadas (h, k), mostre que após a translação a equação $y = \text{sen } x$ torna-se $y' = A \text{ sen } x' + B \cos x' + C$, onde A, B e C são constantes. Ache A, B e C em termos de h e k. Mostre que $A^2 + B^2 = 1$.

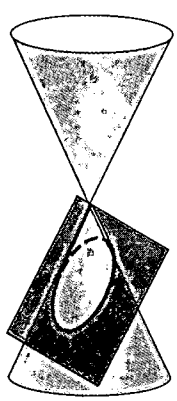
52. Mostre que após uma translação de eixos para a nova origem $(-\frac{1}{4}\pi, 1)$ a equação $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } x + \cos x) + 1$ torne-se $y' = \text{sen } x'$.

53. Usando os resultados dos Exercícios 51 e 52 como referência, determine uma translação de eixos tal que a equação $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\text{sen } x - \cos x) - 3$ torne-se $y' = \text{sen } x'$.

54. Usando os resultados dos Exercícios 51 e 52 como referência, determine uma translação de eixos tal que a equação $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \text{ sen } x + \cos x) + 2$ torne-se $y' = \text{sen } x'$.

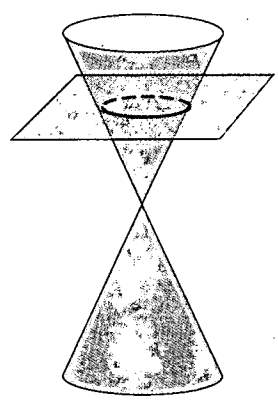
10.2 A ELIPSE

Uma *elipse* é obtida como uma secção cônica, se o plano secante não for paralelo a nenhuma geratriz e, neste caso, o plano intercepta todas as geratrizes como na Figura 1. Um caso especial da elipse é a circunferência, conforme mostra a Figura 2, formada quando o plano secante que intercepta todas as geratrizes também for perpendicular ao eixo do cone. Vamos definir agora a elipse como um conjunto de pontos num plano.



elipse

FIGURA 1



circunferência

FIGURA 2

10.2.1 DEFINIÇÃO

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de **focos**.

Seja $2c$ a distância não orientada entre os focos, onde $c > 0$. Para obter a equação de uma elipse escolhemos o eixo x como a reta que passa pelos focos F e F' e escolhemos a origem como sendo o ponto médio do segmento FF'.

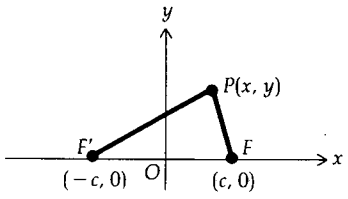


FIGURA 3

Veja a Figura 3. Os focos F e F' têm coordenadas $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, respectivamente. Seja $2a$ a soma constante mencionada na Definição 10.2.1. Então, $a > c$ e o ponto $P(x, y)$ da Figura 3 será um ponto qualquer da elipse se e somente se

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a \tag{1}$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

P está sobre a elipse se e somente se

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Vamos simplificar essa equação escrevendo-a de tal maneira que um radical fique à esquerda e outro à direita e, em seguida, elevaremos ao quadrado ambos os membros. Assim obtemos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \tag{3}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \tag{4}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \tag{5}$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{6}$$

Como $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ e podemos fazer

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{7}$$

Substituindo essa equação em (6) obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Assim mostramos que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a elipse satisfazem a equação (8). Para provar que (8) é a equação da elipse, precisamos mostrar também que todo ponto P cujas coordenadas (x, y) satisfazem (8) está sobre a elipse. Começamos com (8) e executamos as etapas em ordem inversa para obter (1). Para ir de (5) para (4) precisamos verificar que

$$a + \frac{c}{a}x \geqslant 0 \tag{9}$$

e para ir de (3) para (2) precisamos verificar que

$$2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geqslant 0 \tag{10}$$

Será pedido que você faça isto no Exercício 42. Um método alternativo para obter (1) a partir de (8) está resumido no Exercício 43. Como resultado dessa discussão temos o teorema a seguir.

10.2.2 TEOREMA Se $2a$ for a constante a que se refere a Definição 10.2.1 e a elipse tiver seus focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, então para $b^2 = a^2 - c^2$, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

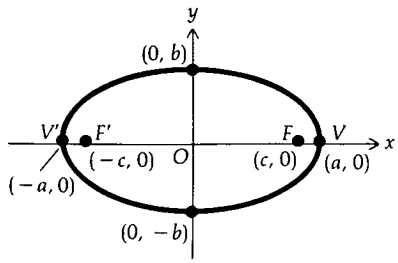


FIGURA 4

Para obter um esboço do gráfico da elipse da equação (11), observamos primeiro que o gráfico é simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Além disso, o gráfico intercepta o eixo x nos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ e intercepta o eixo y nos pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$. Veja a Figura 4 e tome-a como referência ao ler o próximo parágrafo.

A reta que passa pelos focos é chamada de **eixo principal** da elipse. Para a elipse do Teorema 10.2.2, o eixo x é o eixo principal. Os pontos de intersecção da elipse com seu eixo principal são chamados de **vértices**. Assim, para essa elipse, os vértices são $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$. O ponto sobre o eixo principal no ponto médio entre os dois vértices é chamado de **centro** da elipse. A origem é o centro dessa elipse. O segmento do eixo principal entre os dois vértices é chamado de **eixo maior** da elipse e seu comprimento é $2a$ unidades. Então, estabelecemos que a é o número de unidades no comprimento do semi-eixo maior da elipse. Para essa elipse o segmento do eixo y entre os pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$ é chamado de **eixo menor**. Seu comprimento é de $2b$ unidades. Logo, b é o número de unidades do comprimento do semi-eixo menor. Observe, de (7), que $a > b$.

A elipse é chamada de **cônica central**, em contraste com a parábola que não tem centro, pois só tem um vértice.

EXEMPLO 1 Dada a elipse com a equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ache os vértices, os focos e as extremidades do eixo menor. Faça um esboço da elipse, mostrando os focos.

Solução Da equação da elipse, $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$; assim $a = 5$ e $b = 4$. Logo, os vértices estão nos pontos $V(5, 0)$ e $V'(-5, 0)$ e as extremidades do eixo menor estão nos pontos $B(0, 4)$ e $B'(0, -4)$. De (7),

$$\begin{aligned} c^2 &= 25 - 16 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Logo, $c = 3$ e assim os focos estão em $F(3, 0)$ e $F'(-3, 0)$. Um esboço da elipse e seus focos está na Figura 5.

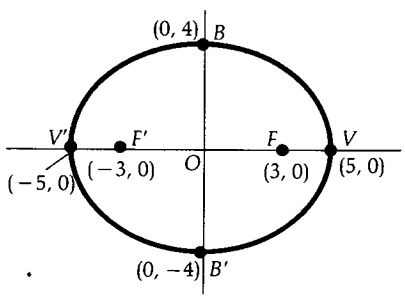


FIGURA 5

Da Definição de elipse, segue que se P for um ponto qualquer da elipse, $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$.

EXEMPLO 2 Um arco tem a forma de uma semi-elipse. Ele tem 48 m de largura na base e uma altura de 20 m. Qual a largura do arco a uma altura de 10 m acima da base?

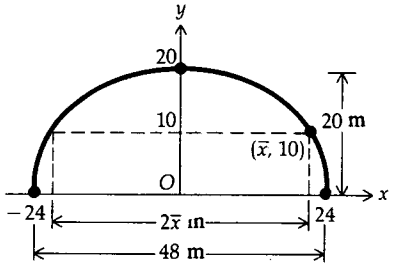


FIGURA 6

Solução A Figura 6 mostra um esboço do arco e os eixos coordenados escolhidos de tal forma que o eixo x esteja ao longo da base e a origem esteja no ponto médio da base. Então a elipse tem como eixo principal o eixo x e seu centro está na origem, $a = 24$ e $b = 20$. A equação da elipse é da forma de (11):

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Seja $2\bar{x}$ o número de metros do comprimento do arco a uma altura de 10 m acima da base. Logo, o ponto $(\bar{x}, 10)$ está na elipse. Assim,

$$\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} = 1$$

$$\bar{x}^2 = 432$$

$$\bar{x} = 12\sqrt{3}$$

Então, a uma altura de 10 m acima da base a largura do arco será $24\sqrt{3}$ m.

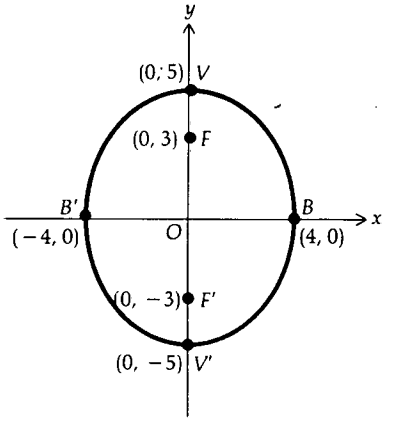


FIGURA 7

Se uma elipse tiver seu centro na origem e seu eixo principal sobre o eixo y, então a equação da elipse será da forma

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{12}$$

que é obtida de (11) substituindo x por y.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Como para uma elipse $a > b$, segue que a elipse com equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

tem seu foco sobre o eixo y. Essa elipse tem a mesma forma que a elipse do Exemplo 1. Os vértices estão em (0, 5) e (0, −5) e os focos estão em (0, 3) e (0, −3). Um esboço do gráfico dessa elipse está na Figura 7. ◄

Se o centro de uma elipse estiver no ponto (h, k) em vez de estar na origem, e se o eixo principal for paralelo a um dos eixos coordenados, então por uma translação de eixos tal que o ponto (h, k) seja a nova origem, a equação da elipse $\bar{x}^2/a^2 + \bar{y}^2/b^2 = 1$, se o eixo principal for horizontal e $\bar{y}^2/a^2 + \bar{x}^2/b^2 = 1$, se o eixo principal for vertical. Como $\bar{x} = x - h$ e $\bar{y} = y - k$, essas equações em termos de x e y resultam

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{13}$$

se o eixo principal for horizontal e

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \tag{14}$$

se o eixo principal for vertical.

Lembrando que dada a equação geral de segundo grau em duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $B = 0$ e $A = C$, o gráfico será uma circunferência ou um caso degenerado de circunferência, sendo um ponto ou o conjunto vazio. Vamos discutir agora essa equação quando $B = 0$ e A e C não são necessariamente iguais, mas $AC > 0$.

Se eliminarmos as frações e combinarmos os termos em (13) e (14), obteremos uma equação da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{15}$$

onde $A \neq C$ se $a \neq b$ e $AC > 0$. Pode ser mostrado, completando os quadrados em x e y, que uma equação da forma (15) pode ser posta na forma

$$\frac{(x-h)^2}{\frac{1}{A}} + \frac{(y-k)^2}{\frac{1}{C}} = G \tag{16}$$

Se $AC > 0$ então A e C têm o mesmo sinal. Se G tiver o mesmo sinal que A e C, então (16) poderá ser escrito na forma (13) ou (14). Assim sendo, o gráfico de (15) é uma elipse.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Dada a equação

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$$

que pode ser escrita como

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -51$$

Completando os quadrados em x e y obtemos

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -51 + 24 + 81$$

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 54$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 54$$

Essa é uma equação na forma (16). Dividindo ambos os membros por 54 teremos

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$$

que tem a forma (13) ◀

Se em (16) G tiver sinal oposto a A e C, então (16) não será satisfeita para nenhum valor real de x e de y. Logo, o gráfico de (15) será o conjunto vazio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que (15) seja

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

Então, após completar os quadrados em x e y, teremos

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = -115 + 24 + 81$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = -10 \tag{17}$$

Essa equação tem a forma (16) onde $G = -10$, $A = 6$ e $C = 9$. Para todos os valores de x e y, o primeiro membro de (17) é não-negativo; logo, o gráfico de (17) é o conjunto vazio. ◀

Se $G = 0$ em (16), então a equação é satisfeita somente pelo ponto (h, k). Logo, o gráfico de (15) é um ponto.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Uma vez que a equação

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

pode ser escrita como

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 0$$

o seu gráfico é o ponto (2, 3). ◀

Se o gráfico de (15) for um ponto ou o conjunto vazio, diremos que o gráfico será degenerado.

Se $A = C$ em (15), temos uma circunferência ou um caso de circunferência degenerado, conforme já mencionamos antes. A circunferência é uma forma limite de elipse. Esse fato pode ser mostrado considerando a relação entre a, b e c para uma elipse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Dessa equação, vemos que à medida que c tende a zero, b^2 tende a a^2. Se $b^2 = a^2$, (13) e (14) tornam-se

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

que é a equação de uma circunferência com centro em (h, k) e raio a. Os resultados da Secção 1.3 para a circunferência são os mesmos que aqueles obtidos de (15) para a elipse.

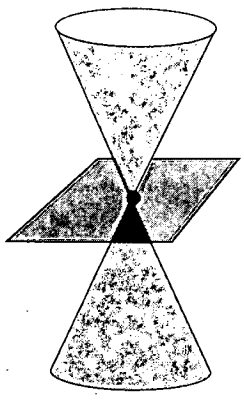
Os resultados da discussão acima estão resumidos no teorema a seguir.

10.2.3 TEOREMA Se na equação genérica de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$ e $AC > 0$, então o gráfico será uma elipse, um ponto, ou ainda, o conjunto vazio. Além disso, se $A = C$, então o gráfico será uma circunferência ou um ponto, ou ainda, o conjunto vazio.

O caso degenerado de elipse, um ponto, será obtido como uma secção cônica se o plano secante passar pelo vértice do cone, mas não contiver nenhuma geratriz. Veja a Figura 8.



ponto

FIGURA 8

EXEMPLO 3 Determine o gráfico da equação

$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1.119 = 0$$

Solução Do Teorema 10.2.3, como $B = 0$ e $AC > 0$, o gráfico é uma elipse ou é degenerado. Completando os quadrados em x e y teremos

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1.119 + 225 + 256$$

$$25(x+3)^2 + 16(y-4)^2 = 1.600$$

$$\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{100} = 1 \tag{18}$$

Essa equação é da forma (14); assim, o gráfico é uma elipse com eixo principal paralelo ao eixo y e centro em $(-3, 4)$.

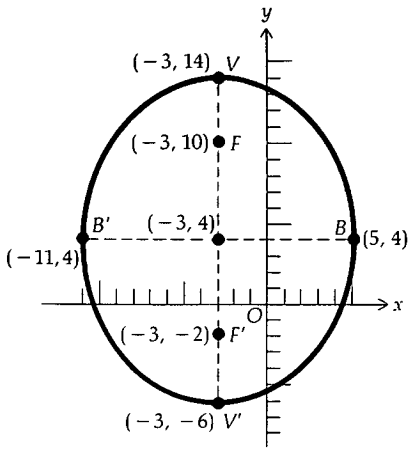


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Dada a elipse do Exemplo 3, ache os vértices, os focos e as extremidades do eixo menor. Faça um esboço da elipse e mostre os focos.

Solução De (18) segue que $a = 10$ e $b = 8$. Como o centro da elipse está em $(-3, 4)$ e o eixo principal é vertical, os vértices estão nos pontos $V(-3, 14)$ e $V'(-3, -6)$. As extremidades do eixo menor estão nos pontos $B(5, 4)$ e $B'(-11, 4)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$,

$$64 = 100 - c^2$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$

Assim, a distância do centro a um foco é 6 e, portanto, os focos estão nos pontos $F(-3, 10)$ e $F'(-3, -2)$. Um esboço da elipse com os pontos pedidos está na Figura 9.

EXEMPLO 5 Ache a equação de elipse, dados os focos $(-8, 2)$ e $(4, 2)$ e cuja constante mencionada na Definição 10.2.1 é 18. Faça um esboço da elipse.

Solução O centro da elipse é o ponto médio do segmento que une os focos; logo é $(-2, 2)$. A distância entre os focos de uma elipse é $2c$ e a distância entre $(-8, 2)$ e $(4, 2)$ é 12. Logo $c = 6$. A constante mencionada na Definição 10.2.1 é $2a$; assim $2a = 18$ e $a = 9$. Como $b^2 = a^2 - c^2$,

$$b^2 = 81 - 36$$

$$b^2 = 45$$

$$b = 3\sqrt{5}$$

O eixo principal é paralelo ao eixo x; logo, a equação da elipse é da forma (13). Como (h, k) é o ponto $(-2, 2)$, $a = 9$ e $b = 3\sqrt{5}$, a equação pedida é

$$\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$$

Um esboço dessa elipse está na Figura 10.

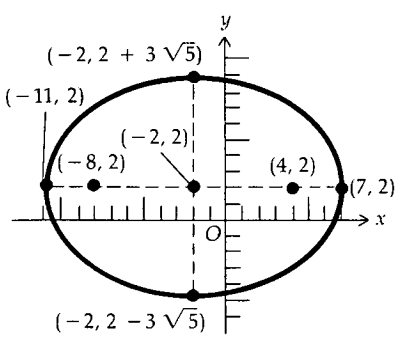


FIGURA 10

Existem aplicações de elipses em Astronomia, pois as órbitas dos planetas e satélites são elipses. Elas também são usadas para fazer engrenagens de máquinas. Arcos e pontes têm por vezes a forma elíptica.

Existe uma propriedade reflexiva da elipse que é análoga à que foi mostrada para a parábola na Figura 16 da Secção 10.1. Para a elipse, consulte a Figura 11, onde a reta PT é a reta tangente em P ao gráfico da elipse, com focos em F e F'. A medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT é α, e a medida do ângulo entre o segmento de reta $F'P$ e a reta tangente PT é β. No Exercício 31 será pedido que você prove a igualdade $\alpha = \beta$. Logo, um raio de luz de uma fonte colocada em um foco de um espelho elíptico atingindo o espelho é refletido numa reta que passa pelo outro foco. Essa proprie-

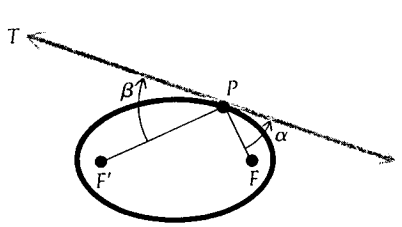


FIGURA 11

dade das elipses é usada nas chamadas "galerias dos cochichos", onde o teto tem secções transversais que são arcos de elipse com foco comum. Uma pessoa localizada em um foco F pode ouvir uma outra pessoa cochichando no outro foco F', pois as ondas sonoras emitidas em F' atingem o forro e são refletidas por ele ao ouvinte em F. Um exemplo famoso disso é a cúpula do Capitólio em Washington, nos Estados Unidos.

EXERCÍCIOS 10.2

Nos Exercícios de 1 a 16, ache o centro, vértices, focos e extremidades do eixo menor da elipse dada. Faça um esboço da curva, mostrando os focos.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 9y^2 = 4$
3. $25x^2 + 4y^2 = 100$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $2x^2 + 3y^2 = 18$
6. $64x^2 + y^2 = 16$
7. $16x^2 + 4y^2 = 1$
8. $3x^2 + 4y^2 = 9$
9. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
11. $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$
12. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$
14. $3x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 100 = 0$
15. $3x^2 + 5y^2 - 6x - 12 = 0$
16. $2x^3 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$

Nos Exercícios 17 e 18, determine se o gráfico da equação dada é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

17. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
18. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

Nos Exercícios de 19 a 28, ache uma equação da elipse tendo as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

19. Vértices em $(-\frac{5}{2}, 0)$ e $(\frac{5}{2}, 0)$ e um foco em $(\frac{3}{2}, 0)$.
20. Focos em $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e a constante mencionada na Definição 10.2.1 é 20.
21. Focos em $(0, 3)$ e $(0, -3)$ e a constante mencionada na Definição 10.2.1 é $6\sqrt{3}$.
22. Centro na origem, focos sobre o eixo x, o comprimento do eixo maior é três vezes o do eixo menor e passa pelo ponto $(3, 3)$.
23. Vértices em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e passa pelo ponto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
24. Vértices em $(0, 5)$ e $(0, -5)$ e passa pelo ponto $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{5})$.
25. Centro em $(4, -2)$, um vértice em $(9, -2)$, e um foco em $(0, -2)$.
26. Um foco em $(2, -3)$, um vértice em $(2, 4)$, e centro sobre o eixo x.
27. Focos em $(-1, -1)$ e $(-1, 7)$ e o semi-eixo maior com 8 unidades de comprimento.
28. Focos em $(2, 3)$ e $(2, -7)$ e o comprimento do semi-eixo menor é dois terços do comprimento do semi-eixo maior.
29. Ache a equação da reta tangente à elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ no ponto $(3, 2)$.
30. Mostre que a equação da reta tangente à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0) da elipse é $x_0\,x/a^2 + y_0\,y/b^2 = 1$.
31. Na Figura 11 prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão:* escolha os eixos coordenados de tal forma que o centro da elipse esteja na origem e os eixos, ao longo dos eixos coordenados. Então use o Teorema 1.6.8.)
32. A órbita da Terra em torno do Sol é uma elipse com o Sol em um foco e um semi-eixo maior com 149,5 milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de 5,08 milhões de quilômetros, ache (a) a menor distância entre a Terra e o Sol e (b) a maior distância entre a Terra e o Sol.
33. O teto de um saguão com 10 m de largura tem a forma de uma simi-elipse com 9 m de altura no centro e 6 m de altura nas paredes laterais. Ache a altura do teto a 2 m de cada parede.
34. O arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com um vão horizontal de 40 m e com 16 m de altura no centro. Qual a altura do arco a 9 m à esquerda ou à direita do centro?
35. Suponha que a órbita de um planeta tenha a forma de uma elipse com eixo maior cujo comprimento é 500 milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de 400 milhões de quilômetros, ache a equação da órbita.
36. Uma bola de futebol americano tem 30 cm de comprimento e uma secção plana contendo uma costura é uma elipse cujo eixo menor tem 13 cm. Ache o volume da bola se o couro é tão duro que qualquer secção transversal é um quadrado.
37. Resolva o Exercício 36, se toda secção transversal for uma circunferência.
38. A Definição 10.2.1 apresenta um procedimento para fazermos o gráfico de uma elipse. Para aplicar o método a $4x^2 + 9y^2 = 36$, determine primeiro os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Obtenha os focos sobre o eixo x usando um compasso com o centro em um dos pontos de intersecção com o eixo y e com raio 3. Aperte então, em cada foco, um percevejo. Pegue um barbante com comprimento 6, que é $2a$ e prenda as duas extremidades, uma em cada percevejo. Apoie um lápis contra o barbante e estique-o. Movendo o lápis de forma a manter o barbante esticado, trace uma curva. Essa curva é uma elipse, pois o lápis traça o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias aos percevejos é a constante 6.

39. Para a elipse cuja equação é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

onde $a > b > 0$, ache as coordenadas dos focos em termos de h, k, a e b.

Os Exercícios 40 a 41 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

40. Uma placa tem a forma da região limitada por uma elipse com semi-eixo maior de 3 cm e com semi-eixo menor de 2 cm. Se a placa for mergulhada verticalmente em um tanque com água até que o eixo menor esteja na superfície da água, ache a força devido à pressão da água sobre um lado da parte da placa submersa.

41. Se a placa do Exercício 40 for afundada até que o centro fique 3 cm abaixo da superfície da água, ache a força da pressão da água em um lado da placa. O eixo menor continua horizontal.

42. Percorrendo em sentido inverso as etapas na obtenção da equação (8) a partir da equação (1), prove que se $P(x, y)$ for qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem (8), então

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$$

onde F e F' são os focos da elipse na Figura 3 (*Sugestão:* Para mostrar a desigualdade (9), use o fato de que $a > c > 0$ e que para todo ponto (x, y) satisfazendo (8), $-a \leqslant x \leqslant a$. Para mostrar a desigualdade (10), mostre primeiro que $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x$ substituindo y^2 por $b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ e usando (7).)

43. Ao invés de seguir, no sentido inverso, as etapas usadas para obter a equação (8) a partir da equação (1), um método alternativo de obter (1) a partir de (8) é o seguinte:

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2(x-c)^2+a^2y^2} + \sqrt{a^2(x+c)^2+a^2y^2}\right)$$

Substituindo a^2y^2 por $a^2b^2 - b^2x^2$, e usando (7) obtemos

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = \left|a-\frac{c}{a}x\right| + \left|a+\frac{c}{a}x\right|$$

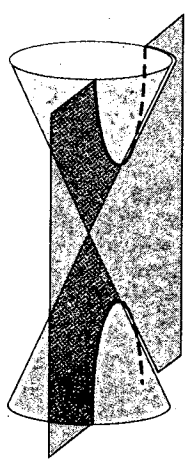
Mostre que o segundo membro acima é $2a$, usando o fato de que $a > c > 0$ e que para todo (x, y) satisfazendo (8), $-a \leqslant x \leqslant a$.

10.3 A HIPÉRBOLE

Quando o plano secante for paralelo a duas geratrizes, ele interceptará ambas as folhas do cone e a secção cônica obtida será uma *hipérbole* mostrada na Figura 1. A seguir, temos a definição de hipérbole como um conjunto de pontos no plano.

10.3.1 DEFINIÇÃO

Uma **hipérbole** é o conjunto de pontos no plano, cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Os dois pontos fixos são denominados **focos**.



hipérbole
FIGURA 1

Para obter a equação de uma hipérbole começamos, como fizemos com a elipse, tomando a distância entre os focos igual a $2c$, onde $c > 0$. Então, escolhemos o eixo x como sendo a reta suporte dos focos F e F' e tomamos a origem no ponto médio do segmento FF'. Consulte a Figura 2. Os pontos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ são os focos F e F', respectivamente. Seja $2a$ a constante mencionada na Definição 10.3.1. Na Figura 2, o ponto $P(x, y)$ representa um ponto qualquer da hipérbole. Então, da Definição 10.3.1,

$$\left|\,|\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\,\right| = 2a \tag{1}$$

Para determinar a relação entre a e c, usamos o fato de que a soma dos comprimentos dos lados de um triângulo é maior do que o comprimento do terceiro lado e escrevemos as duas desigualdades

$$|\overline{F'F}| + |\overline{FP}| > |\overline{F'P}| \qquad |\overline{F'F}| + |\overline{F'P}| > |\overline{FP}|$$

$$|\overline{F'F}| > |\overline{F'P}| - |\overline{FP}| \qquad |\overline{F'F}| > |\overline{FP}| - |\overline{F'P}|$$

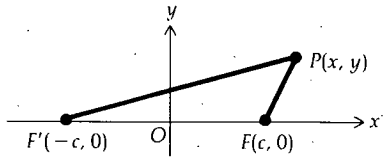


FIGURA 2

Usando valor absoluto, essas desigualdades podem ser escritas como a desigualdade

$$|\overline{F'F}| > \big||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\big|$$

Como $|\overline{F'F}| = 2c$ e $\big||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\big| = 2a$, temos

$$2c > 2a$$

$$c > a \tag{2}$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

então de (1), P estará na hipérbole se e somente se

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

ou, equivalentemente, sem as barras de valor absoluto,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\pm\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 = c^2 - a^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \tag{3}$$

Como, de (2), $c > a$, podemos tomar

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), temos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Provamos que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P na hipérbole satisfazem a equação (5). Para provar que (5) é a equação da hipérbole precisamos mostrar que todo ponto P cujas coordenadas satisfazem (5) está na hipérbole. Será pedido que você prove isso no Exercício 41. O procedimento é similar ao indicado na Secção 11.2 para a elipse, conforme foi esquematizado nos Exercícios 42 e 43 dessa secção. Essa discussão nos dá o teorema a seguir.

10.3.2 TEOREMA Se $2a$ for a constante à qual se refere a Definição 10.3.1 e a hipérbole tiver focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, então se $b^2 = c^2 - a^2$, uma equação da hipérbole será

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

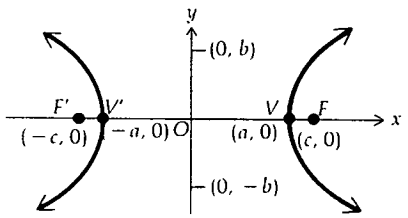


FIGURA 3

Um esboço do gráfico da hipérbole do Teorema 10.3.2 é ilustrado na Figura 3. Vamos mostrar agora como ele é obtido. Da equação, observamos que o gráfico é simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Da mesma forma que a elipse, a reta que passa pelos focos é chamada de **eixo principal** da hipérbole. Assim, para essa hipérbole o eixo x é o eixo principal. Os pontos onde o gráfico intercepta o eixo principal são chamados de **vértices**, e o ponto médio entre os vértices é denominado **centro** da hipérbole. Para essa hipérbole, os vértices estão em $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$ e o centro está na origem. O segmento $V'V$ do eixo principal é chamado de **eixo transverso** da hipérbole e seu comprimento é $2a$ unidades; asssim, a unidades é o comprimento do semi-eixo transverso.

Substituindo x por zero em (6) obtemos $y^2 = -b^2$ que não tem solução real. Conseqüentemente, a hipérbole não intercepta o eixo y. Entretanto, o segmento de reta com extremidades em $(0, -b)$ e $(0, b)$ é chamado de **eixo conjugado** da hipérbole e seu comprimento é $2b$ unidades. Assim, b é o número de unidades no comprimento do semi-eixo conjugado.

Resolvendo (6) para y em termos de x obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{7}$$

Concluímos de (7) que se $|x| < a$, não existe valor real de y. Logo, não há nenhum ponto (x, y) da hipérbole para o qual $-a < x < a$. Vemos também de (7) que se $|x| > a$, então existem dois valores reais para y. Assim, a hipérbole tem dois *ramos*. Um deles contém o vértice $V(a, 0)$ e se estende indefinidamente à direita de V. O outro contém o vértice $V'(-a, 0)$ e se estende indefinidamente, à esquerda de V'.

Como no caso da elipse, uma vez que a hipérbole tem um centro, ela é chamada de **cônica central**.

EXEMPLO 1 Dada a hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

ache os vértices, focos e comprimentos dos eixos transverso e conjugado. Faça um esboço da hipérbole e mostre os focos.

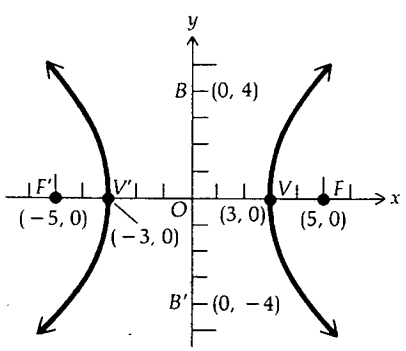


FIGURA 4

Solução A equação dada tem a forma (6); assim, $a = 3$ e $b = 4$. Os vértices estão, portanto, nos pontos $V(3, 0)$ e $V'(-3, 0)$. O número de unidades no comprimento do eixo transverso é $2a$ ou 6 e o número de unidades no comprimento do eixo conjugado é $2b$ ou 8. Como de (5) $b^2 = c^2 - a^2$, temos que $16 = c^2 - 9$; assim $c = 5$. Logo, os focos estão em $F(5, 0)$ e $F'(-5, 0)$. Um esboço da hipérbole e de seus focos está na Figura 4.

Da Definição 10.3.1, segue que se P for um ponto dessa hipérbole, então $\big||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\big| = 6$.

EXEMPLO 2 Ache uma equação da hipérbole tendo um foco em (5, 0) e os extremos do eixo conjugado em (0, 2) e (0, −2).

Solução Como os extremos do eixo conjugado estão em (0, 2) e (−2, 0), então $b = 2$, o eixo principal está no eixo x, e o centro está na origem. Logo, a equação é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como o foco está em (5, 0), $c = 5$ e como $b^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = 25 - 4$. Assim, $a = \sqrt{21}$ e a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Trocando entre si x e y na equação (6), obtemos

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{8}$$

que é a equação de uma hipérbole com centro na origem e eixo principal coincidindo com o eixo y.

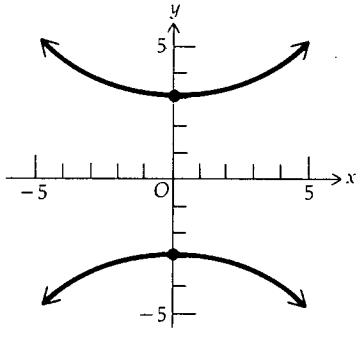


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A hipérbole com a equação

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

tem seus focos e vértices sobre o eixo y, pois apresenta a forma (8). Um esboço do gráfico dessa equação está na Figura 5. ◀

Não existe, no caso da hipérbole, uma desigualdade geral envolvendo a e b que corresponda à desigualdade $a > b$, no caso da elipse. Isto é, para uma hipérbole é possível ter $a < b$ como na Ilustração 1, onde $a = 3$ e $b = 4$; é possível também ter $a > b$, como no Exemplo 2, onde $a = \sqrt{21}$ e $b = 2$. Se, para a hipérbole, $a = b$, então dizemos que ela é **equilátera**.

Vamos provar que uma hipérbole tem assíntotas e mostrar como obter as equações dessas assíntotas. Nas Secções 2.4 e 2.5 foram definidas assíntotas verticais e horizontais do gráfico de uma função. Na Secção 4.7 discutimos também assíntotas oblíqüas de uma função racional. A seguir temos uma definição mais geral de assíntotas, sendo as definições anteriores casos particulares.

10.3.3 DEFINIÇÃO O gráfico da equação $y = f(x)$ terá a reta $y = mx + b$ como **assíntota**, se qualquer das afirmativas a seguir for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, e para algum número $M > 0$, $f(x) \neq mx + b$ sempre que $x > M$.

(ii) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, e para algum número $M < 0$, $f(x) \neq mx + b$ sempre que $x < M$.

A afirmativa (i) indica que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que

se $x > N$ então $0 < |f(x) - (mx + b)| < \epsilon$

isto é, podemos tornar os valores funcionais de $f(x)$ tão próximos do valor de $mx + b$ quanto quisermos, tomando x suficientemente grande. Isso é consistente com nossa noção intuitiva de assíntota de um gráfico. Podemos dar uma formulação semelhante para a parte (ii) da Definição 10.3.3.

Para a hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, resolvendo em y obtemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Assim, se

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

então

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \frac{b}{a}x\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right] \\ &= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 10.3.3, a reta $y = \frac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico de $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Analogamente, pode ser mostrado que a reta $y = \frac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico de $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Conseqüentemente, a reta $y = \frac{b}{a}x$ é uma assíntota da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Da mesma forma, podemos demonstrar que a reta $y = -\frac{b}{a}x$ é uma assíntota da mesma hipérbole. Temos, então, o teorema a seguir.

10.3.4 TEOREMA As retas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

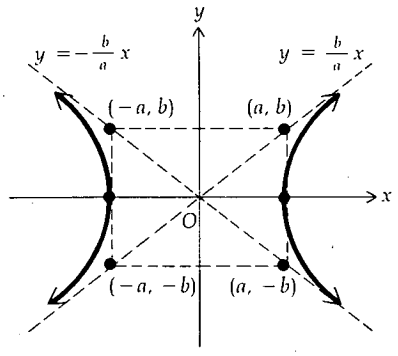


FIGURA 6

A Figura 6 mostra um esboço da hipérbole do Teorema 10.3.4, junto com suas assíntotas. Note, na figura, que as diagonais do retângulo com vértices em (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$ estão sobre as assíntotas da hipérbole. Esse retângulo é chamado **retângulo auxiliar** da hipérbole. Os vértices da hipérbole são os pontos de intersecção do eixo principal com o retângulo auxiliar. Um esboço razoável de uma hipérbole pode ser feito traçando primeiro o retângulo auxiliar e depois os ramos da hipérbole, tangenciando no seu vértice ao lado do retângulo auxiliar e aproximando assintoticamente as retas suportes das diagonais do retângulo. Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, a circunferência com centro na origem e que passa pelos vértices do retângulo auxiliar também passa pelos focos da hipérbole.

Há uma forma heurística de obter as equações das assíntotas de uma hipérbole. Por exemplo, para a hipérbole com equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, substituindo por zero o segundo membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Fatorando, teremos

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

que é equivalente a duas equações:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

as quais, pelo Teorema 10.3.4, são equações das assíntotas da hipérbole dada. Usando essa heurística para a hipérbole com equação (8), vemos que as assíntotas são as retas de equações

$$\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 0$$

que coincidem com as assíntotas da hipérbole com equação $x^2/b^2 - y^2/a^2 = 1$. Essa hipérbole e aquela dada pela equação (8) são chamadas **hipérboles conjugadas**.

As assíntotas de uma hipérbole equilátera ($a = b$) são perpendiculares entre si. O retângulo auxiliar, neste caso, é um quadrado e os eixos transverso e conjugado têm o mesmo comprimento.

Se o centro de uma hipérbole estiver em (h, k) e seu eixo principal for paralelo ao eixo x, então se os eixos forem transladados de forma que o ponto (h, k) seja a nova origem, a equação da hipérbole em relação ao novo sistema de coordenadas será $\bar{x}^2/a^2 - \bar{y}^2/b^2 = 1$. Substituindo $\bar{x}$ por $x - h$ e $\bar{y}$ por $y - k$ essa equação torna-se

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{9}$$

Da mesma forma, a equação da hipérbole com centro em (h, k) e eixo principal paralelo ao eixo y é

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \tag{10}$$

EXEMPLO 3 Os vértices de uma hipérbole estão em $(-5, -3)$ e $(-5, -1)$ e as extremidades do eixo conjugado estão em $(-7, -2)$ e $(-3, -2)$. Ache a equação da hipérbole e a equação das assíntotas. Faça um esboço da hipérbole e das assíntotas.

Solução A distância entre os vértices é $2a$; logo $2a = 2$ e $a = 1$. O comprimento do eixo conjugado é $2b$; assim $2b = 4$ e $b = 2$. Como o eixo principal é paralelo ao eixo y, a equação da hipérbole é da forma (10). O centro (h, k) está no ponto médio do segmento que une os vértices, sendo, portanto, o ponto $(-5, -2)$. Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$$

Usando a heurística para obter as equações das assíntotas temos

$$\left(\frac{y+2}{1} - \frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{y+2}{1} + \frac{x+5}{2}\right) = 0$$

que dá

$$y + 2 = \tfrac{1}{2}(x+5) \quad \text{e} \quad y + 2 = -\tfrac{1}{2}(x+5)$$

Um esboço da hipérbole e das assíntotas está na Figura 7.

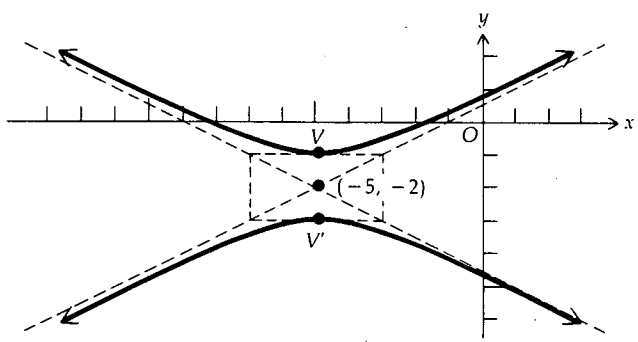


FIGURA 7

Se em (9) e (10) eliminarmos as frações e combinarmos os termos, as equações resultantes serão da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{11}$$

onde A e C têm sinais opostos; isto é $AC < 0$. Agora queremos mostrar que o gráfico de uma equação da forma (11), onde $AC < 0$ é uma hipérbole ou uma degeneração. Completando em (11) os quadrados em x e y, onde $AC < 0$, a equação resultante tem a forma

$$\alpha^2(x-h)^2 - \beta^2(y-k)^2 = H \tag{12}$$

Se $H > 0$, (12) pode ser escrito como

$$\frac{(x-h)^2}{\frac{H}{\alpha^2}} - \frac{(y-k)^2}{\frac{H}{\beta^2}} = 1$$

que tem a forma de (9).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 181 = 0$$

pode ser escrita como

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 181$$

e completando os quadrados em x e y temos

$$4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) = 181 + 36 - 192$$

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = 25$$

A qual tem a forma (12), onde $H = 25 > 0$. Pode ser escrita como

$$\frac{(x + 3)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(y - 4)^2}{\frac{25}{12}} = 1$$

que tem a forma (9). ◀

Se $H < 0$, então (12) pode ser reescrita como

$$\frac{(y - k)^2}{\frac{|H|}{\alpha^2}} - \frac{(x - h)^2}{\frac{|H|}{\beta^2}} = 1$$

que tem a forma (10).

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que (11) seja

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 131 = 0$$

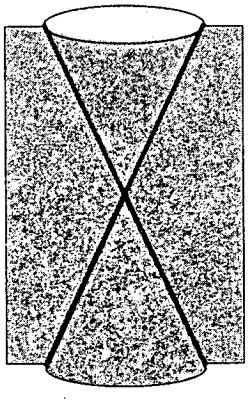
Completando os quadrados em x e y teremos

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = -25$$

A equação acima tem a forma (12), onde $H = -25 < 0$, e pode ser escrita como

$$\frac{(y - 4)^2}{\frac{25}{12}} - \frac{(x + 3)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

que tem a forma (10). ◀



duas retas concorrentes

FIGURA 8

Se $H = 0$, então (12) será equivalente às duas equações

$$\alpha(x - h) - \beta(y - k) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(x - h) + \beta(y - k) = 0$$

que são equações de duas retas que passam pelo ponto (h, k). Este é um caso de hipérbole degenerada.

O teorema a seguir resume os resultados da discussão anterior.

10.3.5 TEOREMA Se na equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$ e $AC < 0$, então o gráfico será uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

O caso degenerado de uma hipérbole, ou seja, duas retas concorrentes, é obtido como secção cônica se o plano secante contiver o vértice do cone e duas geratrizes, conforme mostra a Figura 8.

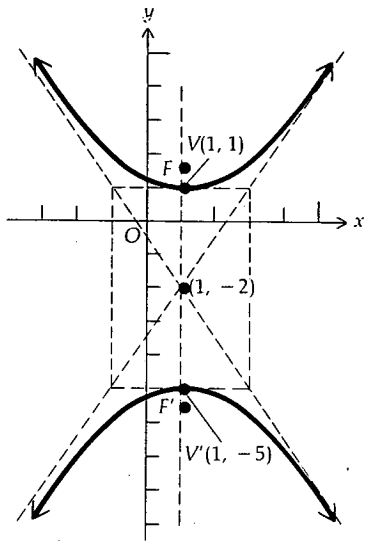


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Determine o gráfico da equação

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$

Solução Do Teorema 10.3.5, como $B = 0$ e $AC = -36 < 0$, o gráfico é uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

Completando os quadrados em x e y teremos

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = -36$$

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1 \tag{13}$$

Essa equação tem a mesma forma que (10): assim, o gráfico é uma hipérbole cujo eixo principal é paralelo ao eixo y e cujo centro está em $(1, -2)$.

EXEMPLO 5 Ache os vértices e os focos da hipérbole do Exemplo 4. Faça um esboço mostrando a hipérbole, suas assíntotas e os focos.

Solução De (13) observamos que $a = 3$ e $b = 2$. Como o eixo principal é vertical, o centro está em $(1, -2)$ e $a = 3$, segue que os vértices estão nos pontos $V(1, 1)$ e $V'(1, -5)$. Para uma hipérbole, $c^2 = a^2 + b^2$; logo, $c^2 = 9 + 4$ e $c = \sqrt{13}$. Assim sendo, os focos estão em $F(1, -2 + \sqrt{13})$ e $F'(1, -2 - \sqrt{13})$. A Figura 9 mostra a hipérbole, suas assíntotas e os focos.

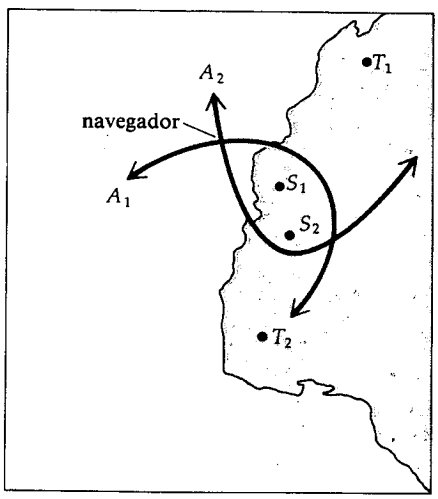


FIGURA 10

As propriedades da hipérbole dadas na Definição 10.3.1 formam a base de vários sistemas de navegação importantes. Esses sistemas envolvem uma rede de pares de rádios transmissores em posição fixa e com distâncias conhecidas um do outro. Os transmissores enviam sinais de rádio que são recebidos pelo navegador. A diferença no tempo de chegada de dois sinais determina a diferença $2a$ das distâncias ao navegador. Assim, sabe-se que a sua posição é algum ponto ao longo de um arco de uma hipérbole que tem como focos as localizações dos transmissores. Um arco, ao invés de dois, é determinado devido ao atraso do sinal entre os transmissores, causado pelo próprio sistema. O procedimento é, então, repetido para um outro par de transmissores e obtemos outro arco de hipérbole contendo a posição do navegador. O ponto de intersecção dos dois arcos de hipérbole é a posição real. Por exemplo, na Figura 10, suponha um par de transmissores localizados nos pontos T_1 e S_1, cujos sinais determinam o arco de hipérbole A_1. Outro par de transmissores está localizado em T_2 e S_2 e o arco de hipérbole A_2 é determinado pelos sinais. Então, a intersecção de A_1 com A_2 dá a posição do navegador.

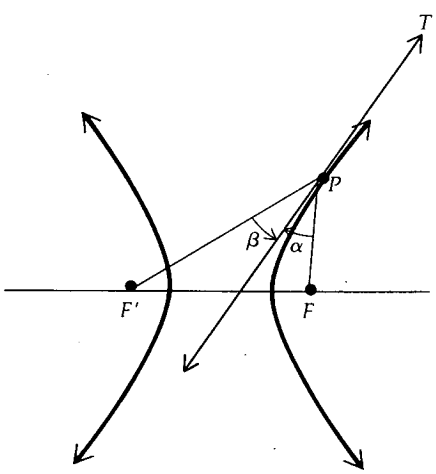


FIGURA 11

A hipérbole tem uma propriedade reflexiva que é usada na fabricação de certos telescópios. Na Figura 11, a reta PT é a reta tangente no ponto P ao gráfico da hipérbole com focos em F e F'. A medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT é α e a medida do ângulo entre o segmento de reta $F'P$ e a reta tangente PT é β. Será pedido que você prove que $\alpha = \beta$, no Exercício 39. Dessa igualdade segue que um raio de luz de uma fonte localizada em um foco de um espelho hiperbólico (a secção transversal é uma hipérbole) é refletido ao longo de uma reta que passa pelo outro foco.

Hipérboles são usadas também em "combates de ondas sonoras", para localizar a posição de armas inimigas, cronometrando o som dos disparos dessas armas. Alguns cometas movem-se em órbita hiperbólica. Se uma quantidade va-

ria inversamente em relação a outra tal como a pressão e o volume na lei de Boyle para um gás perfeito ($PV = k$), o gráfico será uma hipérbole, como veremos na Secção 10.4.

Dos Teoremas 10.1.6, 10.2.3 e 10.3.5 podemos concluir que o gráfico de uma equação quadrática geral em duas incógnitas, quando $B = 0$, é uma cônica ou uma cônica degenerada. O tipo de cônica pode ser obtido observando o produto de A com C. Temos o teorema a seguir.

10.3.6 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A e C não são ambos nulos, é uma cônica ou uma cônica degenerada; se for uma cônica, então o gráfico será:

(i) uma *parábola*, se $A = 0$ ou $C = 0$, isto é, se $AC = 0$;
(ii) uma *elipse*, se A e C tiverem o mesmo sinal, isto é, se $AC > 0$;
(iii) uma *hipérbole*, se A e C tiverem sinais opostos, isto é, se $AC < 0$.

Uma discussão do gráfico de uma equação quadrática geral onde $B \neq 0$ será dada na próxima secção.

EXERCÍCIOS 10.3

Nos Exercícios de 1 a 16, ache o centro, os vértices, os focos e as equações das assíntotas da hipérbole dada. Faça um esboço da curva e de suas assíntotas e mostre os focos.

1. $9x^2 - 4y^2 = 36$
2. $x^2 - 9y^2 = 9$
3. $4x^2 - 25y^2 = 100$
4. $16y^2 - 9x^2 = 144$
5. $4y^2 - x^2 = 16$
6. $4y^2 - 7x^2 = 56$
7. $9y^2 - 16x^2 = 1$
8. $25x^2 - 25y^2 = 1$
9. $x^2 - y^2 + 8x - 2y - 21 = 0$
10. $4x^2 - y^2 - 8x - 12 = 0$
11. $9x^2 - 18y^2 + 54x - 36y + 79 = 0$
12. $x^2 - y^2 + 6x + 10y - 4 = 0$
13. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$
14. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$
15. $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$
16. $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$

Nos Exercícios de 17 a 26, ache a equação da hipérbole satisfazendo as condições dadas e faça um esboço do gráfico.

17. Vértices em $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e um eixo conjugado com comprimento 6.
18. Focos em $(0, 5)$ e $(0, -5)$ e um vértice em $(0, 4)$.
19. Centro na origem, focos sobre o eixo y e passando pelos pontos $(-2, 4)$ e $(-6, 7)$.
20. Extremidades do eixo conjugado em $(0, -3)$ e $(0, 3)$ e um foco em $(5, 0)$.
21. Um foco em $(26, 0)$ e como assíntotas as retas $12y = \pm 5x$.
22. Centro em $(3, -5)$, um vértice em $(7, -5)$ e um foco em $(8, -5)$.
23. Centro em $(-2, -1)$, um vértice em $(-2, 11)$, e um foco em $(-2, 14)$.
24. Focos em $(3, 6)$ e $(3, 0)$ e passando pelo ponto $(5, 3 + \frac{6}{5}\sqrt{5})$.
25. Focos em $(-1, 4)$ e $(7, 4)$ e comprimento do eixo transverso $\frac{8}{3}$.
26. Um foco com $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, as assíntotas interceptam-se em $(-3, 1)$ e uma assíntota passa pelo ponto $(1, 7)$.
27. Os vértices de uma hipérbole estão em $(-3, -1)$ e $(-1, -1)$ e a distância entre os focos é $2\sqrt{5}$. Ache (a) a equação da hipérbole e (b) equações das assíntotas.
28. Os focos de uma hipérbole estão em $(2, 7)$ e $(2, -7)$ e a distância entre os vértices é $8\sqrt{3}$. Ache (a) a equação da hipérbole e (b) equações das assíntotas.
29. Ache a equação da reta tangente à hipérbole $4x^2 - y^2 = -1$ no ponto $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$.
30. Ache a equação da reta normal à hipérbole $4x^2 - 3y^2 = 24$ no ponto $(3, 2)$.
31. Ache a equação da hipérbole cujos focos são os vértices da elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ e cujos vértices são os focos dessa elipse.
32. Ache a equação da elipse cujos focos são os vértices da hipérbole $11x^2 - 7y^2 = 77$ e cujos vértices são os focos da hipérbole.
33. O custo de produção de uma mercadoria é \$ 12 a menos por unidade numa cidade A do que numa cidade B, sendo a distância entre A e B 100 km supondo que o caminho de entrega da mercadoria seja uma linha reta e que o custo da entrega seja \$ 0,20 por unidade por quilômetro, ache a curva em cujo ponto a mercadoria possa ser fornecida por A ou por B a um mesmo custo. (*Sugestão*: tome A e B em $(-50, 0)$ e $(50, 0)$ respectivamente.)
34. Prove que não existe reta tangente à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ que passe pela origem.

35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta $x = 2a$.
36. Ache o centróide do sólido de rotação do Exercício 35.
37. Três postos de escuta estão localizados nos pontos $A(0, 0)$, $B(0, \frac{21}{4})$, e $C(\frac{25}{3}, 0)$, a unidade de comprimento é o quilômetro. Microfones localizados nesses pontos mostram que uma arma está $\frac{5}{3}$ km mais próxima de A do que de C e $\frac{7}{4}$ km mais próximo de B do que de A. Determine a posição da arma usando a Definição 10.3.1.
38. Duas estações LORAN (abreviatura de Long-Range Navigation — Navegação de Longa Distância) A e B estão numa reta que vai de leste para oeste e A está a 80 km a leste de B. Um avião viaja para o leste num curso reto que está a 60 km ao norte da reta que liga A e B. Sinais são mandados ao mesmo tempo de A e de B e o sinal de A atinge o avião 350 μs antes do sinal de B. Se os sinais se propagam a uma velocidade de 0,2 milhão por microssegundo, localize a posição do avião usando a Definição 10.3.1.
39. Na Figura 11, prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão*: escolha os eixos coordenados de tal forma que o centro da hipérbole esteja na origem e os eixos da hipérbole estejam ao longo dos eixos coordenados. Então prove que a reta tangente PT divide ao meio o ângulo formado pelos segmentos da reta FP e $F'P$.)
40. Para uma hipérbole equilátera tendo centro em (h, k) e eixo principal paralelo ao eixo x, prove que as assíntotas são perpendiculares.
41. Prove que se $P(x, y)$ for um ponto cujas coordenadas satisfazem a equação (5), então

$$\big||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\big| = 2a$$

onde F e F' são os focos da hipérbole da Figura 2. (*Sugestão*: use um método similar ao sugerido para a elipse nos Exercícios 42 e 43 dos Exercícios 10.2.)

10.4 ROTAÇÃO DE EIXOS

Mostramos como é possível simplificar a forma de certas equações por uma translação de eixos coordenados. Agora vamos considerar uma rotação de eixos coordenados que nos possibilita transformar uma equação do segundo grau com um termo em xy em outra equação sem esse termo. Uma translação de eixos dá um novo sistema de coordenadas cujos eixos são paralelos aos eixos originais x e y. Para uma rotação, o novo sistema de coordenadas terá, em geral, eixos que *não* são paralelos aos originais.

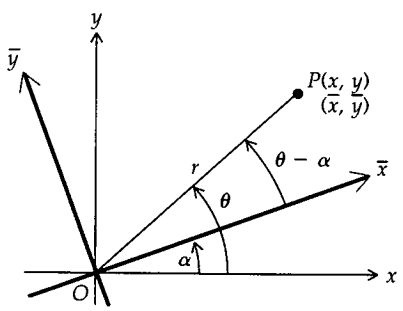


FIGURA 1

Vamos supor que existam dois sistemas cartesianos retangulares com a mesma origem. Vamos chamar esses sistemas de xy e $\bar{x}\bar{y}$. Suporemos ainda que o eixo $\bar{x}$ forme com o eixo x um ângulo cuja medida em radianos seja α. Então, naturalmente, o eixo $\bar{y}$ forma com o eixo y um ângulo cuja medida em radianos é α. Nesse caso, estabelecemos que o sistema xy de coordenadas girou num ângulo cuja medida em radianos é α para formar o sistema $\bar{x}\bar{y}$. Um ponto P com coordenadas (x, y) em relação ao sistema original de coordenadas terá coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ em relação ao novo sistema. Vamos obter agora a relação entre os dois sistemas de coordenadas.

Na Figura 1, r denota a distância não orientada $|\overline{OP}|$ e seja θ o ângulo medido do eixo x ao segmento de reta OP. Da figura observamos que

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Também, da Figura 1,

$$\bar{x} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{e} \quad \bar{y} = r\operatorname{sen}(\theta - \alpha)$$

Com a diferença das identidades co-seno e seno essas duas equações tornam-se

$$\bar{x} = r\cos\theta\cos\alpha + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - r\cos\theta\operatorname{sen}\alpha$$

Substituindo nas equações precedentes as equações (1), obtemos

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \tag{2}$$

Resolvendo as equações (2) simultaneamente para x e y em termos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (veja o Exercício 26), obtemos

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad y = \bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \bar{y}\cos\alpha \tag{3}$$

Os resultados serão resumidos em um teorema.

10.4.1 TEOREMA Se (x, y) for a representação de um ponto P em relação a um conjunto de eixos e $(\bar{x}, \bar{y})$ for a representação de P após a rotação dos eixos de um ângulo α, então

(i) $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$ e $y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$

(ii) $\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha$ e $\bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$

EXEMPLO 1 Dada a equação

$$xy = 1$$

(a) Ache a equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ obtidos através de uma rotação de eixos de um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad e (b) faça um esboço do gráfico e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução

(a) Com $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ no Teorema 10.4.1(i) obtemos

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$$

Substituindo essas expressões para x e y na equação $xy = 1$, obtemos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

(b) Essa é a equação de uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são as bissetrizes dos quadrantes no sistema $\bar{x}\bar{y}$. Assim, o gráfico da equação $xy = 1$ é uma hipérbole equilátera situada no primeiro e terceiro quadrantes e as assíntotas são os eixos x e y. A Figura 2 mostra o gráfico pedido.

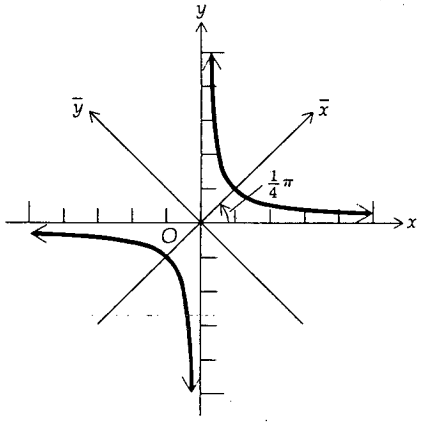


FIGURA 2

Na Secção 10.3, mostramos que se $B = 0$ e A e C não forem ambos nulos, o gráfico da equação geral de segundo grau em duas incógnitas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

será uma cônica ou uma cônica degenerada. Vamos mostrar agora que se $B \neq 0$, então qualquer equação da forma (4) poderá ser transformada por uma rotação de eixos conveniente, numa equação da forma

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{5}$$

onde $\bar{A}$ e $\bar{C}$ não são ambos nulos.

Se o sistema xy sofrer uma rotação de um ângulo α, então, para obter a equação do gráfico de (4) em relação ao sistema $\bar{x}\bar{y}$, substituimos x por $\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}$ sen α e y por $\bar{x}$ sen $\alpha + \bar{y}\cos\alpha$. Teremos

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{6}$$

onde

$$\bar{A} = A\cos^2\alpha + B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\bar{B} = -2A\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + 2C\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\bar{C} = A\,\text{sen}^2\alpha - B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

Queremos encontrar α tal que a rotação transforme (4) numa equação da forma (5). Fazendo $\overline{B}$ igual a zero, temos

$$B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (C - A)(2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) = 0$$

ou, equivalentemente, com identidades trigonométricas,

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

Como $B \neq 0$,

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Mostramos que uma rotação de eixos de um ângulo α que satisfaça a equação acima, transformará uma equação da forma (4), onde $B \neq 0$, em uma equação da forma (5). Queremos mostrar que $\overline{A}$ e $\overline{C}$ em (5) não são ambos zero. Para provar, note que (6) é obtido de (4) por uma rotação de eixos de um ângulo α. Também, (4) pode ser obtida de (6) por uma rotação de eixos de ângulo $-\alpha$. Se $\overline{A}$ e $\overline{C}$ em (6) fossem ambos nulos, então as substituições

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

em (6) resultariam na equação

$$\overline{D}(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) + \overline{E}(-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) + \overline{F} = 0$$

que é uma equação do primeiro grau e, portanto, diferente de (4) pois estamos supondo que pelo menos $B \neq 0$. Provamos então o teorema a seguir.

10.4.2 TEOREMA Se $B \neq 0$, a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pode ser transformada na equação

$$\overline{A}\bar{x}^2 + \overline{C}\bar{y}^2 + \overline{D}\bar{x} + \overline{E}\bar{y} + \overline{F} = 0$$

onde $\overline{A}$ e $\overline{C}$ não são ambos nulos, por uma rotação de eixos de ângulo α para o qual

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Pelos Teoremas 10.4.2 e 10.3.6, segue que o gráfico de uma equação da forma (4) é uma cônica ou uma cônica degenerada. Para determinar que tipo de cônica é o gráfico de determinada equação, usamos o fato de que A, B e C de (4) e $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ de (6) satisfazem a relação

$$B^2 - 4AC = \overline{B}^2 - 4\overline{A}\overline{C} \tag{7}$$

que pode ser provada substituindo as expressões de $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ dadas nas fórmulas (6), no segundo membro de (7). Isso será deixado como exercício (veja o Exercício 25).

A expressão $B^2 - 4AC$ é chamada de **discriminante** de (4). A igualdade (7) estabelece que o discriminante da equação quadrática genérica em duas variáveis é **invariante** sob uma rotação de eixos. Se o ângulo da rotação for escolhido de forma que $B = 0$, então (7) torna-se

$$B^2 - 4AC = -4\overline{A}\overline{C} \tag{8}$$

Do Teorema 10.3.6, segue que se o gráfico de (5) não for degenerado, então será uma parábola se $\overline{A}\,\overline{C} = 0$, uma elipse se $\overline{A}\,\overline{C} > 0$ e uma hipérbole se $\overline{A}\,\overline{C} < 0$. Assim, podemos concluir que o gráfico de (5) é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme $-4\overline{A}\,\overline{C}$ seja zero, negativo ou positivo. Como o gráfico de (4) é igual ao de (5), segue de (8) que se o gráfico de (4) não for degenerado, então ele será uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme o discriminante $B^2 - 4AC$ seja zero, negativo ou positivo. Provamos o teorema a seguir.

10.4.3 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica ou uma cônica degenerada. Se for uma cônica, então será

(i) uma *parábola* se $B^2 - 4AC = 0$;
(ii) uma *elipse* se $B^2 - 4AC < 0$;
(iii) uma *hipérbole* se $B^2 - 4AC > 0$.

EXEMPLO 2 Simplifique a equação

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

por uma rotação de eixos. Faça um esboço do gráfico da equação e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (-12)^2 - 4(17)(8) \\ &= -400 \end{aligned}$$

Como $B^2 - 4AC < 0$, pelo Teorema 10.4.3, o gráfico é uma elipse ou degenerado. Para eliminar o termo xy por uma rotação de eixos, precisamos escolher um α tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} 2\alpha &= \frac{A - C}{B} \\ &= \frac{17 - 8}{-12} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Existe um 2α no intervalo $(0, \pi)$ para o qual $\operatorname{cotg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Logo, α está no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Para aplicar o Teorema 10.4.1 não é necessário encontrar α desde que se conheça $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$. Essas funções podem ser encontradas do valor de $\operatorname{cotg} 2\alpha$, pelas identidades trigonométricas

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \qquad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$$

Como $\operatorname{cotg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, segue que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$. Assim

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

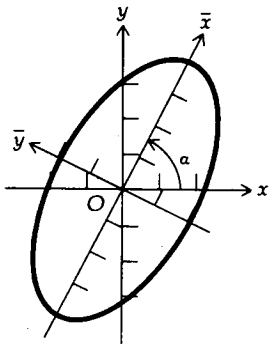


FIGURA 3

Substituindo $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ e $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ na equação dada obtemos

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Assim, o gráfico é uma elipse cujo eixo maior tem 8 unidades de comprimento e cujo eixo menor tem 4 unidades de comprimento. Um esboço da elipse com ambos os conjuntos de eixos está na Figura 3.

EXERCÍCIOS 10.4

Nos Exercícios de 1 a 4, para a equação dada, (a) encontre uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$ e (b) faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

1. $xy = 8$
2. $xy = -4$
3. $x^2 - y^2 = 8$
4. $y^2 - x^2 = 16$

Nos Exercícios de 5 a 12, remova da equação dada o termo xy por uma rotação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

5. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$
6. $4xy + 3x^2 = 4$
7. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
8. $x^2 + xy + y^2 = 3$
9. $xy + 16 = 0$
10. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$
11. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$
12. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

Nos Exercícios de 13 a 22, simplifique a equação dada com uma rotação e uma translação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os três conjuntos de eixos.

13. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$
14. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$
15. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
16. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
17. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$
18. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$
19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$
20. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$
21. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12y = 0$
22. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$
23. Mostre que o gráfico de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ é um segmento de uma parábola por uma rotação de eixos de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$. (*Sugestão*: elimine os radicais na equação, antes de aplicar o Teorema 10.4.1.)
24. Dada a equação $(a^2 + b^2)xy = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$, ache uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de eixos cujo ângulo tem por medida $\text{tg}^{-1}(b/a)$.
25. Mostre que para a equação geral do segundo grau em duas variáveis, o discriminante $B^2 - 4AC$ é invariante sob uma rotação de eixos.
26. Deduza (3) de (2) desta secção resolvendo em x e y em termos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. (*Sugestão*: Para resolver em x, multiplique cada membro de (2) por cos α e cada membro da segunda equação por sen α, e então subtraia os membros correspondentes das equações resultantes. Use um procedimento similar para resolver em y.)

10.5 COORDENADAS POLARES

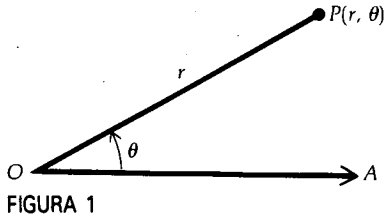


FIGURA 1

Até aqui localizamos um ponto no plano por suas coordenadas cartesianas retangulares. Há outros sistemas de coordenadas que dão a posição de um ponto em um plano. O **sistema de coordenadas polares** é um deles, e é importante, pois certas curvas têm equações mais simples quando esse sistema é usado. Nas coordenadas polares todas as três cônicas (a parábola, a elipse e a hipérbole) têm uma equação. Ela é aplicada na derivação das leis de Kepler em Física e no estudo do movimento de planetas em Astronomia.

No sistema cartesiano, as coordenadas são números chamados de abscissa e ordenada que são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No

sistema polar, as coordenadas consistem em uma distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo. O ponto fixo é chamado de **pólo** (ou origem), sendo designado pela letra O. O semi-eixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou reta polar) e vamos designá-lo por OA. O semi-eixo OA é, normalmente colocado na horizontal, orientado para a direita e se estende indefinidamente. Veja a Figura 1.

Seja P um ponto qualquer do plano, distinto de O. Seja θ a medida em radianos do ângulo AOP, positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando no sentido horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP. Então, se r for a distância não orientada de O a P (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de P será dado por r e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ).

EXEMPLO 1 Marque cada um dos seguintes pontos com o conjunto de coordenadas polares dado: (a) $(2, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $(5, \frac{1}{2}\pi)$; (c) $(1, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(3, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(4, -\frac{1}{3}\pi)$; (f) $(\frac{5}{2}, -\pi)$; (g) $(2, -\frac{5}{4}\pi)$

Solução

(a) O ponto $(2, \frac{1}{4}\pi)$ é determinado primeiro ao desenharmos o ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$ rad, tendo seu vértice na origem e seu lado lado inicial ao longo do eixo polar. O ponto no lado terminal que é 2 unidades da origem é o ponto $(2, \frac{\pi}{4})$. Veja a Figura 2(a).

Analogamente, obtemos os pontos mostrados na Figura 2(b) – (g).

► **ILUSTRAÇÃO 1** A Figura 3 mostra o ponto $(4, \frac{5}{6}\pi)$. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(4, -\frac{7}{6}\pi)$; veja a Figura 4. Além disso, as coordenadas polares $(4, \frac{17}{6}\pi)$ também resultam o mesmo ponto, como mostra a Figura 5. ◄

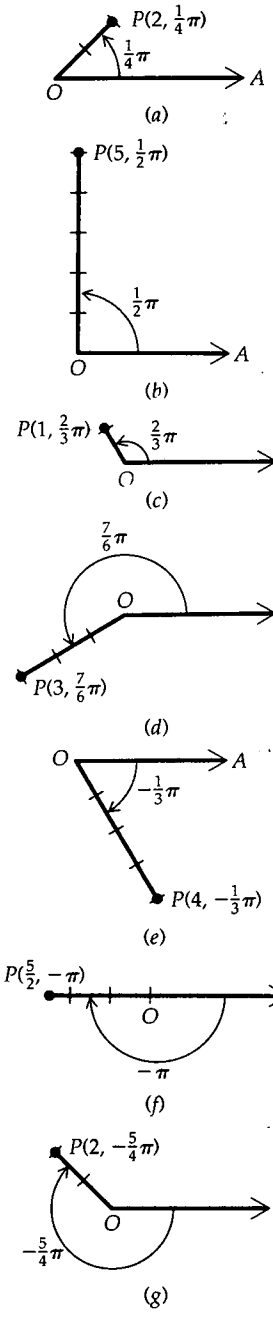


FIGURA 2

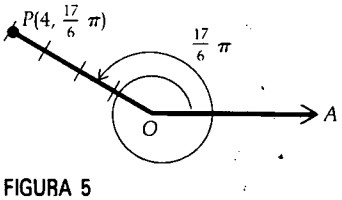


FIGURA 5

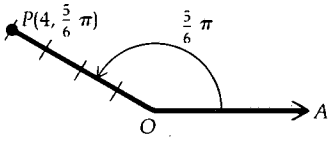


FIGURA 3

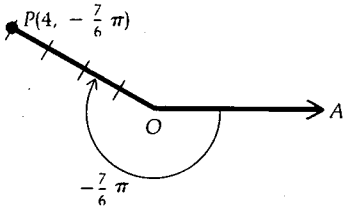


FIGURA 4

Na realidade, as coordenadas $(4, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer são do mesmo ponto, designado com $(4, \frac{5\pi}{6})$. Assim, um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Nisso o sistema polar é diferente do sistema cartesiano retangular, onde existe uma correspondência biunívoca entre as coordenadas e os pontos do plano. Para as coordenadas polares tal correspondência inexiste. Outro exemplo é obtido considerando as coordenadas polares da origem. Se $r = 0$ e θ é qualquer número real, temos a origem, que é designada por $(0, \theta)$.

Podemos considerar coordenadas polares com r negativo. Nesse caso, o ponto estará no prolongamento do lado terminal do ângulo, que é a semi-reta que

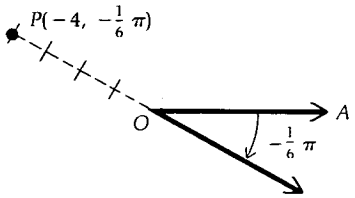


FIGURA 6

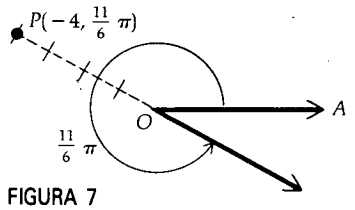


FIGURA 7

parte da origem, estendendo-se no sentido oposto ao lado terminal. Assim, se P estiver sobre o prolongamento do lado terminal do ângulo de medida θ rad, o conjunto de coordenadas polares de P será (r, θ), onde $r = -|\overline{OP}|$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** O ponto $(-4, -\frac{\pi}{6})$ da Figura 6 é o mesmo que o ponto $(4, \frac{5\pi}{6})$, $(4, -\frac{7\pi}{6})$ e $(4, \frac{17\pi}{6})$ da Ilustração 1. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(-4, \frac{11\pi}{6})$; veja a Figura 7. ◀

O ângulo é normalmente medido em radianos, assim um conjunto de coordenadas polares de um ponto é um par ordenado de números reais. Para cada par ordenado de números reais existe um único ponto no plano tendo-o como coordenadas polares. Entretanto vimos que cada ponto pode ser dado por um número ilimitado de pares ordenados de números reais. Se o ponto P não for a origem e se restringirmos r e θ de tal forma que $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$, então existirá um único par ordenado de coordenadas polares para P.

EXEMPLO 2 (a) Marque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(3, -\frac{2\pi}{3})$. Ache outro conjunto de coordenadas polares desse ponto para as quais (b) $r < 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta < 0$.

Solução

(a) Para encontrar o ponto no gráfico, traçamos o ângulo cuja medida em radianos é $-\frac{2}{3}\pi$ na direção horária, a partir do eixo polar. Como $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo a três unidades da origem, veja a Figura 8(a).

As respostas a (b), (c) e (d) são, respectivamente, $(-3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, \frac{4}{3}\pi)$, e $(-3, -\frac{5}{3}\pi)$. Elas estão ilustradas na Figura 8(b), (c) e (d).

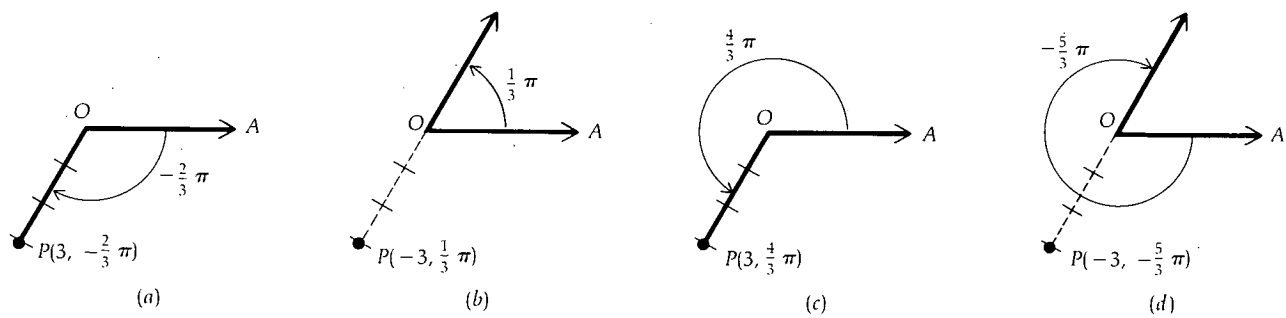


FIGURA 8

Freqüentemente, queremos nos referir às coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: cartesianas retangulares e polares. Para fazer isso, tomamos a origem do primeiro sistema coincidindo com a origem do segundo, o eixo polar como o semi-eixo x positivo e a semi-reta para a qual $\theta = \frac{\pi}{2}$ como o semi-eixo y positivo.

Suponha que P seja o ponto que tenha (x, y) como representação num sistema de coordenadas cartesianas retangulares e seja (r, θ) a representação de P em coordenadas polares. Distinguimos dois casos: $r > 0$ e $r < 0$. No primeiro caso, se $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo cuja medida é θ rad e $r = |\overline{OP}|$.

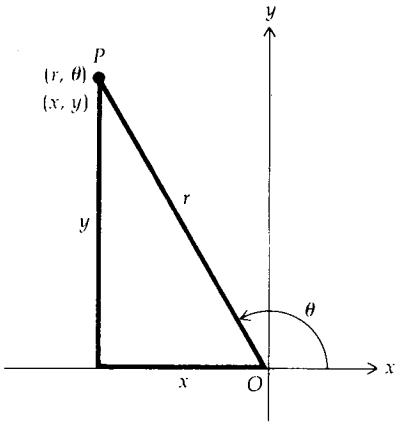


FIGURA 9

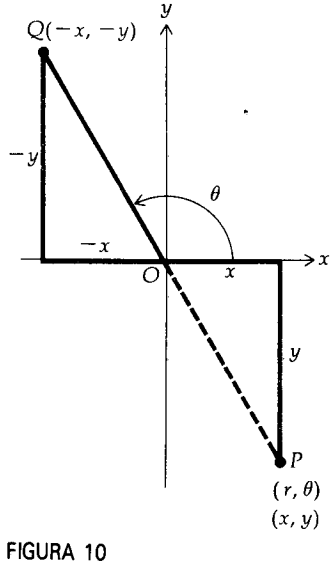


FIGURA 10

Tal caso está na Figura 9. Então,

$$\cos\theta = \frac{x}{|\overline{OP}|} = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OP}|} = \frac{y}{r}$$

Assim,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

No segundo caso, se $r < 0$, então o ponto P estará sobre o prolongamento do lado terminal e $r = -|\overline{OP}|$. Veja a Figura 10. Então, se Q for o ponto $(-x, -y)$,

$$\cos\theta = \frac{-x}{|\overline{OQ}|} = \frac{-x}{|\overline{OP}|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OQ}|} = \frac{-y}{|\overline{OP}|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

Logo,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Essas equações são as mesmas que (1); assim, as equações (1) são válidas em todos os casos.

Das equações (1) podemos obter as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto cujas coordenadas polares são conhecidas. Também, dessas equações podemos obter a equação polar de uma curva, conhecendo a sua equação cartesiana retangular.

Para obter as equações que dão um conjunto de coordenadas polares de um ponto quando as coordenadas cartesianas retangulares são conhecidas, vamos elevar ao quadrado ambos os membros de cada equação em (1), obtendo

$$x^2 = r^2\cos^2\theta \quad \text{e} \quad y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Somando membro a membro teremos

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Dividindo as equações (1), teremos

$$\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \tag{3}$$

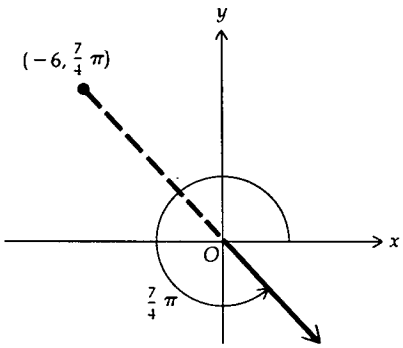


FIGURA 11

► **ILUSTRAÇÃO 3** O ponto cujas coordenadas polares são $(-6, \frac{7}{4}\pi)$ está colocado no gráfico da Figura 11. Vamos encontrar suas coordenadas cartesianas retangulares. De (1),

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r\operatorname{sen}\theta \\ &= -6\cos\tfrac{7}{4}\pi & &= -6\operatorname{sen}\tfrac{7}{4}\pi \\ &= -6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & &= -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{2} & &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o ponto é $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. ◄

O gráfico de uma equação em coordenadas polares r e θ consiste em todos aqueles pontos e somente aqueles pontos P que têm pelo menos um par de coordenadas que satisfaçam a equação. Se a equação de um gráfico for dada em coordenadas polares, ela será chamada de **equação polar** para podermos distingui-la da **equação cartesiana** que é o termo usado quando uma equação é dada em coordenadas cartesianas retangulares. Na Secção 11.6 discutiremos métodos para obter o gráfico de uma equação polar.

EXEMPLO 3 Dado que a equação polar de um gráfico é

$$r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$$

ache a equação cartesiana.

Solução Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, temos que $\operatorname{sen} 2\theta = 2(y/r)(x/r)$. Com essa substituição e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos da equação polar dada

$$x^2 + y^2 = 4(2)\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

EXEMPLO 4 Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$ para o ponto cuja representação cartesiana é $(-\sqrt{3}, -1)$.

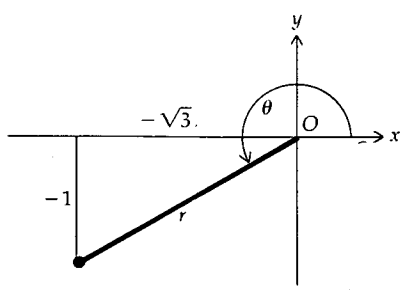


FIGURA 12

Solução O ponto $(-\sqrt{3}, -1)$ está colocado no gráfico da Figura 12. De (2), como $r > 0$,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3 + 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

De (3), $\operatorname{tg}\theta = -1/(-\sqrt{3})$, e como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$,

$$\theta = \tfrac{7}{6}\pi$$

Assim, o ponto é $(2, \frac{7\pi}{6})$.

EXEMPLO 5 Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Solução Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$ em

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

temos

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 4r\cos\theta = 0$$
$$r^2 - 4r\cos\theta = 0$$
$$r(r - 4\cos\theta) = 0$$

Logo,

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r - 4\cos\theta = 0$$

O gráfico de $r = 0$ é a origem, contudo, ela é um ponto do gráfico de $r - 4\cos\theta = 0$ pois $r = 0$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a equação polar do gráfico é

$$r = 4\cos\theta$$

O gráfico de $x^2 + y^2 - 4x = 0$ é uma circunferência. A equação pode ser escrita na forma

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

que é a equação de uma circunferência com centro em (2, 0) e raio 2.

EXERCÍCIOS 10.5

Nos Exercícios de 1 a 4, marque o ponto com o conjunto de coordenadas polares dadas.

1. (a) $(3, \frac{1}{6}\pi)$; (b) $(2, \frac{2}{3}\pi)$; (c) $(1, \pi)$; (d) $(4, \frac{5}{4}\pi)$; (e) $(5, \frac{11}{6}\pi)$
2. (a) $(4, \frac{1}{3}\pi)$ (b) $(3, \frac{3}{4}\pi)$; (c) $(1, \frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{3}{2}\pi)$; (e) $(5, \frac{5}{3}\pi)$
3. (a) $(1, -\frac{1}{4}\pi)$; (b) $(3, -\frac{5}{6}\pi)$; (c) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(-3, \frac{5}{6}\pi)$; (e) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$
4. (a) $(5, -\frac{2}{3}\pi)$; (b) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (c) $(-5, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-2, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(-4, -\frac{5}{4}\pi)$

Nos Exercícios de 5 a 10, marque num gráfico o ponto com as coordenadas polares dadas; ache então outro conjunto de coordenadas polares para o mesmo ponto para o qual (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$.

5. $(4, \frac{1}{4}\pi)$
6. $(3, \frac{5}{6}\pi)$
7. $(2, \frac{1}{2}\pi)$
8. $(3, \frac{3}{2}\pi)$
9. $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$
10. $(2, \frac{4}{3}\pi)$

11. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(2, -\frac{1}{4}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r > 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.
12. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(-3, -\frac{2}{3}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.

Nos Exercícios de 13 a 20, coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares dadas; dê, então, dois outros conjuntos de coordenadas polares para o mesmo ponto; um com o mesmo valor de r e outro com o sinal oposto a r.

13. $(3, -\frac{2}{3}\pi)$
14. $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$
15. $(-4, \frac{5}{6}\pi)$
16. $(-2, \frac{4}{3}\pi)$
17. $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$
18. $(-3, -\pi)$
19. $(2, 6)$
20. $(5, \frac{1}{6}\pi)$

Nos Exercícios 21 e 22, ache as coordenadas cartesianas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares são dadas.

21. (a) $(3, \pi)$: (b) $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$; (c) $(-4, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-1, -\frac{7}{6}\pi)$
22. (a) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$; (b) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (c) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{7}{4}\pi)$

Nos Exercícios 23 e 24, ache um conjunto de coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas retangulares são dadas. Tome $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

23. (a) $(1, -1)$; (b) $(-\sqrt{3}, 1)$; (c) $(2, 2)$; (d) $(-5, 0)$
24. (a) $(3, -3)$; (b) $(-1, \sqrt{3})$; (c) $(0, -2)$; (d) $(-2, -2\sqrt{3})$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache a equação polar do gráfico dada a sua equação cartesiana.

25. $x^2 + y^2 = a^2$
26. $x + y = 1$
27. $y^2 = 4(x + 1)$
28. $x^3 = 4y^2$
29. $x^2 = 6y - y^2$
30. $x^2 - y^2 = 16$
31. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
32. $2xy = a^2$
33. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Nos Exercícios de 35 a 44, ache a equação cartesiana do gráfico tendo a sua equação polar.

35. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$
36. $r^2 \cos 2\theta = 10$
37. $r^2 = \cos \theta$
38. $r^2 = 4 \cos 2\theta$
39. $r^2 = \theta$
40. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$
41. $r \cos \theta = -1$
42. $r^6 = r^2 \cos^2 \theta$
43. $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
44. $r = \dfrac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

10.6 GRÁFICOS DE EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES

Na Secção 10.5 estabelecemos que o gráfico de uma equação polar consiste naqueles e somente naqueles pontos tendo pelo menos um par de coordenadas polares, que satisfaçam a equação. Nesta secção mostraremos como obter um esboço de tal gráfico.

A equação

$$\theta = C$$

onde C é uma constante, está satisfeita por todos os pontos tendo coordenadas polares (r, C), qualquer que seja o valor de r. Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pela origem e faz com o eixo polar um ângulo de medida C rad. Veja a Figura 1. A mesma reta é dada pela equação

$$\theta = C \pm k\pi$$

onde k é um inteiro qualquer.

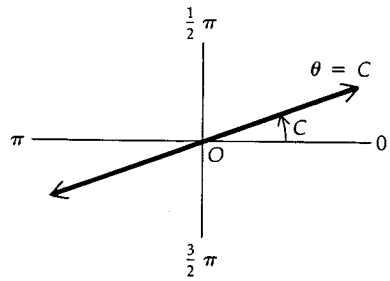


FIGURA 1

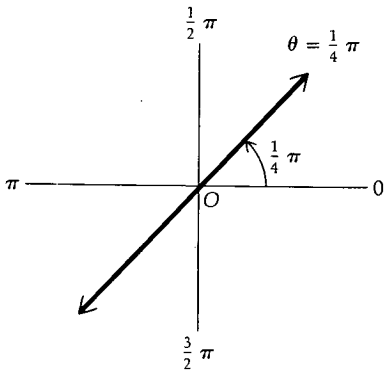


FIGURA 2

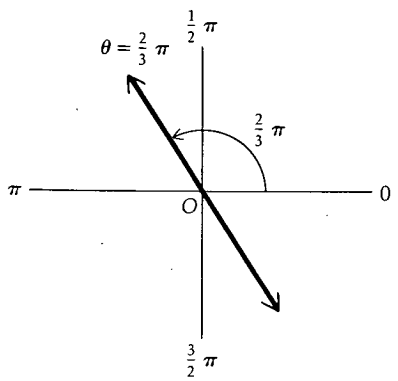


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** (a) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$

está na Figura 2. É uma reta passando pela origem e fazendo com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$. A mesma reta é dada pelas equações

$$\theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{9}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{7}{4}\pi$$

e assim por diante.

(b) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

está na Figura 3. É a reta que passa pela origem e forma com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{2\pi}{3}$ rad. Outras equações dessa reta são

$$\theta = \tfrac{5}{3}\pi \qquad \theta = \tfrac{8}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{4}{3}\pi$$

e assim por diante. ◀

Em geral, a forma polar da equação de uma reta não é tão simples quanto a forma cartesiana. Contudo, se a reta for paralela ao eixo polar ou ao eixo $\frac{\pi}{2}$, a equação será razoavelmente simples.

Se uma reta for paralela ao eixo polar e contiver o ponto B cujas coordenadas cartesianas são $(0, b)$ e cujas coordenadas polares são $(b, \frac{\pi}{2})$, então a equação cartesiana será $y = b$. Substituindo y por $r \operatorname{sen} \theta$, temos

$$r \operatorname{sen} \theta = b$$

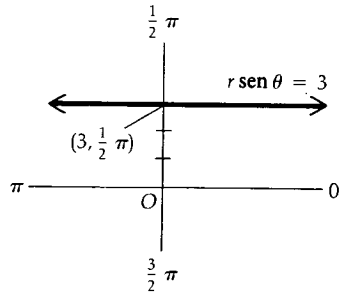


FIGURA 4

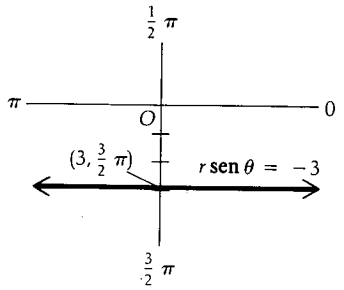


FIGURA 5

que é a equação polar de qualquer reta paralela ao eixo polar. Se b for positivo, a reta estará acima do eixo polar. Se b for negativo, ela estará abaixo do eixo polar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Na Figura 4 temos um esboço do gráfico da equação

$$r \operatorname{sen}\theta = 3$$

e na Figura 5 temos um esboço do gráfico da equação

$$r \operatorname{sen}\theta = -3$$ ◀

Agora, consideremos uma reta paralela ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou, equivalentemente, perpendicular ao eixo polar. Se a reta passar pelo ponto A cujas coordenadas cartesianas são $(a, 0)$ e cujas coordenadas polares são $(a, 0)$, a equação cartesiana será $x = a$. Substituindo x por $r \cos\theta$ obtemos

$$\boxed{r \cos\theta = a}$$

que é a equação de qualquer reta perpendicular ao eixo polar. Se a for positivo, a reta estará à direita do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Se a for negativo, a reta estará à esquerda do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 6 mostra um esboço do gráfico da equação

$$r \cos\theta = 3$$

e a Figura 7 mostra um esboço do gráfico da equação

$$r \cos\theta = -3$$ ◀

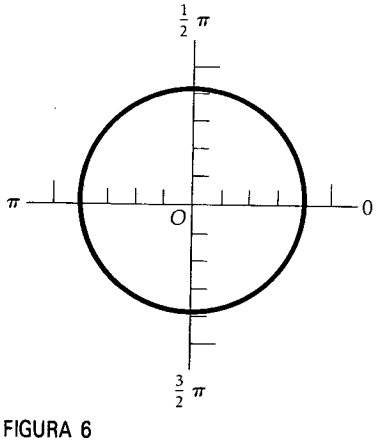


FIGURA 6

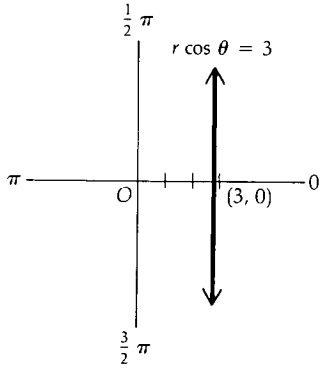


FIGURA 7

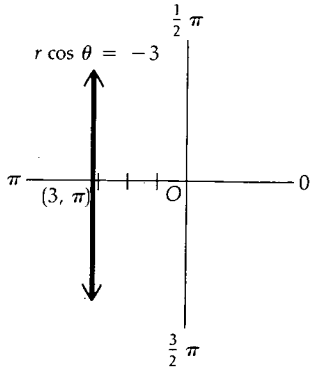


FIGURA 8

O gráfico da equação

$$r = C$$

onde C é uma constante qualquer, é uma circunferência cujo centro está na origem e cujo raio é $|C|$. A mesma circunferência é dada pela equação

$$\boxed{r = -C}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Figura 8 está um esboço do gráfico da equação

$$r = 4$$

É uma circunferência com centro na origem e raio 4. A mesma circunferência é dada pela equação

$$r = -4$$

embora seja pouco comum o uso dessa equação. ◀

Como no caso da reta, a equação polar geral de uma circunferência não é tão simples quanto a forma cartesiana. Existem, todavia, casos particulares da equação da circunferência que merecem ser considerados na forma polar.

Se uma circunferência contém a origem (o polo) e tem o seu centro num ponto com coordenadas (a, b), então a sua equação cartesiana será.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

Uma equação polar dessa circunferência é

$$\begin{aligned}(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\operatorname{sen}\theta) &= 0\\ r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0\\ r^2 - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0\\ r(r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta) &= 0\end{aligned}$$

$$r = 0 \qquad r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta = 0$$

Como o gráfico de $r = 0$ é a origem e este ($r = 0$ quando $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-\frac{a}{b})$) está no gráfico de $r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta = 0$, uma equação polar da circunferência será

$$r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$$

Quando $b = 0$ nesta equação, a equação torna-se

$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

que é uma equação polar da circunferência, de raio $|a|$ unidades, com seu centro sobre o eixo polar ou em sua extensão, e tangente ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Se $a > 0$, a circunferência está à direita da origem (veja a Figura 9), e se $a < 0$, a circunferência está à esquerda da origem.

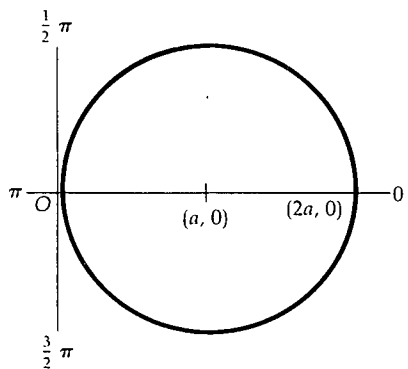


FIGURA 9

Se $a = 0$ na equação $r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$, temos

$$\boxed{r = 2b\operatorname{sen}\theta}$$

que é uma equação polar da circunferência, com raio $|b|$ unidades e centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou em sua extensão, e tangente ao eixo polar. Se $b > 0$, a circunferência está acima da origem e se $b < 0$, está abaixo dela.

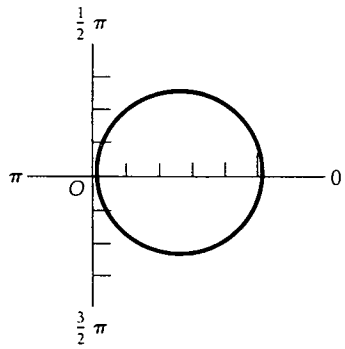


FIGURA 10

EXEMPLO 1 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações:

(a) $r = 5\cos\theta$ (b) $r = -6\operatorname{sen}\theta$

Solução

(a) A equação

$$r = 5\cos\theta$$

é da forma $r = 2a\cos\theta$ com $a = \frac{5}{2}$. Assim, o gráfico é uma circunferência com centro no ponto que tem coordenadas polares $(\frac{5}{2}, 0)$, sendo tangente ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Um esboço do gráfico está na Figura 10.

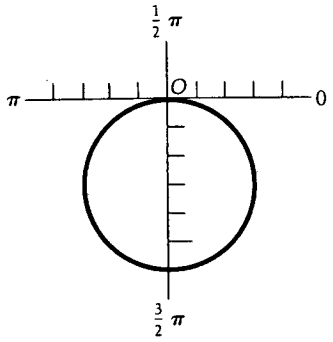


FIGURA 11

(b) A equação

$$r = -6 \operatorname{sen} \theta$$

é da forma $r = 2b \operatorname{sen} \theta$ com $b = -3$. O gráfico é a circunferência com centro no ponto tendo como coordenadas polares $(3, \frac{3\pi}{2})$ e tangente ao eixo polar. A Figura 11 mostra um esboço do gráfico.

Apresentamos casos especiais importantes (retas e circunferências) de gráficos de equações polares. Antes de discutir curvas mais gerais tendo equações polares, consideraremos as propriedades da simetria.

Na Secção 1.2 (Definição 1.2.4) ficou estabelecido que dois pontos P e Q são simétricos em relação a uma reta se e somente se a reta for perpendicular ao segmento PQ em seu ponto médio, e que dois pontos P e Q são simétricos em relação a um terceiro ponto se e somente se o terceiro ponto for o ponto médio do segmento de reta PQ. Logo, os pontos $(2, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2, \frac{2}{3}\pi)$ são simétricos em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e os pontos $(2, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2, -\frac{2}{3}\pi)$ são simétricos em relação à origem. Estabelecemos também (Definição 1.2.5) que o gráfico de uma equação é simétrico em relação a uma rela l se e somente se, para todo ponto P do gráfico, houver um ponto Q, também sobre o gráfico, tal que P e Q sejam simétricos em relação a l. Analogamente, o gráfico de uma equação será simétrico em relação a um ponto R se e somente se, para todo ponto P sobre o gráfico, existir um ponto S, também sobre o gráfico, tal que P e S sejam simétricos em relação a R. Temos três teoremas que podem ser usados como teste de simetria dos gráficos de equações polares.

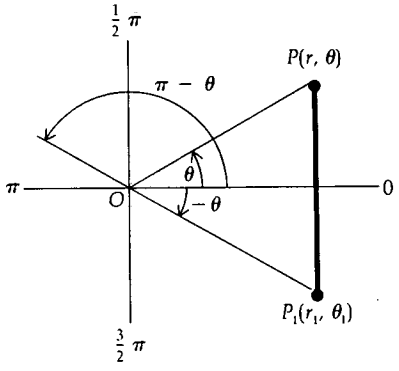


FIGURA 12

10.6.1 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, -\theta + 2n\pi)$ ou $(-r, \pi - \theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico da equação será simétrico em relação ao eixo polar.

Prova Se o ponto $P(r, \theta)$ for um ponto do gráfico de uma equação, então o gráfico será simétrico em relação ao eixo polar se existir um ponto $P_1(r_1, \theta_1)$ do gráfico tal que o eixo polar seja perpendicular ao ponto médio do segmento de reta P_1P (veja a Figura 12). Assim, se $r_1 = r$, então θ_1 precisa ser igual a $-\theta + 2n\pi$, onde n é um inteiro. E se $r_1 = -r$, então θ_1 precisa ser $\pi - \theta + 2n\pi$. ■

10.6.2 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, \pi - \theta + 2n\pi)$ ou $(-r, -\theta + 2n\pi)$ onde n é qualquer inteiro, o gráfico da equação será simétrico em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

10.6.3 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(-r, \theta + 2n\pi)$ ou $(r, \pi + \theta + 2n\pi)$, onde n é qualquer inteiro, o gráfico da equação será simétrico em relação à origem.

As demonstrações dos Teoremas 10.6.2 e 10.6.3 são similares à prova do Teorema 10.6.1 e serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 53 e 54).

► **ILUSTRAÇÃO 5** Para o gráfico da equação

$$r = 4 \cos 2\theta$$

testamos a simetria em relação ao eixo polar, ao eixo $\frac{\pi}{2}$, e à origem.

Usando o Teorema 10.6.1 para testar a simetria em relação ao eixo polar, substituímos (r, θ) por $(r, -\theta)$ e obtemos $r = 4\cos(-2\theta)$, que é equivalente a $r = 4 \cos 2\theta$. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar.

Usando o Teorema 10.6.2 para testar a simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$, substituímos (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ obtendo $r = 4\cos(2(\pi - \theta))$ ou, equivalentemente, $r = 4\cos(2\pi - 2\theta)$, que equivale à equação $r = 4 \cos 2\theta$. Logo, o gráfico é simétrico em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

Para testar a simetria em relação à origem, substituímos (r, θ) por $(-r, \theta)$ obtendo a equação $-r = 4 \cos 2\theta$, que não é equivalente à equação dada. Mas precisamos também determinar se podemos usar outro conjunto de coordenadas. Substituímos (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ obtendo $r = 4 \cos 2(\pi + \theta)$ ou equivalentemente, $r = 4\cos(2\pi + 2\theta)$, que é equivalente à equação $r = 4 \cos 2\theta$. Logo, o gráfico é simétrico em relação à origem. ◄

Para esboçar um gráfico, é desejável determinar se a origem pertence a ele. Isso é feito substituindo r por 0 e resolvendo em θ. É também vantajoso colocar no gráfico pontos para os quais r tem valores máximo e mínimo relativos. Um recurso adicional para traçar o gráfico, se o gráfico contiver a origem, é traçar as retas tangentes ao gráfico pela origem. Quando for útil, usamos o fato mostrado na Secção Suplementar 10.9: se θ_1 for um valor de θ que satisfaça a equação polar da curva quando $r = 0$, então a reta $\theta = \theta_1$ será tangente à curva na origem.

EXEMPLO 2 Faça um esboço do gráfico da equação

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

Solução Substituindo (r, θ) por $(r, -\theta)$ obtemos uma equação equivalente. Logo, o gráfico é simétrico com relação ao eixo polar.

A Tabela 1 dá as coordenadas de alguns pontos do gráfico, com esses pontos traçamos a metade do gráfico; o restante é traçado pela simetria em relação ao eixo polar.

Se $r = 0$, obtemos $\cos \theta = \frac{1}{2}$ e se $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, então $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim, o ponto $(0, \frac{\pi}{3})$ está no gráfico. Além disso, uma equação da reta tangente ao gráfico pela origem é $\theta = \frac{\pi}{3}$. Um esboço do gráfico está na Figura 13.

Tabela 1

θ	r
0	-1
$\frac{1}{6}\pi$	$1 - \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	1
$\frac{2}{3}\pi$	2
$\frac{5}{6}\pi$	$1 + \sqrt{3}$
π	3

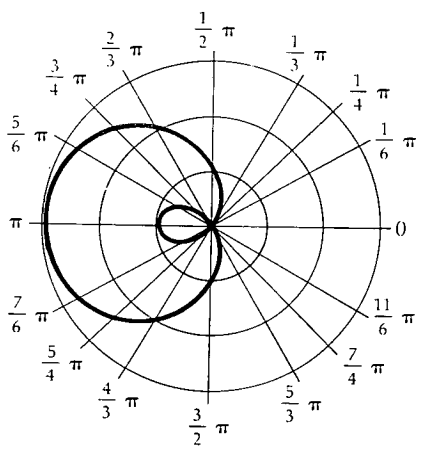


FIGURA 13

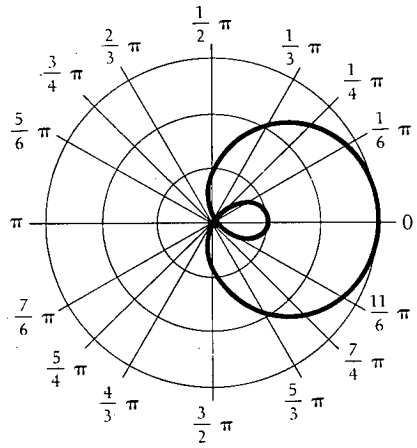
A curva do Exemplo 2 é chamada *limaçon*. O gráfico de uma equação da forma

$$r = a \pm b \cos \theta \quad \text{ou} \quad r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

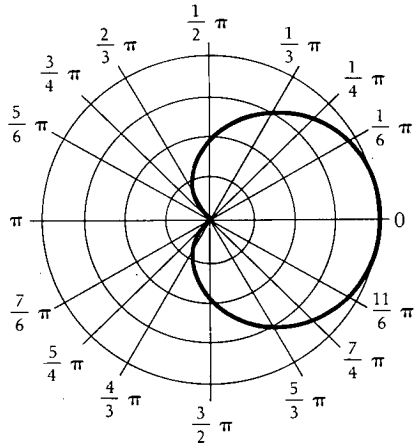
é uma **limaçon**. Existem quatro tipos de *limaçon* e cada tipo depende da razão a/b, onde a e b são positivos. Vamos mostrar os quatro tipos obtidos da equação

$$r = a + b \cos \theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0$$

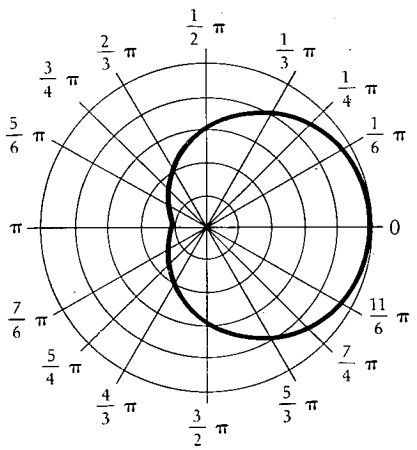
1. $0 < \frac{a}{b} < 1$ **Limaçon com um laço**. Veja a Figura 14(a).
2. $\frac{a}{b} = 1$ **Cardióide** (formato de coração). Veja a Figura 14(b).
3. $1 < \frac{a}{b} < 2$ **Limaçon com um dente**. Veja a Figura 14(c).
4. $2 \leqslant \frac{a}{b}$ **Limaçon Convexa** (sem dente). Veja a Figura 14(d).



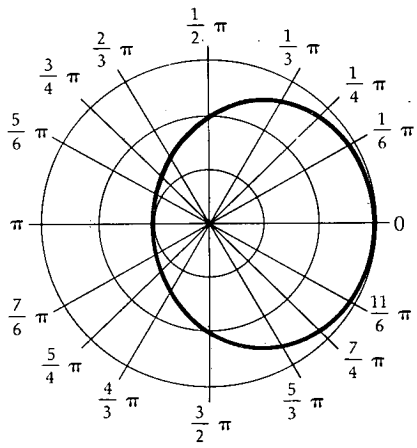
$0 < \frac{a}{b} < 1$
Limaçon com um laço
(a)



$\frac{a}{b} = 1$
Cardióide
(b)



$1 < \frac{a}{b} < 2$
Limaçon com um dente
(c)



$2 \leq \frac{a}{b}$
Limaçon Convexa
(d)

FIGURA 14

Se você estudar a Secção Suplementar 10.9, onde serão discutidas as retas tangentes horizontal e vertical a curvas polares, a distinção entre as *limaçons* dos tipos 3 (com um dente) e 4 (sem dente) ficará clara.

As *limaçons* obtidas da equação

$$r = a + b \operatorname{sen} \theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0$$

têm o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ como eixo de simetria. Se a *limaçon* tiver a equação

$$r - a = b \cos\theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0$$

ela apontará na direção de π e se tiver a equação

$$r = a - b \operatorname{sen}\theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0$$

apontará na direção de $\frac{3\pi}{2}$.

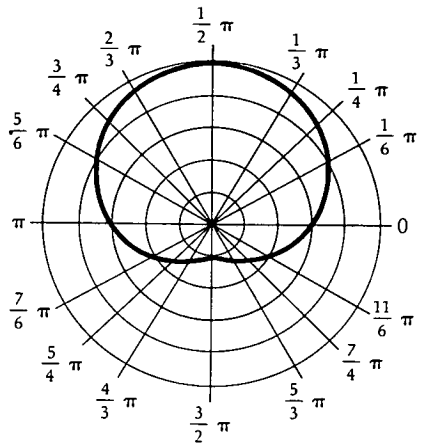


FIGURA 15

EXEMPLO 3 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes *limaçons*:

(a) $r = 3 + 2 \operatorname{sen}\theta$ (b) $r = 2 + 2\cos\theta$ (c) $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

Solução

Tabela 2

θ	r
0	3
$\frac{1}{6}\pi$	4
$\frac{1}{3}\pi$	$3 + \sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	5
π	3
$\frac{7}{6}\pi$	2
$\frac{4}{3}\pi$	$3 - \sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	1

(a) A equação

$$r = 3 + 2 \operatorname{sen}\theta$$

da forma de $r = a + b \operatorname{sen}\theta$, com $a = 3$ e $b = 2$. Como $a/b = 3/2$, e $1 < \frac{3}{2} < 2$, o gráfico é uma *limaçon* com dente. Ela é simétrica em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. A Tabela 2 dá as coordenadas de alguns pontos do gráfico. Um esboço está na Figura 15 e foi feito colocando no gráfico os pontos cujas coordenadas são dadas na Tabela 2 e usando as propriedades de simetria.

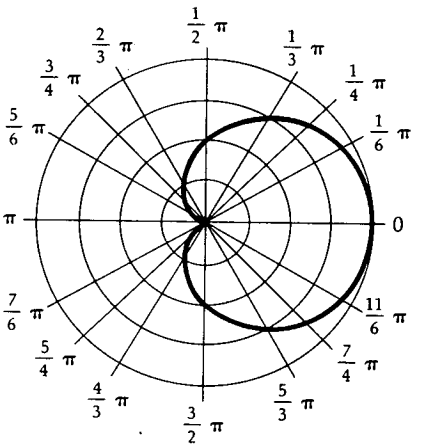


FIGURA 16

Tabela 3

θ	r
0	4
$\frac{1}{6}\pi$	$2 + \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	3
$\frac{1}{2}\pi$	2
$\frac{2}{3}\pi$	1
$\frac{5}{6}\pi$	$2 - \sqrt{3}$
π	0

(b) A equação

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

é da forma de $r = a + b\cos\theta$, com $a = 2$ e $b = 2$. Como $a/b = 1$, o gráfico é uma cardióide. Ela é simétrica em relação ao eixo polar. As coordenadas de alguns pontos sobre o gráfico são dadas na Tabela 3. A Figura 16 é um esboço no qual colocamos esses pontos e usamos as propriedades de simetria.

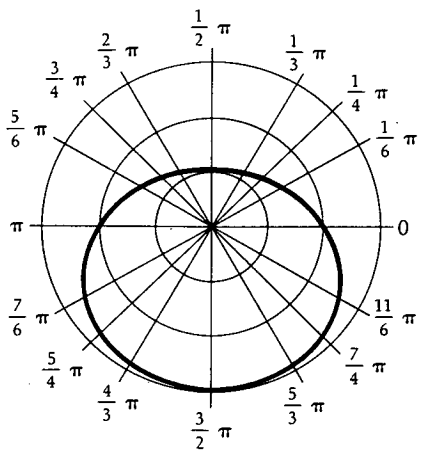


FIGURA 17

Tabela 4

θ	r
0	2
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1
π	2
$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	3

(c) A equação

$$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

é da forma $r = a - b \operatorname{sen}\theta$, com $a = 2$ e $b = 1$. Como $a/b = 2$, o gráfico é uma *limaçon* convexa. Ela é simétrica em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e aos pontos na direção $\frac{3\pi}{2}$. A Figura 17 mostra um esboço do gráfico obtido a partir da Tabela 4 e usando as propriedades de simetria.

O gráfico de uma equação da forma

$$r = a\cos n\theta \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

será uma **rosácea** com n folhas se n for ímpar e $2n$ folhas se n for par.

Tabela 5

θ	r
0	4
$\frac{1}{12}\pi$	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{4}\pi$	0
$\frac{1}{3}\pi$	-2
$\frac{5}{12}\pi$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	-4

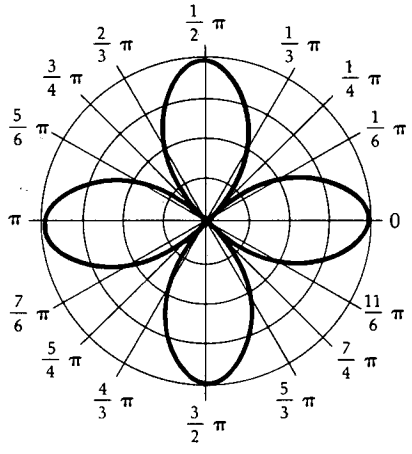


FIGURA 18

EXEMPLO 4 Faça um esboço da rosácea de quatro folhas

$$r = 4 \cos 2\theta$$

Solução Na Ilustração 5 provamos que o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar, ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e à origem. Substituindo r por 0 na equação dada obtemos

$$\cos 2\theta = 0$$

de onde obtemos, para $0 \leqslant \theta < 2\pi$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi \quad \theta = \tfrac{3}{4}\pi \quad \theta = \tfrac{5}{4}\pi \quad \theta = \tfrac{7}{4}\pi$$

As retas com essas equações são tangentes ao gráfico na origem.

A Tabela 5 dá os valores de r para alguns valores de θ de 0 até $\frac{\pi}{2}$. Desses valores e das propriedades de simetria podemos fazer o esboço da Figura 18.

Observe que se fizermos $n = 1$ nas equações para uma rosácea, obteremos

$$r = a \cos \theta \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{sen} \theta$$

que são as equações de uma circunferência. Assim sendo, a circunferência pode ser considerada como uma rosácea de uma folha.

Outras curvas polares que ocorrem com freqüência são as *lemniscatas* (veja os Exercícios de 29 a 32) e as *espirais* (veja os Exercícios de 25 a 28). A curva do próximo exemplo é chamada de *espiral de Arquimedes*.

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico de

$$r = \theta \qquad \theta \geqslant 0$$

Solução Quando $\theta = n\pi$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico intercepta o eixo polar ou sua extensão e quando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$, onde n é ímpar, o gráfico intercepta o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou sua extensão. Quando $r = 0$, $\theta = 0$; assim, a reta tangente à curva na origem é o eixo polar. Um esboço do gráfico está na Figura 19.

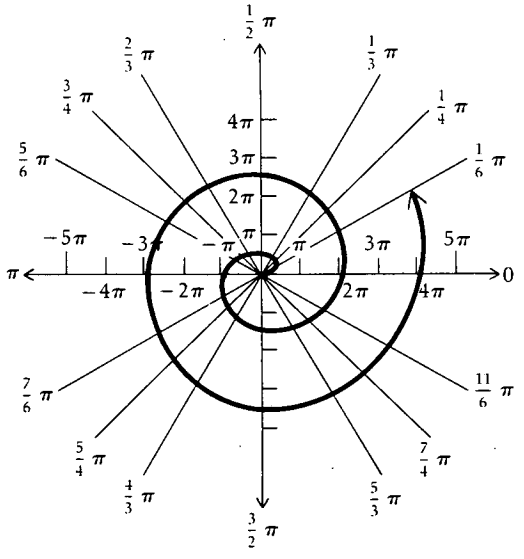


FIGURA 19

Para encontrar os pontos de intersecção de duas curvas dadas em coordenadas cartesianas, resolvemos as duas equações simultaneamente. As soluções comuns às equações dão todos os pontos de intersecção. Entretanto, como um ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares, é possível ter como intersecção de duas curvas um ponto para o qual não exista um único par de coordenadas polares que satisfaçam ambas as equações. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 6 Faça esboços dos gráficos de

$$r = 2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \text{e} \quad r = 1$$

com a mesma origem e o mesmo eixo polar, e encontre os pontos de intersecção.

Solução O gráfico de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ é uma rosácea de quatro folhas e o gráfico de $r = 1$ é uma circunferência com centro na origem e raio 1. Esboços dos gráficos estão na Figura 20. Resolvendo simultaneamente as duas equações teremos

$$2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = \tfrac{1}{2}$$

Logo,

$$2\theta = \tfrac{1}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{5}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{13}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{17}{6}\pi$$
$$\theta = \tfrac{1}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{13}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{17}{12}\pi$$

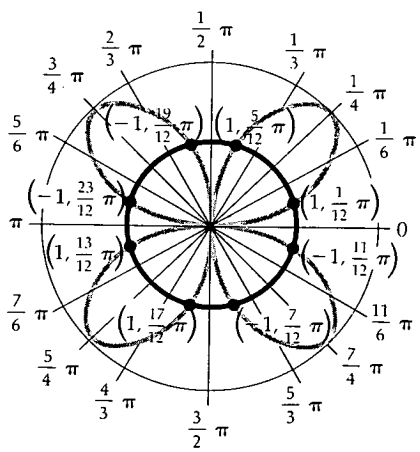


FIGURA 20

Assim, obtemos os pontos de intersecção $(1, \frac{1}{12}\pi)$, $(1, \frac{5}{12}\pi)$, $(1, \frac{13}{12}\pi)$, $(1, \frac{17}{12}\pi)$. Notamos na Figura 20 que existem oito pontos de intersecção. Os quatro pontos restantes são obtidos se tomarmos uma outra forma da equação da circunferência $r = 1$, isto é, reconsiderarmos a equação $r = -1$, que é a mesma circunferência. Resolvendo essa equação e a da rosácea de quatro folhas simultaneamente, teremos

$$\operatorname{sen} 2\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Então, obtemos

$$2\theta = \tfrac{7}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{11}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{19}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{23}{6}\pi$$
$$\theta = \tfrac{7}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{11}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{19}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{23}{12}\pi$$

Assim, temos os quatro pontos $(-1, \frac{7}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$, e $(-1, \frac{23}{12}\pi)$. Incidentalmente, $(-1, \frac{7}{12}\pi)$ pode também ser escrito como $(1, \frac{19}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{23}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{7}{12}\pi)$ e $(-1, \frac{23}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{11}{12}\pi)$.

Como $(0, \theta)$ representa a origem para qualquer θ, determinamos se a origem é um ponto de intersecção fazendo $r = 0$ em cada equação e resolvendo em θ.

Muitas vezes, as coordenadas dos pontos de intersecção de duas curvas podem ser encontradas diretamente de seus gráficos. No entanto, a seguir temos um método geral.

Se a equação polar de uma curva for dada por $r = f(\theta)$, então a mesma curva será dada por

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi) \tag{1}$$

onde n é qualquer inteiro.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Considere as curvas do Exemplo 6. O gráfico da equação $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ também tem a equação (fazendo $n = 1$ em (1))

$$(-1)r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + \pi) \Leftrightarrow -r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Se fizermos $n = 2$ em (1), o gráfico de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ também terá a equação

$$(-1)^2 r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + 2\pi) \Leftrightarrow r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

que é igual à equação original. Fazendo n igual a qualquer outro inteiro obtemos $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ ou $r = -2 \operatorname{sen} 2\theta$. O gráfico da equação $r = 1$ também terá a equação (fazendo $n = 1$ em (1)).

$$r = -1$$

Outros valores de n em (1) aplicados à equação $r = 1$ dão $r = 1$ ou $r = -1$. ◀

Se tivermos as equações $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, obteremos todos os pontos de intersecção dos gráficos das equações fazendo o seguinte:

(a) Use (1) para determinar todas as equações distintas das duas curvas:

$$r = f_1(\theta),\ r = f_2(\theta),\ r = f_3(\theta),\ \ldots \tag{2}$$

$$r = g_1(\theta),\ r = g_2(\theta),\ r = g_3(\theta),\ \ldots \tag{3}$$

(b) Resolva cada equação de (2) simultaneamente com cada equação de (3).

(c) Verifique se a origem é um ponto de intersecção, fazendo $r = 0$ em ambas, obtendo assim

$$f(\theta) = 0 \quad \text{e} \quad g(\theta) = 0$$

Se cada uma dessas equações tiver uma solução em θ, não necessariamente a mesma, então a origem estará em ambas as curvas.

EXEMPLO 7 Ache os pontos de intersecção das duas curvas

$$r = 2 - 2\cos\theta \quad \text{e} \quad r = 2\cos\theta$$

Faça esboços de seus gráficos.

Solução Para encontrar outra equação da curva representada por

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

temos

$$(-1)r = 2 - 2\cos(\theta + \pi)$$

$$-r = 2 + 2\cos\theta$$

e

$$(-1)^2 r = 2 - 2\cos(\theta + 2\pi)$$

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

que é igual à equação original.

Analogamente, encontramos outras equações da curva dada por $r = 2\cos\theta$:

$$(-1)r = 2\cos(\theta + \pi)$$
$$-r = -2\cos\theta$$
$$r = 2\cos\theta$$

que é igual à equação original.

Assim, temos duas equações possíveis para a primeira curva, $r = 2 - 2\cos\theta$ e $-r = 2 + 2\cos\theta$, e uma equação para a segunda curva, $r = 2\cos\theta$. Resolvendo simultaneamente $r = 2 - 2\cos\theta$ e $r = 2\cos\theta$, obtemos

$$2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$
$$4\cos\theta = 2$$
$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}$$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, dando os pontos $(1, \frac{1}{3}\pi)$ e $(1, \frac{5}{3}\pi)$. Resolvendo simultaneamente $-r = 2 + 2\cos\theta$ e $r = 2\cos\theta$, teremos

$$2 + 2\cos\theta = -2\cos\theta$$
$$4\cos\theta = -2$$
$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$, dando os pontos $(-1, \frac{2}{3}\pi)$ e $(-1, \frac{4}{3}\pi)$. Entretanto, $(-1, \frac{2}{3}\pi)$ é o mesmo ponto que $(1, \frac{5}{3}\pi)$ e $(-1, \frac{4}{3}\pi)$ é o mesmo ponto que $(1, \frac{1}{3}\pi)$.

Verificando se a origem está na primeira curva, fazemos $r = 0$ na equação $r = 2 - 2\cos\theta$, obtendo

$$0 = 2 - 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = 1$$
$$\theta = 0$$

Logo, a origem está na primeira curva. Analogamente, tomamos $r = 0$ na equação $r = 2\cos\theta$, obtendo

$$0 = 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{2}\pi$$

Portanto, a origem está na segunda curva.

Assim sendo, os pontos de intersecção das duas curvas são $(1, \frac{1}{3}\pi)$, $(1, \frac{5}{3}\pi)$, e a origem. Esboços das curvas estão na Figura 21.

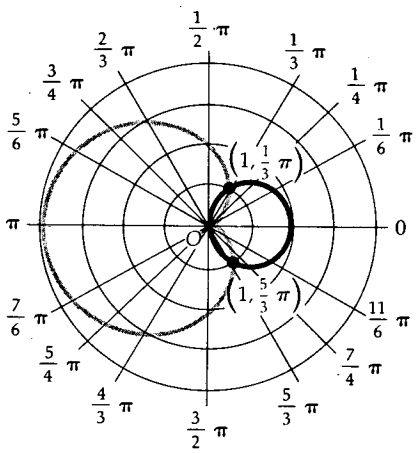


FIGURA 21

EXERCÍCIOS 10.6

Nos Exercícios de 1 a 36, faça um esboço do gráfico da equação dada.

1. (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $r = \frac{1}{3}\pi$
2. (a) $\theta = \frac{3}{4}\pi$; (b) $r = \frac{3}{4}\pi$
3. (a) $\theta = 2$; (b) $r = 2$
4. (a) $\theta = -3$; (b) $r = -3$
5. (a) $r\cos\theta = 4$; (b) $r = 4\cos\theta$
6. (a) $r\,\mathrm{sen}\,\theta = 2$; (b) $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$
7. (a) $r\,\mathrm{sen}\,\theta = -4$; (b) $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$
8. (a) $r\cos\theta = -5$; (b) $r = -5\cos\theta$
9. $r = 4 - 4\cos\theta$
10. $r = 3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$
11. $r = 2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$
12. $r = 3 + 3\cos\theta$
13. $r = 2 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$
14. $r = 4 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$
15. $r = 3 - 2\cos\theta$
16. $r = 3 - 4\cos\theta$

17. $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$ **18.** $r = 6 + 2 \cos \theta$
19. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ **20.** $r = 4 \operatorname{sen} 5\theta$ **21.** $r = 2 \cos 4\theta$
22. $r = 3 \cos 2\theta$ **23.** $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ **24.** $r = 3 \cos 3\theta$
25. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)
26. $r = e^{\theta/3}$ (espiral logarítmica)
27. $r = \dfrac{1}{\theta}$ (espiral recíproca)
28. $r = 2\theta$ (espiral de Arquimedes)
29. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)
30. $r^2 = 16 \cos 2\theta$ (lemniscata)
31. $r^2 = -25 \cos 2\theta$ (lemniscata)
32. $r^2 = -4 \operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)
33. $r = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$ (cissóide)
34. $r = 2 \sec \theta - 1$ (concóide de Nicomedes)
35. $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$
36. $r = 2|\cos \theta|$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas. Faça um esboço de cada par de gráficos com o mesmo eixo polar e a mesma origem.

37. $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 3 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases}$

39. $\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} r = 2 \cos 2\theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

41. $\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} r \operatorname{sen} \theta = 4 \\ r \cos \theta = 4 \end{cases}$

43. $\begin{cases} r = \operatorname{tg} \theta \\ r = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

45. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos \theta) \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} r = \operatorname{sen} \theta \\ r = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$

47. $\begin{cases} r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 8 \\ r \cos \theta = 2 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta) \\ r(1 - \operatorname{sen} \theta) = 3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} r = \cos \theta - 1 \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} r = 1 - \operatorname{sen} \theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

51. $\begin{cases} r = \operatorname{sen} 2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} r = 4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta \\ r = 4 \cos \theta \end{cases}$

53. Prove o Teorema 10.6.2. **54.** Prove o Teorema 10.6.3.

Nos Exercícios 55 e 56, o gráfico da equação dada intercepta a si mesmo. Ache os pontos nos quais isso ocorre.

55. $r = \operatorname{sen} \frac{3}{2}\theta$ **56.** $r = 1 + 2 \cos 2\theta$

10.7 ÁREA DE UMA REGIÃO EM COORDENADAS POLARES

Vamos desenvolver agora um método para encontrar a área de uma região limitada por duas retas que passam pela origem e por uma curva cuja equação seja dada em coordenadas polares.

Seja f uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Seja R a região limitada pela curva cuja equação é $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Então, R é a região AOB da Figura 1.

Consideremos uma partição Δ de $[\alpha, \beta]$ definida por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Temos, portanto, n subintervalos da forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, onde $i = 1, 2 \ldots, n$. Seja ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Veja a Figura 2, onde o i-ésimo subintervalo é mostrado junto com $\theta = \xi_i$. A medida em radianos do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ será denotada por $\Delta_i\theta$. O número de unidades de área na área do setor circular de raio $f(\xi_i)$ unidades e ângulo central com $\Delta_i\theta$ rad é dado por

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta$$

Há um desses setores circulares para cada um dos n subintervalos. A soma das medidas das áreas desses n setores circulares é

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_1)]^2 \, \Delta_1\theta + \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2 \, \Delta_2\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_n)]^2 \, \Delta_n\theta$$

que, usando somatória, pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2 \, \Delta_2\theta \qquad (1)$$

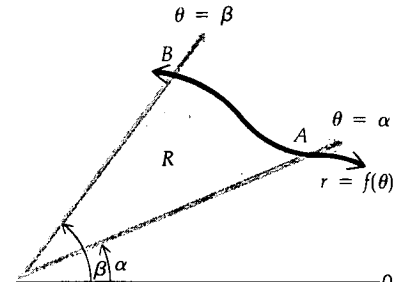


FIGURA 1

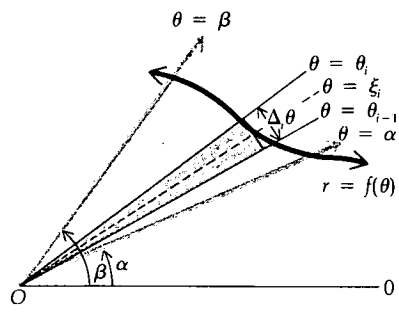


FIGURA 2

Seja $\|\Delta\|$ a norma da partição Δ; isto é, $\|\Delta\|$ é a medida do maior $\Delta_i\theta$. Então, se A unidades de área for a área da região R, definimos A como o limite da soma de Riemann (1) quando $\|\Delta\|$ tende a zero, que é uma integral definida.

10.7.1 DEFINIÇÃO Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e a curva cuja equação é $r = f(\theta)$, onde f é contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha\ \beta]$. Então, se A unidades de área for a área da região R,

$$A = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\ \Delta_i\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\ d\theta$$

EXEMPLO 1 Ache a área da região limitada pelo gráfico de

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

Solução A região, bem como um elemento de área, estão na Figura 3. Como a curva é simétrica em relação ao eixo polar, tomamos os limites de θ de 0 até π, o que determina a área da região limitada pela curva acima do eixo polar. Então, para determinar a área de toda a região, basta multiplicá-la por 2. Assim, se A unidades de área for a área pedida,

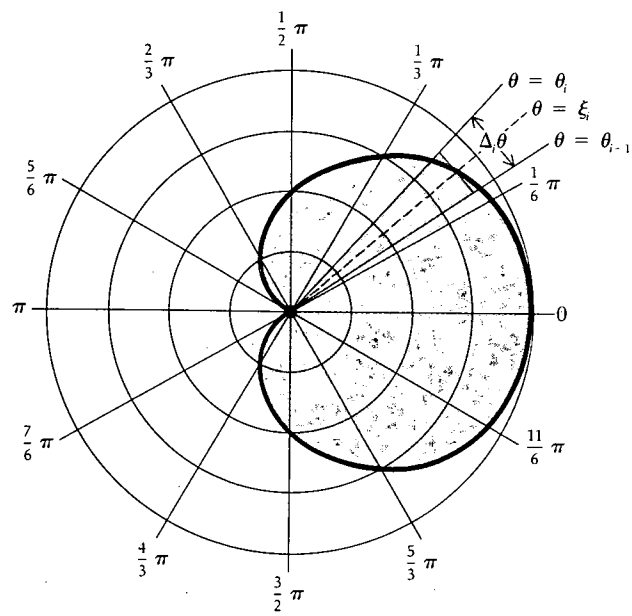


FIGURA 3

$$A = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos \xi_i)^2 \, \Delta_i\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= 4\left[\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 4(\pi + 0 + \tfrac{1}{2}\pi + 0 - 0)$$

$$= 6\pi$$

Logo, a área é 6π unidades de área.

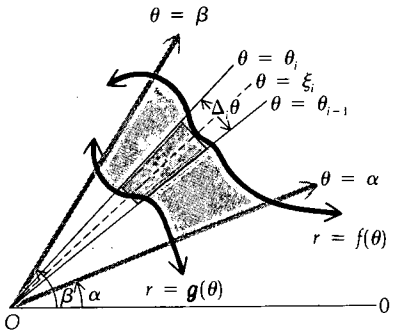


FIGURA 4

Consideremos agora a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas curvas cujas equações são $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, onde f e g são contínuas no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ e $f(\theta) \geq g(\theta)$ em $[\alpha, \beta]$. Veja a Figura 4. Queremos encontrar a área dessa região. Consideremos uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, sendo ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. A medida da área de um elemento de área é a diferença das medidas das áreas de dois setores circulares:

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta - \tfrac{1}{2}[g(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta = \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

A soma das medidas das áreas de n de tais elementos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

Assim, se A unidades de área for a área da região desejada, teremos

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

Como f e g são contínuas em $[\alpha, \beta]$, também $f - g$ será contínua; logo, existirá o limite e será igual a uma integral definida. Assim,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) \, d\theta$$

EXEMPLO 2 Ache a área da região interior à circunferência $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ e exterior à *limaçon* $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$.

Solução Para encontrar os pontos de intersecção tomamos

$$3\operatorname{sen}\theta = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}$$

$$\theta = \tfrac{1}{6}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{6}\pi$$

As curvas e a região são mostradas na Figura 5, bem como um elemento de área.

Seja $f(\theta) = 3 \operatorname{sen}\theta$ e $g(\theta) = 2 - \operatorname{sen}\theta$, então, a equação da circunferência será $r = f(\theta)$, enquanto que a da *limaçon* será $r = g(\theta)$.

Em vez de tomar os extremos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, usaremos as propriedades de simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e tomaremos os extremos de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}$; então multiplicaremos o resultado por 2.

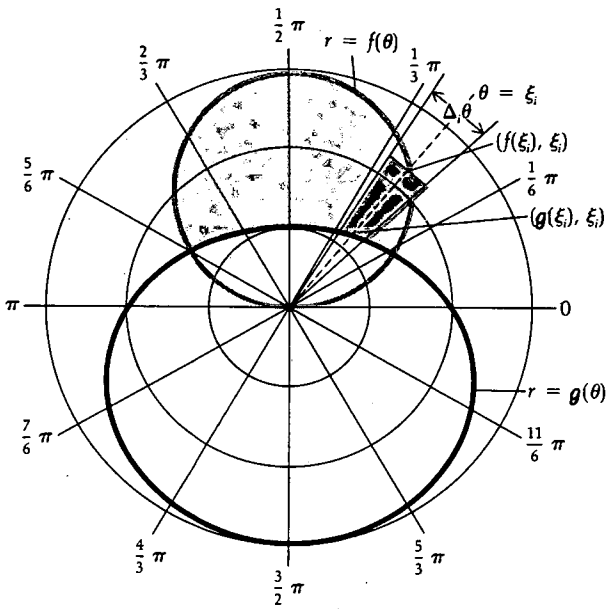


FIGURA 5

Logo, se A unidades de área for a área da região dada,

$$\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i\theta \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\,d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} [9 \operatorname{sen}^2\theta - (2 - \operatorname{sen}\theta)^2]\,d\theta \\
&= 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta - 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
&= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta + \Big[-4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= 4\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= -2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= (-2\operatorname{sen}\pi - 4\cos\tfrac{1}{2}\pi) - (-2\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi - 4\cos\tfrac{1}{6}\pi) \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Logo, a área é $3\sqrt{3}$ unidades de área.

EXERCÍCIOS 10.7

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a área da região limitada pelo gráfico da equação dada.

1. $r = 3\cos\theta$
2. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$
3. $r = 4\cos 3\theta$
4. $r = 4\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$
5. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$
6. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$
7. Ache a área da região limitada pelo gráfico da equação $r = \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
8. Ache a área da região limitada pelo gráfico de $r = e^{\theta}$ e pelas retas $\theta = 0$ e $\theta = 1$.

Nos Exercícios de 9 a 12, ache a área da região limitada por um laço do gráfico da equação dada.

9. $r = 3\cos 2\theta$
10. $r = a(1 - 2\cos\theta)$
11. $r = 1 + 3\operatorname{sen}\theta$
12. $r = a\operatorname{sen} 3\theta$

Nos Exercícios de 13 a 16, ache a área de intersecção das regiões limitadas pelos gráficos das duas equações dadas.

13. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2\cos\theta \end{cases}$
14. $\begin{cases} r = 4\operatorname{sen}\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$
15. $\begin{cases} r = 3\operatorname{sen} 2\theta \\ r = 3\cos 2\theta \end{cases}$
16. $\begin{cases} r^2 = 2\cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

Nos Exercícios de 15 a 21, ache a área da região que está no interior da região limitada pelo gráfico da primeira equação e no exterior da região limitada pelo gráfico da segunda equação.

17. $\begin{cases} r = a \\ r = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$
18. $\begin{cases} r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$
19. $\begin{cases} r = 2\operatorname{sen}\theta \\ r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \end{cases}$
20. $\begin{cases} r = 2a\operatorname{sen}\theta \\ r = a \end{cases}$
21. $\begin{cases} r = a(1 + \cos\theta) \\ r = 2a\cos\theta \end{cases}$

22. Determine o valor de a para o qual a região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$ tem uma área de 9π unidades de área.
23. Numa armação de óculos o tamanho das lentes é dado pela região limitada pelo gráfico da equação $r^2 = 4\cos 2\theta$. Quanto material é necessário para cobrir a região?
24. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral $r = a\theta$ durante sua segunda revolução, que não foi varrida em sua primeira revolução.
25. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da curva do Exercício 24 durante sua terceira revolução, que não foi varrida durante sua segunda revolução.

10.8 UM TRATAMENTO UNIFICADO DE SECÇÕES CÔNICAS E EQUAÇÕES POLARES DAS CÔNICAS

Nas Secções 10.1 até 10.3 definimos cada um dos três tipos de secções cônicas separadamente. Uma abordagem alternativa é começar com uma definição que dê as propriedades comuns das cônicas e então introduzir cada cônica como um caso particular da definição geral. Vamos estabelecer essa definição no teorema a seguir. A constante positiva e no enunciado do teorema é chamada **excentricidade** da cônica.

10.8.1 TEOREMA Uma secção cônica pode ser definida como o conjunto dos pontos P no plano, tal que a razão entre a distância não orientada de P a um ponto fixo e a distância não orientada de P a uma reta fixa que não contenha o ponto fixo seja uma constante positiva e. Além disso, se $e = 1$, a cônica será uma parábola; se $0 < e < 1$, ela será uma elipse e se $e > 1$, ela será uma hipérbole.

Prova Se $e = 1$, vemos, comparando a Definição 10.1.1 e o enunciado do teorema, que o conjunto é uma parábola tendo como ponto fixo seu foco e como reta fixa sua diretriz.

Suponha agora que $e \neq 1$. Primeiro vamos obter uma equação polar do conjunto de pontos descrito. Seja F o ponto fixo e l a reta fixa. Vamos tomar F como a origem e o eixo polar, bem como sua extensão, perpendicular a l. Vamos considerar primeiro a situação em que a reta l está à esquerda do ponto F. Seja D o ponto de intersecção de l com a extensão do eixo polar e d a distância não orientada de F a l. Consulte a Figura 1. Seja $P(r, \theta)$ qualquer ponto do conjunto à direita de l e sobre o lado terminal do ângulo de medida θ. Trace, perpendicularmente ao eixo polar e à reta l, PQ e PR respectivamente. O ponto P estará no conjunto descrito se e somente se

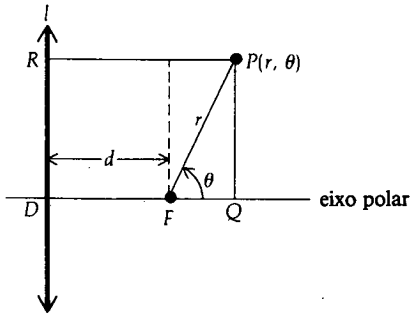


FIGURA 1

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \tag{1}$$

Como P está à direita de l, $\overline{RP} > 0$; assim $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Além disso, $|\overline{FP}| = r$ pois $r > 0$. Assim de (1),

$$r = e(\overline{RP}) \tag{2}$$

Entretanto, $\overline{RP} = \overline{DQ}$ e como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, temos

$$\overline{RP} = d + r\cos\theta$$

Substituindo essa expressão de $\overline{RP}$ em (2), obtemos

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

Resolvendo para r, temos

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \tag{3}$$

Uma representação cartesiana de (3) pode ser obtida substituindo $\cos\theta$ por x/r. Temos

$$r = \frac{ed}{1 - \frac{ex}{r}}$$

$$r = \frac{edr}{r - ex}$$

$$r - ex = ed$$

$$r = e(x + d)$$

Agora substituímos r por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ obtendo

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + d)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima, temos

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2$$

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = 2e^2dx + e^2d^2$$

Como $e \neq 1$, podemos dividir ambos os membros dessa equação por $1 - e^2$ e obter

$$x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Completando os quadrados para os termos envolvendo x e y e somando $e^4d^2/(1 - e^2)^2$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \tag{4}$$

Se a origem for transladada para o ponto $(e^2d/(1 - e^2), 0)$, a equação torna-se

$$\bar{x}^2 + \frac{1}{1 - e^2}\bar{y}^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{e^2d^2}{1 - e^2}} = 1 \tag{5}$$

Agora seja,

$$\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 \qquad \text{onde } a > 0 \tag{6}$$

Então (5) pode ser escrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Substituindo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ por x e y, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \tag{7}$$

Se $0 < e < 1$, então $a^2(1 - e^2) > 0$ e podemos fazer

$$b^2 = a^2(1-e^2) \qquad \text{onde } 0 < e < 1 \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação é uma forma padrão da equação cartesiana de uma elipse, tendo o eixo principal sobre o eixo x e centro na origem.

Se $e > 1$, então $a^2(e^2 - 1) > 0$ e podemos obter

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \qquad \text{onde } e > 1 \tag{9}$$

Substituindo essa equação em (7), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a forma padrão da equação cartesiana de uma hipérbole tendo o eixo principal sobre o eixo x e centro na origem.

De forma análoga, podemos deduzir a equação de uma cônica central (elipse ou hipérbole) de (1) quando $e \neq 1$ se a reta l estiver à direita do ponto F na origem. Neste caso, em vez da equação (3) temos

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \tag{10}$$

A dedução de (10) será deixada como exercício (veja o Exercício 33).

Podemos também deduzir a equação de uma cônica central a partir de (1), quando $e \neq 1$, se a reta l for paralela ao eixo polar e o ponto F estiver na origem. Neste caso, em vez da equação (3) obtemos

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{11}$$

onde e e d são, respectivamente, a excentricidade e a distância não orientada entre F e l. O sinal positivo é escolhido quando l estiver acima de F, e o sinal negativo será colocado quando ela estiver abaixo de F. As deduções de (11) serão deixadas como exercício (veja os Exercícios 34 e 35).

Podemos inverter o caminho que fizemos de (1) a (7). Assim, se P for qualquer ponto de uma cônica central, a equação (1) estará satisfeita.

Logo, podemos concluir que uma cônica pode ser definida pelo conjunto de pontos descrito. ■

Na demonstração acima mostramos que se a cônica for uma parábola, o ponto fixo F mencionado no teorema será o foco, enquanto que a reta fixa será a dire-

triz. Vamos mostrar que o ponto F será um dos focos quando tivermos uma cônica central. Como (4) é a equação de uma cônica central para a qual o ponto fixo F está na origem (pólo) e (7) é obtida de (4) transladando a origem para o ponto $(e^2d/(1 - e^2), 0)$, segue que para a cônica de equação (7), o ponto F está em $(-e^2d/(1 - e^2), 0)$. Queremos mostrar que esse ponto é um foco da cônica. De (6),

$$a = \begin{cases} \dfrac{ed}{1 - e^2} & \text{se } 0 < e < 1 \\ \dfrac{ed}{e^2 - 1} & \text{se } e > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-e^2d}{1 - e^2} = \begin{cases} -ae & \text{se } 0 < e < 1 \\ ae & \text{se } e > 1 \end{cases} \tag{12}$$

Se (7) for a equação de uma elipse ($0 < e < 1$), sabemos que os focos estão em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, onde

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad c > 0$$

Substituindo (8) nessa equação, obtemos

$$c^2 = a^2 - a^2(1 - e^2)$$

$$c^2 = a^2e^2$$

$$c = ae \tag{13}$$

Comparando (13) e (12) concluímos que se (7) for a equação de uma elipse, o ponto F será o foco esquerdo.

Se (7) for a equação de uma hipérbole ($e > 1$), de novo os focos estarão em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, mas para a hipérbole,

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c > 0$$

Substituindo (9) nessa equação, obtemos

$$c^2 = a^2 + a^2(e^2 - 1)$$

$$c^2 = a^2e^2$$

$$c = ae \tag{14}$$

Comparando (14) e (12), segue que se (7) for a equação de uma hipérbole, o ponto F será o foco direito.

A reta fixa l mencionada no Teorema 10.8.1 é chamada de **diretriz** correspondente ao foco em F. Quando o gráfico de (7) for uma elipse, a diretriz correspondente ao foco em $(-c, 0)$ ou, equivalentemente, $(-ae, 0)$ terá equação

$$x = -ae - d$$

Como quando $0 < e < 1$, $d = a(1 - e^2)/e$, essa equação torna-se

$$x = -ae - \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}$$

Analogamente, se o gráfico de (7) for uma hipérbole, a diretriz correspondente ao foco em $(c, 0)$ ou, equivalentemente, $(ae, 0)$ terá a equação

$$x = ae - d$$

Quando $e > 1$, $d = a(e^2 - 1)/e$; assim a equação da diretriz acima pode ser escrita como

$$x = \frac{a}{e}$$

Logo, mostramos que se (7) for a equação de uma elipse, $(-ae, 0)$ e $x = -a/e$ serão um foco e sua diretriz correspondente. Se (7) for a equação de uma hipérbole, $(ae, 0)$ e $x = a/e$ serão um foco e sua diretriz correspondente.

Como (7) contém somente potências pares de x e y, seu gráfico será simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Logo, se houver um foco em $(-ae, 0)$ sendo $x = -a/e$ a diretriz correspondente, por simetria haverá um foco em $(ae, 0)$ sendo $x = a/e$ a diretriz correspondente. Analogamente, para um foco em $(ae,0)$ sendo $x = a/e$ a diretriz correspondente, existirá um foco em $(-ae, 0)$ e a diretriz correspondente será $x = -a/c$. Esses resultados estão resumidos no teorema a seguir.

10.8.2 TEOREMA A cônica central com equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \tag{15}$$

onde $a > 0$, possui um foco em $(-ae, 0)$ cuja diretriz correspondente é $x = -a/e$ e um foco em $(ae, 0)$ cuja diretriz correspondente é $x = a/e$.

As Figuras 2 e 3 mostram esboços do gráfico de (15) com os focos e diretrizes nos casos respectivos de elipse e de hipérbole.

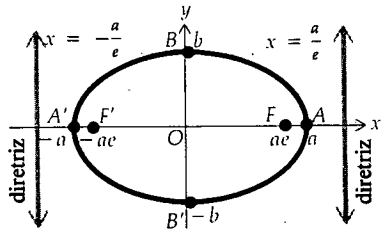


FIGURA 2

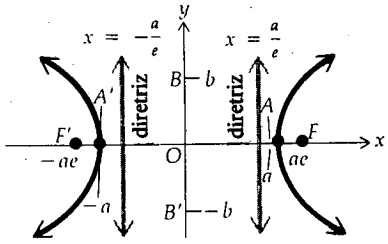


FIGURA 3

Das equações (13) e (14)

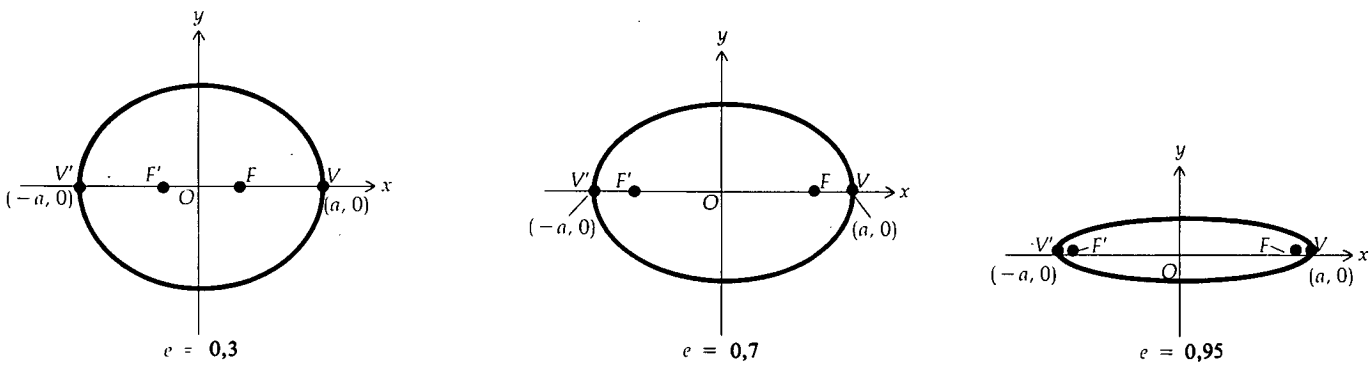
$$e = \frac{c}{a} \tag{16}$$

Como também $e = 2c/2a$, a excentricidade tanto da elipse como da hipérbole é a razão entre a distância não orientada entre os focos e a distância não orientada entre os vértices. Assim, a excentricidade dá uma indicação da forma da cônica central.

Para uma elipse, a excentricidade assume os valores entre 0 e 1. Quando os focos estão próximos, e tende a zero e a forma da elipse está próxima da circunferência. Veja a Figura 4(a) mostrando uma elipse para a qual $e = 0{,}3$. Se a permanecer fixo, então à medida que e cresce, o "achatamento" da elipse cresce. As Figuras 4(b) e (c) mostram elipses com excentricidades de 0,7 e 0,95,

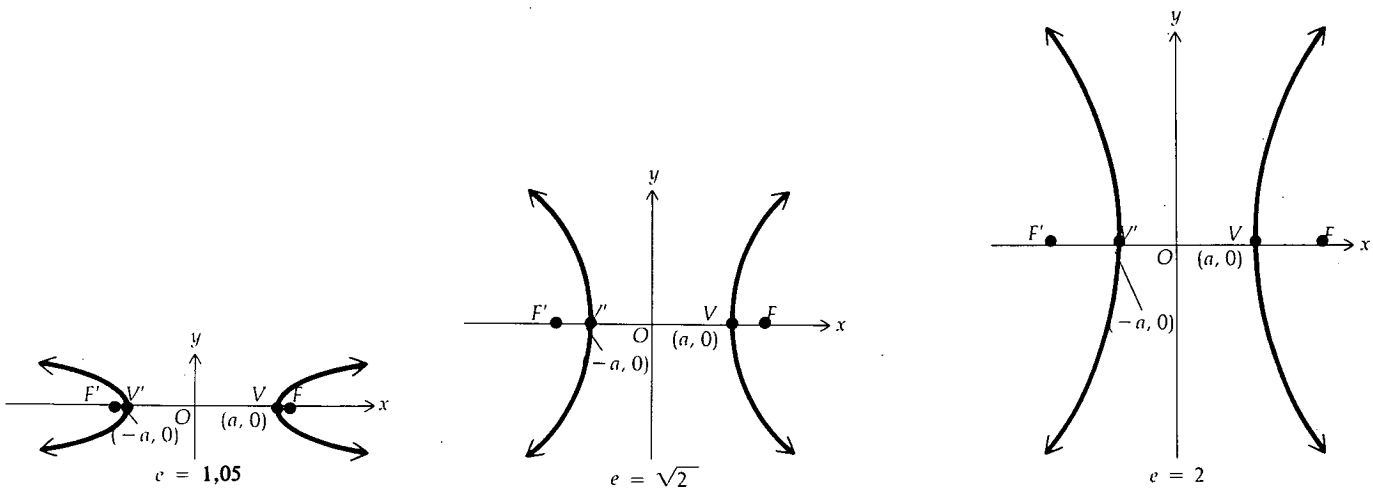
respectivamente, todas com o mesmo valor de a, como na Figura 4(a). As formas limites da elipse são uma circunferência de diâmetro $2a$ e um segmento de reta com $2a$ de comprimento.

Para uma hipérbole, a excentricidade é maior do que 1. A excentricidade de uma hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$, que é obtida de (9), tomando $a = b$. Veja a Figura 5(b). Se e tende a 1 com a fixo, então c tende a a e b tende a zero, e a forma da hipérbole vai se "estreitando" em torno de seu eixo principal. A Figura 5(a) é uma hipérbole com $e = 1{,}05$ e com a de mesmo valor que na Figura 5(b). Se e cresce com a fixo, então c e b crescem, e a hipérbole vai "se alargando" em torno de seu eixo principal. Veja a Figura 5(c) para uma hipérbole com $e = 2$ e a com o mesmo valor que nas Figuras 5(a) e (b).



(a) (b) (c)

FIGURA 4



(a) (b) (c)

FIGURA 5

EXEMPLO 1 A elipse do Exemplo 1 da Secção 10.2 tem equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Ache a excentricidade e as diretrizes dessa elipse. (b) Faça um esboço mostrando a elipse, as diretrizes e os focos. Escolha três pontos P quaisquer na elipse

e trace os segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P a um foco e à diretriz correspondente. Observe que a razão dessas distâncias é e.

Solução

(a) Da equação da elipse, $a = 5$ e $b = 4$. Foi mostrado no Exemplo 1 da Secção 10.2 que $c = 3$. Logo, de (16), $e = \frac{3}{5}$. Como $a/e = \frac{25}{3}$, segue do Teorema 10.8.2 que a diretriz correspondente ao foco em (3,0) tem equação $x = \frac{25}{3}$, e a diretriz correspondente ao foco em $(-3, 0)$ tem equação $x = -\frac{25}{3}$.

(b) A Figura 6 mostra a elipse, as diretrizes e os focos, bem como três pontos P_1, P_2 e P_3 da elipse. Para cada um desses pontos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$$

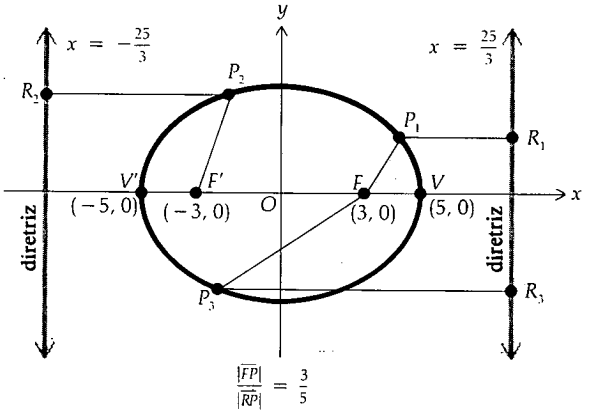


FIGURA 6

EXEMPLO 2 A hipérbole do Exemplo 1 da Secção 10.3 tem equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Ache a excentricidade e as diretrizes dessa hipérbole. (b) Faça um esboço mostrando a hipérbole, as diretrizes e os focos. Escolha também três pontos quaisquer P sobre a hipérbole e trace segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P ao foco e à sua diretriz correspondente. Observe que a razão entre essas distâncias é e.

Solução

(a) Da equação da hipérbole, $a = 3$ e $b = 4$. No Exemplo 1 da Secção 10.3 mostramos que $c = 5$. De (16), $e = \frac{5}{3}$. Como $a/e = \frac{9}{5}$, concluímos do Teorema 10.8.2 que a diretriz correspondente ao foco em (5, 0) tem equação $x = \frac{9}{5}$ e a diretriz correspondente ao foco em $(-5, 0)$ tem equação $x = -\frac{9}{5}$.

(b) A Figura 7 mostra a hipérbole, as diretrizes e os focos, bem como três pontos P_1, P_2 e P_3 da hipérbole. Para cada um desses pontos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$$

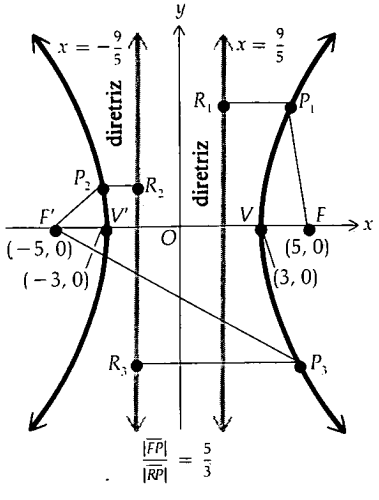


FIGURA 7

Na demonstração do Teorema 10.8.1 vimos que todos os três tipos de cônicas têm equações polares com a mesma forma. Quando um foco está na origem e a diretriz correspondente é perpendicular ou paralela ao eixo polar, a equação da cônica terá a forma de (3), (10) ou (11). Temos, assim, o teorema a seguir.

10.8.3 TEOREMA Vamos supor que tenhamos uma cônica para a qual e e d sejam, respectivamente, a excentricidade e a distância não orientada entre o foco e a diretriz correspondente.

(i) Se um foco da cônica estiver na origem e a diretriz correspondente for perpendicular ao eixo polar, então a equação da cônica será

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \tag{17}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz correspondente ao foco na origem está à direita do foco. Tomamos o sinal negativo quando ela estiver à esquerda do foco.

(ii) Se um foco da cônica estiver na origem e a diretriz correspondente for paralela ao eixo polar, então a equação da cônica será

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \tag{18}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz correspondente ao foco na origem estiver acima do foco e o sinal negativo é tomado quando ela estiver abaixo do foco.

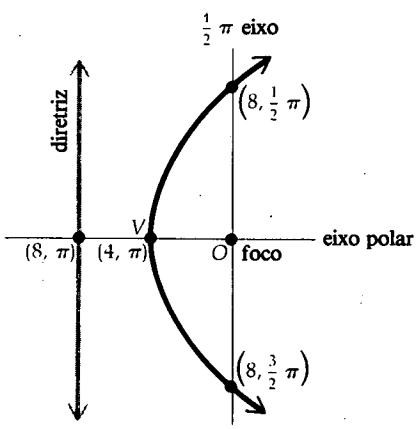


FIGURA 8

EXEMPLO 3 Uma parábola tem foco na origem e vértice em $(4, \pi)$. Ache a equação da parábola e uma equação da diretriz. Faça um esboço da parábola e da diretriz.

Solução Como o foco está na origem e o vértice está em $(4, \pi)$, o eixo polar e sua extensão estão ao longo do eixo da parábola. Além disso, o vértice está à esquerda do foco; assim a diretriz também está à esquerda do foco. Logo, a equação da parábola é da forma (17), com sinal negativo. Como o vértice está em $(4, \pi)$, $\frac{1}{2}d = 4$; assim $d = 8$. A excentricidade $e = 1$, e portanto obtemos a equação

$$r = \frac{8}{1 - \cos \theta}$$

A equação da diretriz é dada por $r \cos \theta = -d$, e como $d = 8$, então $r \cos \theta = -8$. A Figura 8 mostra um esboço da parábola e da diretriz.

EXEMPLO 4 A equação de uma cônica é

$$r = \frac{5}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Ache a excentricidade, identifique a cônica, escreva a equação da diretriz correspondente ao foco na origem, ache os vértices e faça um esboço da curva.

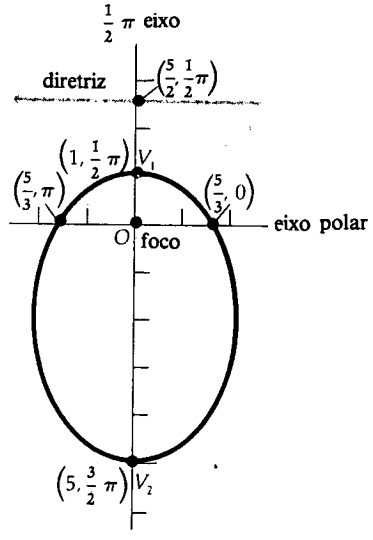


FIGURA 9

Solução Dividindo por 3 o numerador e o denominador da equação dada, obtemos

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

que é da forma (18) com o sinal positivo. A excentricidade $e = \frac{2}{3}$. Como $e < 1$, a cônica é uma elipse. Como $ed = \frac{5}{3}$, $d = \frac{5}{3} \div \frac{2}{3}$; assim $d = \frac{5}{2}$. O semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e sua extensão estão ao longo do eixo principal. A diretriz correspondente ao foco na origem está acima do foco e sua equação é $r \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{2}$. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$; e quando $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = 5$. Os vértices estão, portanto, em $(1, \frac{\pi}{2})$ e $(5, \frac{3}{2}\pi)$. Um esboço da elipse está na Figura 9.

EXEMPLO 5 O eixo polar e sua extensão estão ao longo do eixo principal de uma hipérbole tendo um foco na origem. A diretriz correspondente está à esquerda do foco. Se a hipérbole contém o ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ e $e = 2$, ache (a) a equação da hipérbole; (b) os vértices; (c) o centro; (d) a equação da diretriz correspondente ao foco na origem. (e) Faça um esboço da hipérbole.

Solução A equação da hipérbole é da forma (17) com o sinal negativo e $e = 2$. Temos, então,

$$r = \frac{2d}{1 - 2\cos\theta}$$

(a) Como o ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ está na hipérbole, suas coordenadas satisfazem a equação. Logo,

$$1 = \frac{2d}{1 - 2(-\frac{1}{2})}$$

de onde obtemos $d = 1$. Logo, a equação da hipérbole é

$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \tag{19}$$

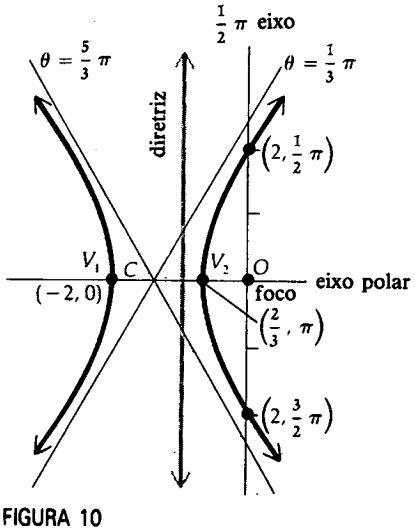


FIGURA 10

(b) Os vértices são os pontos da hipérbole para os quais $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. De (19), quando $\theta = 0$, $r = -2$ e quando $\theta = \pi$, $r = \frac{2}{3}$. Conseqüentemente, o vértice esquerdo V_1 está no ponto $(-2, 0)$ e o vértice direito V_2 está no ponto $(\frac{2}{3}, \pi)$.

(c) O centro da hipérbole é o ponto sobre o eixo principal no ponto médio do segmento que une os vértices. Esse é o ponto $(\frac{4}{3}, \pi)$.

(d) A equação da diretriz correspondente ao foco na origem é dada por $r\cos\theta = -d$. Como $d = 1$, essa equação é $r\cos\theta = -1$.

(e) Para facilitar o esboço da hipérbole, vamos traçar as duas assíntotas. Essas retas passam pelo centro da hipérbole e são paralelas às retas $\theta = \theta_1$, e $\theta = \theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais r não está definido. De (19), r não está definido quando $1 - 2\cos\theta = 0$. Logo, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ e $\theta_2 = \frac{5}{3}\pi$. A Figura 10 mostra um esboço da hipérbole, bem como as duas assíntotas e a diretriz correspondente ao foco na origem.

EXERCÍCIOS 10.8

Nos Exercícios de 1 a 8, (a) ache a excentricidade, os focos e as diretrizes da cônica central dada. (b) Faça um esboço mostrando a cônica, os focos e as diretrizes. Também escolha quatro pontos P (um em cada quadrante) sobre a cônica e trace os segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P ao foco e à diretriz correspondente. Observe que a razão entre essas distâncias é e.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 9y^2 = 4$
3. $25x^2 + 4y^2 = 100$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $4x^2 - 25y^2 = 100$
6. $x^2 - 9y^2 = 9$
7. $16x^2 - 9y^2 = 144$
8. $4y^2 - x^2 = 16$

Nos Exercícios 9 e 10, cada equação polar representa uma cônica tendo um foco na origem. Identifique a cônica.

9. (a) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$; (b) $r = \dfrac{6}{4 + 5\,\mathrm{sen}\,\theta}$; (c) $r = \dfrac{5}{4 - \cos\theta}$; (d) $r = \dfrac{4}{1 + \mathrm{sen}\,\pi}$

10. (a) $r = \dfrac{1}{1 - \mathrm{sen}\,\theta}$; (b) $r = \dfrac{2}{3 + \mathrm{sen}\,\theta}$; (c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$; (d) $r = \dfrac{5}{1 - \cos\pi}$

Nos Exercícios de 11 a 22, a equação é de uma cônica tendo um foco na origem. Em cada exercício, (a) ache a excentricidade, (b) identifique a cônica, (c) escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem, (d) faça o esboço da curva.

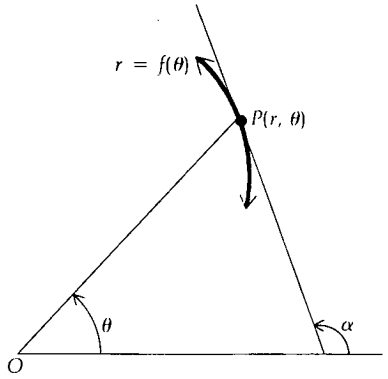
11. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$
12. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$
13. $r = \dfrac{5}{2 + \mathrm{sen}\,\theta}$
14. $r = \dfrac{4}{1 - 3\cos\theta}$
15. $r = \dfrac{6}{3 - 2\cos\theta}$
16. $r = \dfrac{1}{2 + \mathrm{sen}\,\theta}$
17. $r = \dfrac{9}{5 - 6\,\mathrm{sen}\,\theta}$
18. $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$
19. $r = \dfrac{10}{7 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$
20. $r = \dfrac{7}{3 + 4\cos\theta}$
21. $r = \dfrac{10}{4 + 5\cos\theta}$
22. $r = \dfrac{1}{5 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$

Nos Exercícios de 23 a 28, ache a equação polar da cônica que tem um foco na origem e que satisfaz as condições dadas.

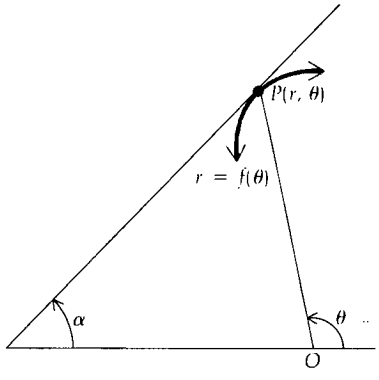
23. Parábola; vértice em $(4, \frac{3}{2}\pi)$.
24. Elipse; $e = \frac{1}{2}$, vértice em $(4, \pi)$.
25. Hipérbole; $e = \frac{4}{3}$, $r\cos\theta = 9$ é a diretriz correspondente ao foco na origem.
26. Hipérbole; vértices em $(1, \frac{1}{2}\pi)$ e $(3, \frac{1}{2}\pi)$.
27. Elipse; vértices em $(3, 0)$ e $(1, \pi)$.
28. Parábola; vértice em $(6, \frac{1}{2}\pi)$.
29. (a) Ache a equação polar da hipérbole que tem um foco na origem, a diretriz correspondente à esquerda do foco, se o ponto $(2, \frac{4}{3}\pi)$ está na hipérbole e $e = 3$. (b) Escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem.
30. (a) Ache a equação polar da hipérbole para a qual $e = 3$ e que tem a reta $r\,\mathrm{sen}\,\theta = 3$ como a diretriz correspondente ao foco na origem. (b) Ache as equações polares de duas retas que passam pela origem e são paralelas às assíntotas da hipérbole.
31. Ache a área da região interior à elipse $r = 6/(2 - \mathrm{sen}\,\theta)$ acima da parábola $r = 3/(1 + \mathrm{sen}\,\theta)$.
32. Para a elipse e a parábola do Exercício 31, ache a área da região dentro da elipse e abaixo da parábola.
33. Mostre que a equação de uma cônica que tem eixo principal ao longo do eixo polar e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está à direita do foco, é $r = ed/(1 + e\cos\theta)$.
34. Mostre que a equação de uma cônica que tem eixo principal ao longo do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está acima do foco é $r = ed/(1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta)$.
35. Mostre que a equação da cônica que tem eixo principal ao longo do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está abaixo do foco, é $r = ed/(1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta)$.
36. Mostre que a equação $r = k\,\mathrm{cosec}^2\frac{1}{2}\theta$, onde k é uma contante, é a equação polar de uma parábola.
37. Um cometa move-se numa órbita parabólica em torno do Sol, no foco da parábola. Quando o cometa está a 80 milhões de quilômetros do Sol, o segmento de reta do cometa ao Sol faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rad com o eixo da órbita. (a) Ache a equação da órbita do cometa. (b) Qual a distância mínima entre o cometa e o Sol?
38. A órbita de um planeta é elíptica com equação $r = p/(1 + e\cos\theta)$ onde o Sol está na origem. Ache a distância média entre o planeta e o Sol em relação a θ.
39. Use o Teorema 10.8.1 para achar a equação polar de uma cônica central cujo centro está na origem, o eixo principal está ao longo do eixo polar e de sua extensão e a distância da origem à diretriz é a/e.
40. Mostre que as retas tangentes nos pontos de intersecção das parábolas $r = a/(1 + \cos\theta)$ e $r = b/(1 - \cos\theta)$ são perpendiculares.

10.9 RETAS TANGENTES A CURVAS EM COORDENADAS POLARES (*Suplementar*)

Primeiro derivamos uma fórmula para encontrar a inclinação de uma reta tangente a uma curva em coordenadas polares no ponto (r, θ) da curva. Seja $r = f(\theta)$ uma equação polar da curva. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas retangulares e um sistema de coordenadas polares no mesmo plano e com o eixo polar coincidindo com o semi-eixo x positivo. Na Secção



(a)



(b)

FIGURA 1

10.5 vimos que esses dois sistemas estão ligados pelas relações

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

As variáveis x e y podem ser consideradas como funções de θ, pois $r = f(\theta)$. Se derivarmos em relação a θ ambos os membros dessas relações, obtemos, aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

e

$$\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta \tag{2}$$

Seja α a medida em radianos da inclinação da reta tangente à curva em (r, θ). Veja a Figura 1(a) e (b) onde em (a) $\alpha \geqslant \theta$ e em (b) $\alpha < \theta$. Em ambos os casos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

e se $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

Substituindo (1) e (2) nessa equação, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

Se $\cos\theta \neq 0$, dividimos o numerador e o denominador do segundo membro de (3) por $\cos\theta$ e substituímos $\dfrac{dy}{dx}$ por $\operatorname{tg}\alpha$, obtendo

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{tg}\theta}} \tag{4}$$

Se em (3), $\cos\theta = 0$, obtemos

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \tag{5}$$

que é verdadeira para os pontos sobre o semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão.

Observe em (4) que se $r = 0$ e $\dfrac{dr}{d\theta} \neq 0$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta$$

Dessa equação concluímos que os valores de θ que satisfazem uma equação polar da curva quando $r = 0$ são as inclinações das retas tangentes à curva na origem. Assim, se $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ são esses valores de θ, então as equações das retas tangentes à curva na origem são

$$\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2,\ \ldots,\ \theta = \theta_k$$

Na Secção 10.6 usamos essa informação para auxiliar o traçado de esboços de curvas polares.

EXEMPLO 1 Ache a inclinação da reta tangente à curva do Exemplo 3(c) da Secção 10.6 no ponto onde (a) $\theta = 0$ e (b) $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

Solução A equação da curva é

$$r = 2 - \operatorname{sen}\theta \tag{6}$$

Assim

$$\frac{dr}{d\theta} = -\cos\theta$$

Se α for a medida em radianos do ângulo de inclinação da reta tangente em (r, θ), então de (4),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(-\cos\theta) + (2 - \operatorname{sen}\theta)}{-\cos\theta - (2 - \operatorname{sen}\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos\theta}{-1 + \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 1}$$

(a) Em $\theta = 0$, $r = 2$ e de (7),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2(1)(1-0)}{2(0) - 2(0) - 1} = -2$$

(b) Em $\theta = \frac{5}{6}\pi$, $r = \frac{3}{2}$ e

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2(\frac{1}{4}) - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{-\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - 1 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

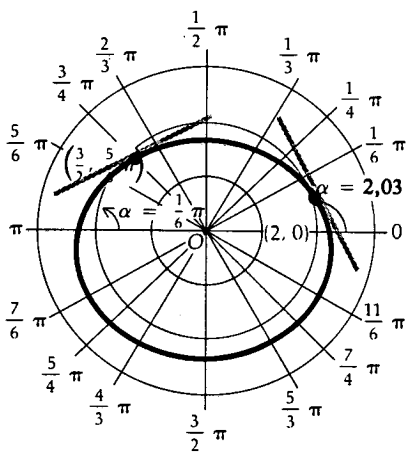


FIGURA 2

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de (6) e as retas tangentes em $\theta = 0$ e $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Em $\theta = 0$, como $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\alpha \approx 2{,}03$; em $\theta = \frac{5}{6}\pi$, como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

A fórmula (4) pode ser usada para determinar onde uma curva polar tem retas tangentes horizontal e vertical. Essa informação é muito útil ao esboçar gráficos de equações polares. O procedimento está mostrado na ilustração e no exemplo a seguir, aplicado a duas *limaçons* do Exemplo 3 da Secção 10.6.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A curva do Exemplo 3(c) da Secção 10.6 e do Exemplo 1 desta secção tem a equação

$$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

As retas tangentes horizontais a essa curva ocorrem quando tg $\alpha = 0$. Assim, igualamos o numerador de (7) a zero e resolvemos em θ.

$$2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \qquad 1 - \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \quad \theta = \tfrac{3}{2}\pi \qquad \operatorname{sen}\theta = 1$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi$$

Logo, a curva tem uma reta tangente horizontal nos pontos $(1, \frac{1}{2}\pi)$ e $(3, \frac{3}{2}\pi)$. As retas tangentes verticais ocorrerão quando o denominador de (7) for zero e o numerador for diferente de zero. Vamos resolver a equação resultante.

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{sen}\theta = 1{,}3660$ $\operatorname{sen}\theta = -0{,}3660$

não tem solução $\theta \approx 3{,}51$ $\theta \approx 5{,}91$

Logo, a curva tem uma reta tangente vertical nos pontos com coordenadas polares (2,37, 3,51) e (2,37, 5,91). A Figura 3 mostra um esboço do gráfico da curva e das retas tangentes horizontal e vertical. ◀

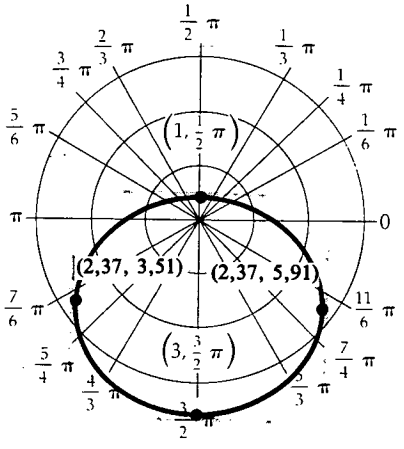


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Determine os pontos nos quais a curva do Exemplo 3(a) da Secção 10.6 tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico e mostre essas retas tangentes.

Solução A curva tem a equação

$$r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Logo

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta$$

Se α for a medida em radianos do ângulo de inclinação da reta tangente em (r, θ), temos, de (4),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(2\cos\theta) + (3 + 2\operatorname{sen}\theta)}{2\cos\theta - (3 + 2\operatorname{sen}\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\cos\theta}{2 - 2\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= -\frac{\cos\theta(4\operatorname{sen}\theta + 3)}{4\operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 2} \end{aligned} \tag{8}$$

Para determinar as retas tangentes horizontais igualamos o numerador de (8) a zero.

$$\cos\theta(4\operatorname{sen}\theta + 3) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \qquad 4\operatorname{sen}\theta + 3 = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \quad \theta = \tfrac{3}{2}\pi \qquad \operatorname{sen}\theta = -\tfrac{3}{4}$$

$$\theta \approx 3{,}99 \qquad \theta \approx 5{,}44$$

Assim, a curva tem uma reta tangente horizontal nos pontos $(5, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, 3{,}99)$ e $(\frac{3}{2}, 5{,}44)$.

As retas tangentes verticais são encontradas igualando a zero o denominador de (8).

$$4\operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}4254 \qquad \operatorname{sen}\theta = -1{,}1754$$

$$\theta \approx 0{,}44 \qquad \theta \approx 2{,}70 \qquad \text{não tem solução}$$

Logo, a curva tem uma reta tangente vertical nos pontos com coordenadas polares (3,85, 0,44) e (3,85, 2,70).

Veja a Figura 4 que mostra um esboço do gráfico da curva e das retas tangentes horizontal e vertical.

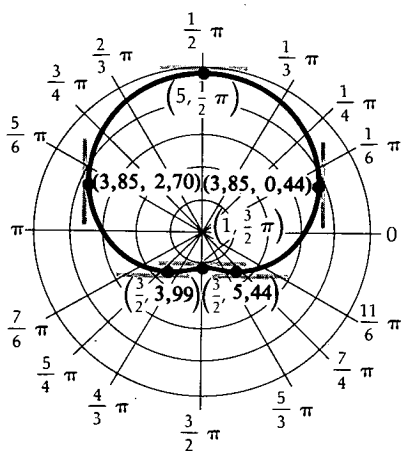


FIGURA 4

Observe, na Figura 4, que a *limaçon* tem um dente. Esse fato é evidente pois existem quatro retas tangentes horizontais. A *limaçon* da Figura 3 não tem dente; ela tem apenas duas retas tangentes horizontais.

A fórmula (4) é geralmente de aplicação complicada. Uma fórmula mais simples é obtida considerando o ângulo entre a reta OP e a reta tangente. Esse ângulo terá uma medida de χ rad, sendo medido da reta OP, no sentido anti-horário, até a reta tangente, $0 \leqslant \chi < \pi$.

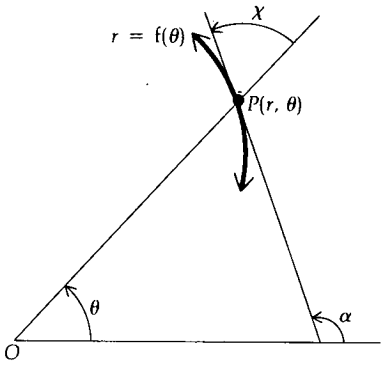


FIGURA 5

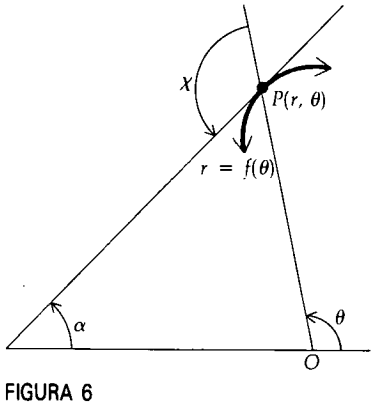


FIGURA 6

Há dois casos possíveis: $\alpha \geqslant \theta$ e $\alpha < \theta$. Esses dois casos estão ilustrados nas Figuras 5 e 6. Na Figura 5, $\alpha > \theta$ e $\chi = \alpha - \theta$. Na Figura 6, $\alpha < \theta$ e $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$. Em cada caso

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} (\alpha - \theta)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}$$

Substituindo o valor de tg α de (4) nessa equação, obtemos

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta} - \operatorname{tg} \theta}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta} \right) \operatorname{tg} \theta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r - \operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \operatorname{tg}^2 \theta}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}^2 \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \operatorname{tg} \theta}$$

$$= \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \dfrac{dr}{d\theta}}$$

$$= \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}$$

Provamos o teorema a seguir.

10.9.1 TEOREMA Seja χ a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente ao gráfico de $r = f(\theta)$ no ponto $P(r, \theta)$, onde P não está no semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão. O ângulo χ é medido de OP no sentido anti-horário até a reta tangente, e $0 \leqslant \chi < \pi$. Então,

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}} \tag{9}$$

Comparando a equação no Teorema 10.9.1, com (4) você pode ver por que é mais desejável considerar χ em vez de α, quando trabalhamos com coordenadas polares. O Teorema 10.9.1 não pode ser usado se P estiver no semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão. Nesse caso, usamos (5) para calcular tg α.

EXEMPLO 3 Dada a cardióide com equação

$$r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$$

Ache χ e α nos pontos onde (a) $\theta = \frac{1}{6}\pi$, (b) $\theta = \frac{1}{3}\pi$ e (c) $\theta = \frac{2}{3}\pi$. (d) Faça um esboço da cardióide e mostre χ e α em cada um desses pontos.

Solução Da equação dada

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta$$

Do Teorema 10.9.1,

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{2 + 2\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \tag{9}$$

(a) Quando $\theta = \frac{1}{6}\pi$, de (9) obtemos

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{3}$$

Assim, $\chi = \frac{1}{3}\pi$. Como $\alpha > \theta$, $\chi = \alpha - \theta$. Logo,

$$\alpha = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

(b) Quando $\theta = \frac{1}{3}\pi$, de (9)

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

Logo, $\chi \approx 1{,}31$. Como $\alpha > \theta$, $\chi = \alpha - \theta$. Assim,

$$\alpha \approx \tfrac{1}{3}\pi + 1{,}31$$

$$\approx 2{,}36$$

(c) Quando $\theta = \frac{2}{3}\pi$, de (9)

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= -2 - \sqrt{3}$$

Logo, $\chi \approx 1{,}83$. Como $\alpha < \theta$, $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$. Logo,

$$\alpha \approx (\tfrac{2}{3}\pi + 1{,}83) - \pi$$

$$= 1{,}83 - \tfrac{1}{3}\pi$$

$$\approx 0{,}78$$

(d) A Figura 7 mostra um esboço da cardióide e χ e α em cada um dos pontos $(3, \frac{1}{6}\pi)$, $(2 + \sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi)$.

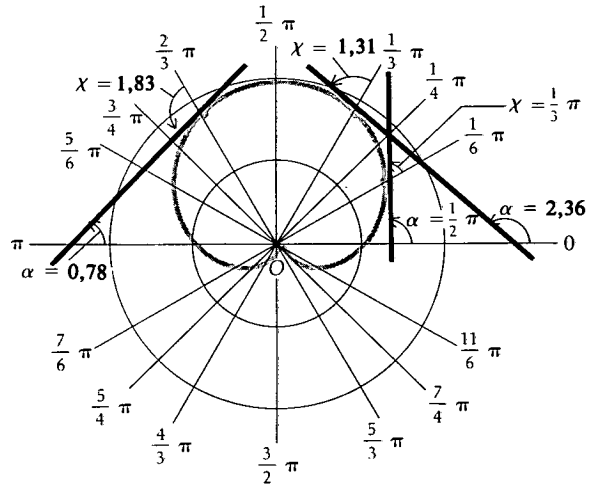


FIGURA 7

EXEMPLO 4 Ache, com precisão de 10 min, a medida do menor ângulo entre as retas tangentes às curvas

$$r = 3 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$$

no ponto $P(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\pi)$.

Solução O gráfico de cada uma das equações é uma rosácea de quatro folhas. Veja a Figura 8 que mostra uma parte de cada curva no ponto P; χ_1 é a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente à curva $r = 3 \cos 2\theta$, e χ_2 é a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente à curva $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$. Se β for o ângulo entre as retas tangentes em P, então

$$\beta = \chi_1 - \chi_2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\chi_1 - \chi_2)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \chi_1 - \operatorname{tg} \chi_2}{1 + \operatorname{tg} \chi_1 \operatorname{tg} \chi_2} \tag{10}$$

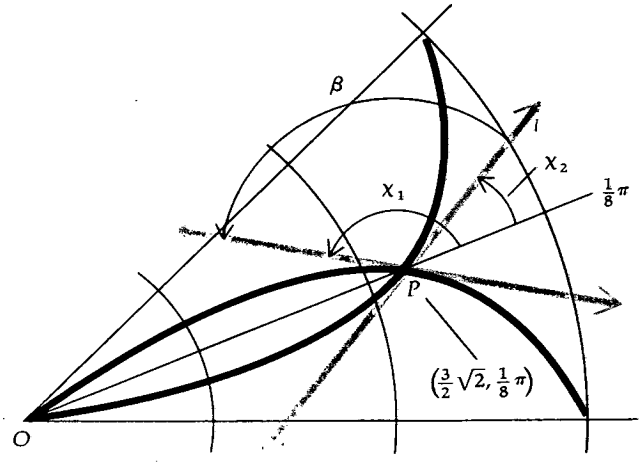


FIGURA 8

Os valores de tg χ_1 e tg χ_2 são encontrados pelo Teorema 10.9.1. Para o cálculo de tg χ_1, usamos $r = 3 \cos 2\theta$ e $dr/d\theta = -6 \operatorname{sen} 2\theta$. Para tg χ_2 temos $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$ e $dr/d\theta = 6 \cos 2\theta$. Assim,

$$\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{3 \cos 2\theta}{-6 \operatorname{sen} 2\theta} \qquad \operatorname{tg} \chi_2 = \frac{3 \operatorname{sen} 2\theta}{6 \cos 2\theta}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} 2\theta \qquad = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta$$

Quando $\theta = \frac{1}{8}\pi$,

$$\operatorname{tg} \chi_1 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4}\pi \qquad \operatorname{tg} \chi_2 = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}\pi$$

$$= -\tfrac{1}{2} \qquad = \tfrac{1}{2}$$

Substituindo esses valores em (10), obtemos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}$$

$$= -\tfrac{4}{3}$$

O ângulo β tem uma medida de 126°50′ com precisão de 10 min. Assim, a medida do menor ângulo entre as duas retas tangentes é 180° − 126°50′ = 53°10′.

EXERCÍCIOS 10.9

Nos Exercícios de 1 a 8, ache a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto, cujo valor de θ é o indicado. Faça também um esboço do gráfico e da reta tangente.

1. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$; $\theta = \frac{1}{6}\pi$
2. $r = 4 \cos \theta$; $\theta = \frac{1}{3}\pi$
3. $r = 1 - \cos \theta$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$
4. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$
5. $r = 6 + 2 \operatorname{sen} \theta$; $\theta = \frac{5}{6}\pi$
6. $r = 3 - 2 \cos \theta$; $\theta = \frac{2}{3}\pi$
7. $r = 3 \cos 2\theta$; $\theta = \frac{2}{3}\pi$
8. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$; $\theta = \frac{5}{6}\pi$

Nos Exercícios de 9 a 20, determine os pontos nos quais a curva dada tem retas tangentes verticais e horizontais. Faça um esboço do gráfico e mostre essas retas tangentes.

9. $r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$
10. $r = 2 + \cos \theta$
11. $r = 4 - 2 \cos \theta$
12. $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$
13. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$
14. $r = 3 - 3 \cos \theta$
15. $r = 2 + 3 \cos \theta$
16. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$
17. $r = \cos 2\theta$
18. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$
19. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$
20. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

Nos Exercícios de 21 a 28, ache χ e α para a curva dada no ponto cujo valor de θ é o indicado. Faça um esboço da curva e mostre χ e α.

21. $r\theta = 4$; $\theta = 1$
22. $r = 2\theta$; $\theta = \frac{5}{2}\pi$
23. $r = \sec 2\theta$; $\theta = -\frac{1}{8}\pi$
24. $r = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$; $\theta = \frac{1}{3}\pi$
25. $r = \theta^2$; $\theta = \frac{1}{2}\pi$
26. $r = \cos 2\theta$; $\theta = \frac{1}{12}\pi$
27. $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$; $\theta = \frac{1}{6}\pi$
28. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$; $\theta = \pi$

Nos Exercícios de 29 a 32, ache a medida, em graus, do menor ângulo entre as retas tangentes ao par de curvas dadas nos pontos de intersecção indicados.

29. $\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$; $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$
30. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 6 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$; $(3, \frac{1}{6}\pi)$
31. $\begin{cases} r = 4 \cos \theta \\ r = 4 \cos^2 \theta - 3 \end{cases}$; $(-2, \frac{2}{3}\pi)$
32. $\begin{cases} r = -4 \operatorname{sen} \theta \\ r = 4 \cos 2\theta \end{cases}$; a origem

Nos Exercícios de 33 a 36, ache a medida, em graus, do ângulo entre as retas tangentes ao par de curvas dadas em todos os pontos de intersecção.

33. $\begin{cases} r = 1 - \operatorname{sen} \theta \\ r = 1 + \operatorname{sen} \theta \end{cases}$
34. $\begin{cases} r = 2 \sec \theta \\ r = \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta \end{cases}$
35. $\begin{cases} r = \cos \theta \\ r = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$
36. $\begin{cases} r = 3 \cos \theta \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases}$

37. Dada a curva $r = k$, onde k é uma constante não-nula e α é a medida em radianos da inclinação da reta tangente à curva no ponto (r, θ). Mostre que tg α tg $\theta = -1$ para todo θ tal que tg $\theta \neq 0$.
38. Prove que em cada ponto da espiral logarítmica $r = be^{a\theta}$, χ é o mesmo.
39. Prove que tg χ = tg $\frac{1}{2}\theta$ em todos os pontos da cardióide $r = 2(1 - \cos \theta)$.
40. Para a curva $r \cos \theta = 4$ ache $\lim_{\theta \to \pi/2} \chi$.

41. Prove que nos pontos de intersecção das cardióides $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e $r = b(1 - \operatorname{sen}\theta)$ suas retas tangentes são perpendiculares para todos os valores de a e b.

42. Prove que nos pontos de intersecção de duas curvas $r = a\sec^2\frac{1}{2}\theta$ e $r = b\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta$ suas retas tangentes são perpendiculares.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) ache a equação da parábola tendo o foco e a diretriz dados, (b) ache o comprimento do latus rectum e (c) faça um esboço da parábola.

1. Foco em $(0, -3)$; diretriz, $y = 3$
2. Foco em $(0, 4)$; diretriz, $y = -4$
3. Foco em $(1, 0)$; diretriz, $x = -1$
4. Foco em $(6, 0)$; diretriz, $x = -6$

5. Faça um esboço da parábola com equação $x^2 = 6y$ e ache (a) o foco e (b) a equação da diretriz.
6. Faça um esboço da parábola com equação $y = x^2 - 8x$. Ache (a) o vértice, (b) a equação do eixo, (c) o foco e (d) a equação da diretriz.
7. Dada a parábola com equação $y^2 + 8x - 6y = 7$, ache (a) o vértice, (b) a equação do eixo, (c) o foco e (d) a equação da diretriz. Faça um esboço da curva.
8. Ache a equação da parábola com vértice em $(-3, 5)$ e foco em $(-3, -1)$.
9. Ache a equação da parábola tendo vértice em $(5, 1)$, eixo paralelo ao eixo y e passando pelo ponto $(9, 3)$.
10. Mostre que toda a equação da forma $xy + ax + by + c = 0$ pode sempre ser escrita na forma $x'y' = k$ por uma translação de eixos, e determine o valor de k.
11. Qualquer secção de um espelho parabólico feita por um plano que passa pelo eixo do espelho é um segmento de parábola. A altura do segmento é 12 cm e o comprimento da base é 18 cm. Uma secção do espelho feita por um plano perpendicular ao seu eixo é uma circunferência. Ache a circunferência da secção plana circular se o plano perpendicular ao eixo estiver a 3 cm do vértice.
12. A diretriz da parábola $y^2 = 4px$ é tangente à circunferência que tem o foco da parábola como centro. Ache a equação da circunferência e os pontos de intersecção das duas curvas.

Nos Exercícios de 13 a 20, o gráfico da equação dada é uma elipse ou uma hipérbole. Ache o centro, vértices e focos da cônica. Se o gráfico for uma elipse, ache também as extremidades do eixo menor. Se o gráfico for uma hipérbole, ache também as equações das assíntotas. Faça um esboço da curva e mostre os focos. Se a curva for uma hipérbole, trace também as assíntotas.

13. $4x^2 + 25y^2 = 100$ **14.** $25x^2 - 4y^2 = 100$
15. $16x^2 - 9y^2 = 144$ **16.** $9x^2 + 16y^2 = 144$
17. $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$
18. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$
19. $25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0$
20. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y + 11 = 0$

Nos Exercícios 21 e 22, ache a equação da elipse com as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

21. Vértices em $(0, 8)$ e $(0, -4)$ e um foco em $(0, 6)$.
22. Focos em $(-3, -2)$ e $(-3, 6)$ e o comprimento do semi-eixo menor é três quartos do comprimento do semi-eixo maior.

Nos Exercícios 23 e 24, ache a equação da hipérbole com as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

23. Focos em $(-5, 1)$ e $(1, 1)$ e um vértice em $(-4, 1)$.
24. Centro em $(-5, 2)$, um vértice em $(-1, 2)$ e um foco em $(0, 2)$.

Nos Exercícios de 25 a 28, ache a equação polar do gráfico tendo a equação cartesiana dada.

25. $4x^2 - 9y^2 = 36$ **26.** $2xy = 1$
27. $x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0$ **28.** $y^4 = x^2(a^2 - y^2)$

Nos Exercícios de 29 a 32, ache a equação cartesiana do gráfico tendo a equação polar dada.

29. $r = 9\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$ **30.** $r(1 - \cos\theta) = 2$
31. $r = 4\cos 3\theta$ **32.** $r = a\operatorname{tg}^2\theta$

33. Faça um esboço do gráfico de (a) $r\theta = 3$ (espiral recíproca) e (b) $3r = \theta$ (espiral de Arquimedes).
34. Mostre que as equações $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta - 1$ têm o mesmo gráfico.
35. Faça um esboço do gráfico de $r = \sqrt{|\cos\theta|}$.
36. Faça um esboço do gráfico de $r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$.
37. Faça um esboço do gráfico de $r = 2(1 + \cos\theta)$.
38. Faça um esboço do gráfico de $r^2 = 16\cos\theta$.

Nos Exercícios 39 e 40, ache todos os pontos de intersecção dos gráficos das duas curvas dadas.

39. $\begin{cases} r = 2(1 + \cos\theta) \\ r^2 = 2\cos\theta \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} r\cos\theta = 1 \\ r = 1 + 2\cos\theta \end{cases}$

41. Ache a área da região limitada por (a) o laço da *limaçon* $r = 4(1 + 2\cos\theta)$ e (b) a parte externa da *limaçon*.
42. Ache a área de uma folha da rosácea $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$.
43. Ache a área da região interior ao gráfico de $r = 2a\operatorname{sen}\theta$ e exterior ao gráfico de $r = a$.
44. Ache a área da região interior ao gráfico da *lemniscata* $r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta$ e exterior ao gráfico da circunferência $r = 1$.
45. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral logarítmica $r = e^{k\theta}$ $(k > 0)$ quando θ varia de 0 a 2π.

46. Ache a área da intersecção das regiões limitadas pelos gráficos das duas equações $r = a\cos\theta$ e $r = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$.

47. Prove que a distância entre os pontos $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ é $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

48. Ache os pontos de intersecção dos gráficos das equações $r = \operatorname{tg}\theta$ e $r = \operatorname{cotg}\theta$.

49. Ache uma equação polar da circunferência com centro em (r_0, θ_0) e raio de a unidades. (*Sugestão*: aplique a lei dos cosenos ao triângulo com vértices na origem, em (r_0, θ_0) e em (r, θ)).

50. Ache a área da região limitada por um laço da curva $r = a \operatorname{sen} n\theta$, onde n é um inteiro positivo.

Nos Exercícios de 51 a 54 é dada a equação de uma cônica com foco na origem. Em cada exercício, (a) ache a excentricidade; (b) identifique a cônica; (c) escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem; (d) faça um esboço da curva.

51. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$ **52.** $r = \dfrac{5}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$

53. $r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\theta}$ **54.** $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

Nos Exercícios de 55 a 58, ache a equação polar da cônica que satisfaz as condições dadas e faça um esboço do gráfico.

55. Um foco na origem; vértices em $(2, \pi)$ e $(4, \pi)$.

56. Um foco na origem; um vértice em $(6, \frac{1}{2}\pi)$; $e = \frac{3}{4}$.

57. Um foco na origem; um vértice em $(3, \frac{3}{2}\pi)$; $e = 1$.

58. A reta $r \operatorname{sen}\theta = 6$ é a diretriz correspondente ao foco na origem e $e = \frac{5}{3}$.

Nos Exercícios 59 e 60, simplifique a equação dada por uma rotação e uma translação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os três conjuntos de eixos.

59. $3x^2 - 3xy - y^2 - 6y = 0$

60. $4x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 12y = 0$

Nos Exercícios 61 e 62, (a) ache a excentricidade, os focos e as diretrizes da cônica central dada. (b) Faça um esboço mostrando a cônica, os focos e as diretrizes.

61. $25x^2 - 9y^2 = 225$ **62.** $4x^2 + y^2 = 64$

63. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta $x = 2a$.

64. Mostre que a hipérbole $x^2 - y^2 = 4$ tem os mesmos focos que a elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

65. Um satélite gira em torno da Terra numa órbita elíptica com excentricidade de $\frac{1}{3}$ e tendo a Terra em um foco. A menor distância do satélite à Terra é de 300 km. Ache a maior distância entre o satélite e a Terra.

66. A órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol é elíptica com o Sol em um foco, um semi-eixo maior com comprimento de 58 milhões de quilômetros e uma excentricidade de 0,206. Ache (a) a menor distância entre Mercúrio e o Sol e (b) a maior distância entre os dois.

67. Um cometa move-se numa órbita parabólica em torno do Sol que está no foco F da parábola. É feita uma observação quando ele está num ponto P_1, a 15 milhões de quilômetros do Sol e uma segunda quando ele está em P_2, a 5 milhões de quilômetros do Sol. Os segmentos de reta FP_1 e FP_2 são perpendiculares. Com essas informações existem duas órbitas possíveis para o cometa. Ache qual a menor distância ao Sol para cada órbita.

68. Um arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com uma abertura horizontal de 60 m e uma altura de 20 m no centro. Qual a altura do arco 10 m à direita ou à esquerda do centro?

69. Ache a equação polar da parábola contendo o ponto $(2, \frac{1}{3}\pi)$, cujo foco está na origem e cujo vértice está na extensão do eixo polar.

70. A distância entre as duas diretrizes de uma elipse é três vezes a distância entre os focos. Ache a excentricidade.

71. Os pontos A e B estão separados por 1.000 m. Pelo som de uma explosão ouvida nesses pontos em instantes diferentes, foi determinado que a localização da explosão é 600 m mais perto de A do que de B. Mostre que a localização da explosão está restrita a uma certa curva e ache uma equação dessa curva.

72. Uma corda focal de uma cônica é dividida em dois segmentos pelo foco. Prove que a soma dos recíprocos das medidas dos comprimentos dos dois segmentos é a mesma, não importando a corda tomada. (*Sugestão*: use coordendas polares.)

73. Uma corda focal é o segmento de reta que passa pelo foco cujas extremidades estão sobre a cônica. Prove que se duas cordas focais de uma parábola são perpendiculares, então a soma dos recíprocos das medidas de seus comprimentos é uma constante. (*Sugestão*: use coordenadas polares.)

74. Ache a área da região limitada pelas duas parábolas $r = 2/(1 - \cos\theta)$ e $r = 2/(1 + \cos\theta)$.

75. Prove que a reta $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico da função f, tal que $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

76. Prove que os pontos médios de todas as cordas paralelas a uma corda fixa de uma parábola estão sobre uma reta paralela ao eixo da parábola.

77. Mostre que $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{a}$ representa uma família monoparamétrica de cônicas e determine o tipo da cônica. Faça esboços das cônicas para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 4$.

78. O gráfico da equação $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ é uma cônica central tendo excentricidade e e um foco em $(p, 0)$. Simplifique a equação por uma translação de eixos. Ache a nova origem em relação aos eixos x e y e determine o tipo da cônica.

Os Exercícios de 79 a 86 referem-se à Secção Suplementar 10.9.

79. Determine os pontos nos quais a curva $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$ tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico com essas retas tangentes.

80. Determine os pontos onde a curva $r = 4 + 3\cos\theta$ tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico mostrando essas retas.

81. Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de $r = \frac{1}{2} + \text{sen}\,\theta$ no ponto $(1, \frac{1}{6}\pi)$. Faça um esboço do gráfico com a reta tangente.

82. Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de $r = 6\cos\theta - 2$ no ponto $(1, \frac{5}{3}\pi)$. Faça um esboço do gráfico com a reta tangente.

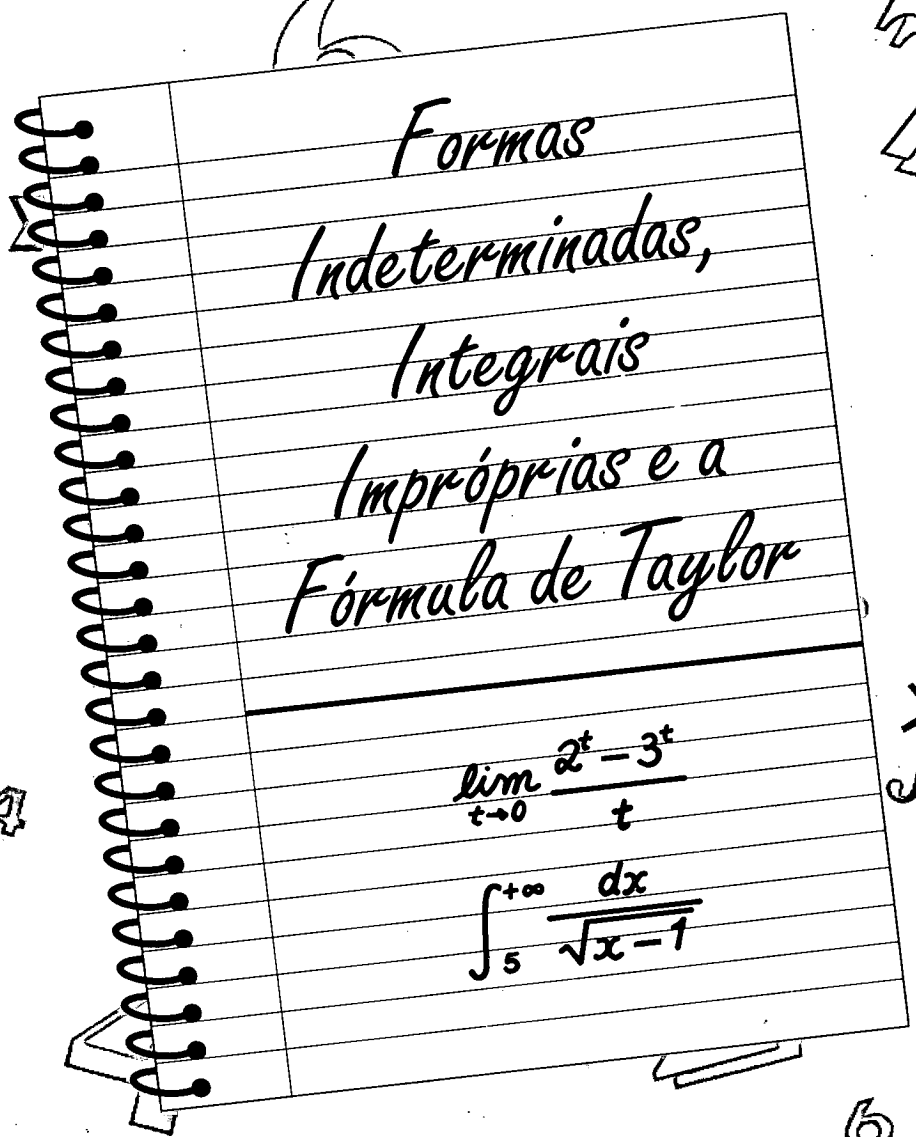
83. Ache a medida em radianos do ângulo entre as retas tangentes em cada ponto de intersecção dos gráficos das equações $r = -6\cos\theta$ e $r = 2(1 - \cos\theta)$.

84. Prove que os gráficos de $r = a\theta$ e $r\theta = a$ têm um número ilimitado de pontos de intersecção. Prove também que as retas tangentes são perpendiculares em somente dois desses pontos de intersecção, que deverão ser determinados.

85. Para a curva $r = 2\sqrt{\cos\frac{1}{2}\theta}$, ache χ e α no ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$. Faça um esboço da curva mostrando χ e α.

86. Para a curva $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$, ache χ e α no ponto $(3, \frac{1}{6}\pi)$. Faça um esboço da curva mostrando χ e α.

ONZE



Métodos para calcular certos limites envolvendo *formas indeterminadas* são tratados nas duas primeiras secções deste capítulo. A técnica usada é chamada *regra de L'Hôpital*, em homenagem ao matemático francês Guillaume François de L'Hôpital (1661-1707), que escreveu o primeiro texto de Cálculo, publicado em 1696.

As Secções 11.3 e 11.4 referem-se a *integrais impróprias*. Aquelas na Secção 11.3 são integrais de intervalos sem limite, ou seja, têm extremos infinitos de integração. Cada uma das integrais impróprias na Secção 11.4 envolve uma função não limitada em um intervalo fechado $[a, b]$; isto é, o integrando tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$.

Na Secção 11.5 discutimos a *fórmula de Taylor*, que dá um procedimento para aproximarmos funções por meio de polinômios.

11.1 A FORMA INDETERMINADA 0/0

O Teorema de Limite 9 (2.2.9) estabelece que se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

desde que $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Existem várias situações nas quais esse teorema não pode ser aplicado. Especificando, o Teorema de Limite 12 (2.4.4) pode ser aplicado se $\lim_{x\to a} g(x)=0$ e $\lim_{x\to a} f(x)=k$, onde k é uma constante diferente de zero. Consideremos o caso quando tanto $\lim_{x\to a} f(x)=0$ como $\lim_{x\to a} g(x)=0$. Alguns limites desse tipo já foram discutidos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos encontrar

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$$

Aqui, $\lim_{x\to 4}(x^2-x-12)=0$ e $\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)=0$. Entretanto, o numerador e o denominador podem ser fatorados, resultando

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x+1}\\&=\tfrac{7}{5}\end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=0$ e $\lim_{x\to 0} x=0$ e pelo Teorema 2.8.2,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

◀

11.1.1 DEFINIÇÃO Se f e g forem duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$, então a função f/g tem a **forma indeterminada 0/0 em a.**

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Da Definição 11.1.1 $(x^2-x-12)/(x^2-3x-4)$ tem uma forma indeterminada 0/0 em 4; contudo, vimos na Ilustração 1 que

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{7}{5}$$

Também, sen x/x tem em 0 a forma indeterminada 0/0, enquanto que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, conforme indicado na Ilustração 2. ◀

Vamos considerar agora um método mais geral para encontrar o limite, se existir, de uma função em um número onde ela tem a forma indeterminada 0/0. O método é conhecido como a *regra de L'Hôpital.*

11.1.2 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I. Suponha que, para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 11.1.2, vamos mostrar como usar o teorema através de exemplos e ilustrações.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos usar a regra de L'Hôpital para calcular os limites nas Ilustrações 1 e 2. Na Ilustração 1, como $\lim_{x \to 4} (x^2 - x - 12) = 0$ e $\lim_{x \to 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital e obter

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{2x - 1}{2x - 3}$$

$$= \tfrac{7}{5}$$

A regra de L'Hôpital pode ser aplicada na Ilustração 2, pois $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$. Então,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

$$= 1$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} (1 - e^x) = 0$, a regra de L'Hôpital pode ser aplicada. Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x}$$

$$= \frac{1}{-1}$$

$$= -1$$

EXEMPLO 2 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$$

Solução

$$\lim_{x\to 1}(1-x+\ln x)=1-1+0 \qquad \lim_{x\to 1}(x^3-3x+2)=1-3+2$$
$$=0 \qquad\qquad =0$$

Logo, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3}$$

Agora, como $\lim_{x\to 1}(-1+1/x)=0$ e $\lim_{x\to 1}(3x^2-3)=0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente, obtendo

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{6x}$$
$$=-\tfrac{1}{6}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}=-\frac{1}{6}$$

Para provar o Teorema 11.1.2 teremos que usar o chamado *teorema do valor médio de Cauchy*, que estende para duas funções o teorema do valor médio (4.3.2) para uma única função. Esse teorema é atribuído ao matemático francês Augustin L. Cauchy (1789-1857).

11.1.3 TEOREMA
Teorema do Valor Médio de Cauchy

Se f e g forem funções tais que

(i) f e g são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) f e g são diferenciáveis no intervalo aberto (a, b);
(iii) para todo x no intervalo aberto (a, b), $g'(x)\neq 0$,

então existirá um número z no intervalo aberto (a, b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Prova Vamos mostrar primeiro que $g(b)\neq g(a)$. Suponha $g(b)=g(a)$. Como g satisfaz as duas condições da hipótese do teorema do valor médio, existe algum número c em (a, b) tal que $g'(c)=[g(b)-g(a)]/(b-a)$. Mas se $g(b)=g(a)$, então existe algum número c em (a, b) tal que $g'(c)=0$. Mas a condição (iii) da hipótese desse teorema estabelece que para todo x em (a, b), $g'(x)\neq 0$. Há, portanto, uma contradição. Logo, a hipótese de que $g(b)=g(a)$ é falsa. Assim $g(b)\neq g(a)$ e, conseqüentemente, $g(b)-g(a)\neq 0$.

Consideremos agora a função h definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)]$$

Então,

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] g'(x) \tag{1}$$

Logo, h é diferenciável em (a, b), pois f e g são diferenciáveis no intervalo, e h é contínua em $[a, b]$, pois f e g são contínuas nesse intervalo.

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(a) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(b) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma, a função h satisfaz as três condições do teorema de Rolle. Logo, existe um número z no intervalo aberto (a, b), tal que $h'(z) = 0$. Assim, de (1),

$$f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(z) = 0$$

Como $g'(z) \neq 0$ em (a, b), da igualdade acima temos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

onde z é algum número em (a, b). Isso prova o teorema. ■

Se g for a função $g(x) = x$, a conclusão do teorema do valor médio de Cauchy é a conclusão do antigo teorema do valor médio, pois $g'(z) = 1$. Assim sendo, o teorema do valor médio é um caso particular do teorema do valor médio de Cauchy.

Uma interpretação geométrica do teorema do valor médio de Cauchy é dada na Secção 14.3. Adiamos a discussão até então, pois vamos precisar de equações paramétricas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Suponha que $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = x^3 - 4x + 2$. Queremos encontrar um número z em (0, 1), previsto pelo Teorema 11.1.3.

$$f'(x) = 6x + 3 \qquad g'(x) = 3x^2 - 4$$

Assim sendo, f e g são contínuas e diferenciáveis em toda parte e para todo x em (0, 1), $g'(x) \neq 0$. Assim, pelo Teorema 11.1.3, existe um z em (0, 1), tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{6z + 3}{3z^2 - 4}$$

Substituindo $f(1) = 5$, $g(1) = -1$, $f(0) = -1$ e $g(0) = 2$ e resolvendo em z, teremos

$$\frac{5-(-1)}{-1-2} = \frac{6z+3}{3z^2-4}$$

$$6z^2 + 6z - 5 = 0$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36+120}}{12}$$

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{12}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{6}$$

Somente um desses números está em (0, 1), a saber, $z = \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{39})$. ◀

Agora estamos em condições de provar o Teorema 11.1.2. Vamos considerar três casos: (i) $x \to a^+$; (ii) $x \to a^-$; (iii) $x \to a$.

Prova do Teorema 11.1.3(i) Como na hipótese não foi suposto que f e g eram definidas em a, consideremos duas novas funções F e G para as quais

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad \text{se } x \neq a \text{ e } F(a) = 0 \\ G(x) &= g(x) \quad \text{se } x \neq a \text{ e } G(a) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Seja b o extremo direito do intervalo aberto I dado na hipótese. Como f e g são ambas diferenciáveis em I, exceto possivelmente em a, concluímos que F e G são ambas diferenciáveis no intervalo $(a, x]$, onde $a < x < b$. Logo, F e G são contínuas em $(a, x]$. As funções F e G são também contínuas à direita de a, pois $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$, que é $F(a)$; analogamente, $\lim_{x \to a^+} G(x) = G(a)$. Logo, F e G são contínuas no intervalo fechado $[a, x]$. Assim, F e G satisfazem as três condições da hipótese do teorema do valor médio de Cauchy (Teorema 11.1.3) no intervalo $[a, x]$. Assim,

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

onde z é algum número tal que $a < z < x$. De (2) e da igualdade acima, temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Como $a < z < x$, segue que quando $x \to a^+$, $z \to a^+$; assim sendo,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$$= \lim_{z \to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Mas, por hipótese, esse limite é L. Logo,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$ ■

A demonstração do caso (ii) é análoga à de (i) e será deixada como exercício (veja o Exercício 34). A demonstração do caso (iii) baseia-se nos resultados dos casos (i) e (ii) e será também deixada como um exercício (veja o Exercício 35).

A regra de L'Hôpital também é válida quando x cresce sem limitação ou decresce sem limitação, conforme será provado no próximo teorema.

11.1.4 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva, e suponha que para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$.

Prova Vamos demonstrar o teorema para $x \to +\infty$. A demonstração quando $x \to -\infty$ será deixada como um exercício (veja o Exercício 38).

Para todo $x > N$, seja $x = 1/t$, então $t = 1/x$. Sejam F e G as funções definidas por $F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$, se $t \neq 0$. Então $f(x) = F(t)$ e $g(x) = G(t)$, onde $x > N$ e $0 < t < 1/N$. Das Definições 2.5.1 e 2.3.1, podemos mostrar que as afirmativas

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} F(t) = M$$

têm o mesmo significado. A prova desse fato será deixada como exercício (veja o Exercício 36). Como, por hipótese, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, podemos concluir que

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} G(t) = 0 \tag{3}$$

Considerando o quociente $F'(t)/G'(t)$, temos, usando a regra da cadeia,

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Como por hipótese $\lim_{x \to +\infty} f'(x)/g'(x) = L$, do que está acima segue que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L \tag{4}$$

Como para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$,

$$G'(t) \neq 0 \text{ para todo } 0 < t < \frac{1}{N}$$

Dessa afirmação, de (3) e de (4) segue, do Teorema 11.1.2 que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L$$

Mas como $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ para todo $x > N$ e $t \neq 0$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

e assim o teorema está provado. ■

Os Teoremas 11.1.2 e 11.1.4 continuam válidos se L for trocado por $+\infty$ ou $-\infty$. As demonstrações serão omitidas.

EXEMPLO 3 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Solução $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(1/x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg}^{-1}(1/x) = 0$. Assim, da regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= 1$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2}{x^2+1}} = 1$$

Portanto, o limite dado é 1.

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0 usando a Definição 2.6.1. (b) Prove que f é diferenciável em 0 calculando $f'(0)$.

Solução

(a) Vamos verificar as três condições para a continuidade.

(i) $f(0) = 1$

(ii) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Para calcular o limite, vamos aplicar a regra de L'Hôpital, pois $\lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$. Temos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1}$$

$$= 1$$

(iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Logo, f é contínua em 0.

(b) $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Como $\lim_{x \to 0} (e^x - 1 - x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital e obtemos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Como $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ e $\lim_{x\to 0} 2x = 0$, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital e obtemos

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS 11.1

Nos Exercícios de 1 a 5, ache todos os valores de z no intervalo (a, b) dado, satisfazendo a conclusão do Teorema 11.1.3 para o par de funções dadas.

1. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$; $(a, b) = (0, 2)$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; $(a, b) = (0, 2)$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; $(a, b) = (0, \pi)$
4. $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$; $(a, b) = (0, \frac{1}{2}\pi)$
5. $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = x + 3$; $(a, b) = (-4, -1)$

Nos Exercícios de 6 a 30, calcule o limite, se ele existir.

6. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{3\cos x}{2x - \pi}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$
10. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{2 - x}$
11. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{e^x}$
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$
13. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$
14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$
15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$
16. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^n - 2^n}{t - 2}$
17. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}^3\theta}$
18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{\operatorname{sen}^2 x}$
19. $\lim_{z\to+\infty} \dfrac{1 - e^{1/z}}{-\frac{3}{z}}$
20. $\lim_{y\to 0} \dfrac{y^2}{1 - \cosh y}$
21. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\ln(2e^t - 1)}$
22. $\lim_{z\to 0} \dfrac{5z}{5^z - e^z}$
23. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t^2}$
24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} 2x}{\operatorname{tgh} x}$
25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}}$
26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 10^x}{x}$
27. $\lim_{x\to\pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$
28. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cosh x}{x^2}$
30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

31. Um circuito elétrico tem uma resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e uma força eletromotriz de E volts, onde R, L e E são positivos. Se i ampères for a corrente passando no circuito t segundos depois que ele foi ligado, então

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Se t, E e L são constantes, ache $\lim_{R\to 0^+} i$.

32. Numa progressão geométrica, se a for o primeiro termo, r for a razão comum a dois termos sucessivos e S for a soma dos n primeiros termos, então se $r \neq 1$,

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ache o $\lim_{r\to 1} S$. O resultado será consistente com a soma dos n primeiros termos se $r = 1$?

33. Ache os valores para a e b tais que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$$

34. Prove o Teorema 11.1.2(ii).
35. Prove o Teorema 11.1.2(iii).
36. Suponha que f seja uma função definida para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva. Se $t = 1/x$ e $F(t) = f(1/t)$, onde $t \neq 0$, prove que as afirmações $\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$ e $\lim_{t\to 0^+} F(t) = M$ têm o mesmo significado.
37. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0, usando a Definição 2.6.1.
(b) Prove que f é diferenciável em 0, calculando $f'(0)$.

38. Prove o Teorema 11.1.4 para $x \to -\infty$.
39. Prove que $x^{10} < e^x$ para x suficientemente grande, calculando $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x}$.
40. Prove que $\ln x < x^p$ para todo $p > 0$ e x suficientemente grande, calculando $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$.

11.2 OUTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Suponha que nosso problema seja determinar se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

existe. Não podemos aplicar o teorema envolvendo o limite de um quociente pois $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$. Nesse caso, dizemos que a função definida por $\ln x/(1/x)$ tem a forma indeterminada $(-\infty)/(+\infty)$ em $x = 0$. A regra de L'Hôpital também se aplica a uma forma indeterminada desse tipo, bem como àquelas dos tipos $(+\infty)/(+\infty)$, $(-\infty)/(-\infty)$ e $(+\infty)/(-\infty)$. Isso tudo é dado pelos próximos teoremas, cujas provas serão omitidas, pois estão fora do contexto deste livro.

11.2.1 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis no intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I, e suponha que para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se todos os limites forem laterais à direita ou laterais à esquerda.

EXEMPLO 1 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital obtendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x)$$

$$= 0$$

11.2.2 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva, e suponha que para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se $x \to +\infty$ for substituído por $x \to -\infty$.

Os Teoremas 11.2.1 e 11.2.2 também são válidos quando L é substituído por $+\infty$ ou $-\infty$, e as demonstrações desses casos também serão omitidas.

EXEMPLO 2 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x}$$

Solução Como $\lim_{x \to +\infty} \ln(2 + e^x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, aplicando a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2 + e^x} \cdot e^x}{3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6 + 3e^x}$$

Agora, como $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} (6 + 3e^x) = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente, obtendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3}$$

EXEMPLO 3 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}$$

Solução $\lim_{x \to \pi/2^-} \sec^2 x = +\infty$ e $\lim_{x \to \pi/2^-} \sec^2 3x = +\infty$. Assim, da regra de L'Hôpital segue que

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6 \sec^2 3x \operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} 2 \sec^2 x \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pi/2^-} 6 \sec^2 3x \operatorname{tg} 3x = +\infty$$

Observe que qualquer nova aplicação da regra de L'Hôpital não irá nos ajudar. Todavia, o quociente original pode ser reescrito:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

Agora, como $\lim_{x \to \pi/2^-} \cos^2 3x = 0$ e $\lim_{x \to \pi/2^-} \cos^2 x = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{-6 \cos 3x \operatorname{sen} 3x}{-2 \cos x \operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3(2 \cos 3x \operatorname{sen} 3x)}{(2 \cos x \operatorname{sen} x)}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3 \operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x}$$

Como $\lim_{x \to \pi/2^-} 3 \operatorname{sen} 6x = 0$ e $\lim_{x \to \pi/2^-} \operatorname{sen} 2x = 0$, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3 \operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{18 \cos 6x}{2 \cos 2x}$$

$$= \frac{18(-1)}{2(-1)}$$

$$= 9$$

Logo,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = 9$$

O limite do Exemplo 3 pode ser calculado sem a regra de L'Hôpital, através do Teorema 2.8.2. Esse cálculo será deixado como exercício (veja o Exercício 38).

Além de $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$, temos ainda as formas indeterminadas $0 \cdot (+\infty)$, $+\infty - (+\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$. Essas formas são definidas da mesma maneira que as outras duas. Por exemplo, se o $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então a função definida por $f(x)^{g(x)}$ tem em a uma forma indeterminada $(+\infty)^0$. Para encontrarmos o limite de uma função tendo uma dessas formas indeterminadas, precisamos transformá-la numa das formas $0/0$ ou $\pm\infty/\pm\infty$, antes de aplicar a regra de L'Hôpital. Os exemplos a seguir ilustram o método.

EXEMPLO 4 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$$

Solução Como $\lim_{x \to 0^+} \text{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{cosec } x = +\infty$, a função definida por $\text{sen}^{-1} x \text{ cosec } x$ tem uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot (+\infty)$ em 0. Para podermos aplicar a regra de L'Hôpital, reescrevemos $\text{sen}^{-1} x \text{ cosec } x$ como $\text{sen}^{-1} x/\text{sen } x$ e consideramos $\lim_{x \to 0^+} (\text{sen}^{-1} x/\text{sen } x)$. Agora $\lim_{x \to 0^+} \text{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{sen } x = 0$; temos assim a forma indeterminada 0/0. Logo, pela regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}^{-1} x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

EXEMPLO 5 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$$

Solução Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty$$

temos a forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$. Reescrevendo a expressão, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x}$$

$\lim_{x \to 0} (\sec x - 1) = 0$ e $\lim_{x \to 0} (x^2 \sec x) = 0$; aplicamos então a regra de L'Hôpital e obtemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x \text{ tg } x}{2x \sec x + x^2 \sec x \text{ tg } x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{2x + x^2 \text{ tg } x}$$

$\lim_{x \to 0} \text{tg } x = 0$ e $\lim_{x \to 0} (2x + x^2 \text{ tg } x) = 0$

Assim, aplicamos novamente a regra obtendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{2x + x^2 \text{ tg } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{2 + 2x \text{ tg } x + x^2 \sec^2 x}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}$$

Para qualquer uma das formas indeterminadas 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$, o procedimento para calcular o limite está no Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 1)^{\operatorname{cotg} x}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, temos a forma indeterminada $1^{+\infty}$. Seja

$$y = (x + 1)^{\operatorname{cotg} x} \tag{1}$$

Então,

$$\ln y = \operatorname{cotg} x \ln(x + 1)$$

$$= \frac{\ln(x + 1)}{\operatorname{tg} x}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\operatorname{tg} x} \tag{2}$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \ln(x + 1) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital ao segundo membro de (2), obtendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x + 1}}{\sec^2 x}$$

$$= 1$$

Logo, substituindo por 1 o segundo membro de (2) teremos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 1 \tag{3}$$

Como a função exponencial é contínua em todo o seu domínio, que é o conjunto de todos os números reais, podemos aplicar o Teorema 2.7.1 e assim

$$\lim_{x \to 0^+} \exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x \to 0^+} \ln y \right)$$

Logo, segue de (3) e dessa igualdade que

$$\lim_{x \to 0^+} y = e^1$$

Mas de (1), $y = (x + 1)^{\operatorname{cotg} x}$ e, portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 1)^{\operatorname{cotg} x} = e$$

EXERCÍCIOS 11.2

Nos Exercícios de 1 a 34, calcule o limite, se existir.

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

2. $\lim_{x \to \pi/2^-} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$

3. $\lim_{x \to 1/2^-} \dfrac{\ln(1 - 2x)}{\operatorname{tg} \pi x}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

5. $\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{cosec} x$

6. $\lim_{x \to 1/2^+} (2x - 1) \operatorname{tg} \pi x$

7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

8. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1} x \operatorname{cotg} x$

9. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x(\ln x)$

10. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$

11. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

12. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{senh} x)^{\operatorname{tg} x}$

13. $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

14. $\lim_{x\to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

15. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2})$

16. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{5}{x^2+x-6} - \frac{1}{x-2}\right)$

17. $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

18. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

19. $\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{2/x}$

20. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

21. $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{1/x}$; $a \neq 0$

22. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{e^{3x}-1}$

23. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

24. $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x^2}$

25. $\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{senh} x)^{2/x}$

26. $\lim_{x\to 2} (x-2) \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi x$

27. $\lim_{x\to 0} [(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4}$

28. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

29. $\lim_{x\to+\infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x]$

30. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x}$

31. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$

32. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$

33. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

34. $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+x})$

35. Se $f(x) = \begin{cases} (1-e^{4x})^x & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$, ache k de forma que f seja contínua em $x = 0$.

36. Se $f(x) = \begin{cases} (x+1)^{(\ln k)/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, ache k de forma que f seja contínua em $x = 0$.

37. Se $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x = 9$, ache n.

38. Calcule o limite no Exemplo 3 sem usar a regra de L'Hôpital, mas usando o Teorema 2.8.2 e as identidades $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \operatorname{sen} t$ e $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

39. (a) Prove que $\lim_{x\to 0} (e^{-1/x^2}/x^n) = 0$ para todo n inteiro positivo. (b) Se $f(x) = e^{-1/x^2}$, use o resultado de (a) para provar que os limites de f, e todas as suas derivadas, são 0 para x tendendo a 0.

40. Suponha que $f(x) = \int_1^x e^{3t}\sqrt{9t^4+1}\,dt$ e $g(x) = x^n e^{3x}$. Se $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right] = 1$, ache n.

Nos Exercícios 41 e 42, faça um esboço do gráfico de f, determinando primeiro os extremos relativos de f e as assíntotas horizontais do gráfico, se existirem.

41. $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$

42. $f(x) = x^x$, $x > 0$

43. Determine cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$; (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^x$. Seria $0^{+\infty}$ uma forma indeterminada?

11.3 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS COM EXTREMOS DE INTEGRAÇÃO INFINITOS

Ao definirmos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, supusemos que a função f deveria ser definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos estender agora a definição de integral definida para poder considerar um intervalo de integração infinito e chamar tal integral de **integral imprópria**. Na Secção 11.4 discutiremos um outro tipo de integral imprópria.

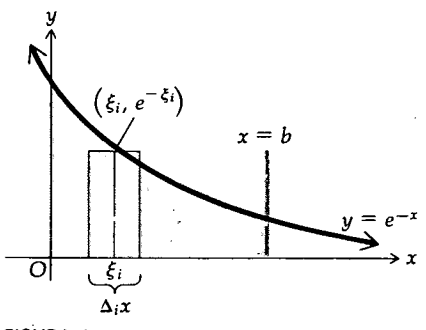


FIGURA 1

► **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos o problema de encontrar a área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = b$; onde $b > 0$. A região está na Figura 1. Se A unidades de área for a área da região,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i}\,\Delta_i x \\ &= \int_0^b e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-x}\Big]_0^b \\ &= 1 - e^{-b} \end{aligned}$$

Se deixarmos b crescer sem limitação, então

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b})$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 \tag{1}$$

De (1) segue que, não importando quão grande seja o valor de b, a área da região mostrada na Figura 1 será sempre menor do que 1 unidade de área. ◀

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left|\int_0^b e^{-x}\,dx - 1\right| < \epsilon$$

Em lugar de (1) escrevemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

Em geral, temos a definição a seguir.

11.3.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo $x \geqslant a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

Se o extremo inferior da integração for infinito, temos a definição a seguir.

11.3.2 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo $x \geqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

Finalmente, temos o caso em que ambos os extremos de integração são infinitos.

11.3.3 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx \tag{2}$$

se esses limites existirem.

No Exercício 40 você deverá provar que se o limite existir, o segundo membro de (2) será independente da escolha de c. Nas aplicações da Definição 11.3.3 costumamos tomar c igual a 0.

Nas três definições anteriores, se os limites existirem, diremos que a integral imprópria é **convergente**. Se os limites não existirem, diremos que a integral imprópria é **divergente**.

EXEMPLO 1 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^2 \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - 0 \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

Solução

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x}\,dx$$

Para calcular a integral, usaremos integração por partes com $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b} + 1) \\ &= -\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1 \quad . \qquad (3)\end{aligned}$$

Para calcular $\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b}$, aplicamos a regra de L'Hôpital pois $\lim_{b\to+\infty} b = +\infty$ e $\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty$. Teremos

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} &= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, de (3),

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$$

EXEMPLO 3 Calcule, se existirem:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (b) $\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx$

Solução

(a) Da Definição 11.3.3, com $c = 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} x\,dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^b \\ &= \lim_{a\to-\infty} (-\tfrac{1}{2}a^2) + \lim_{b\to+\infty} \tfrac{1}{2}b^2\end{aligned}$$

Como nenhum dos dois limites existe, a integral imprópria diverge.

$$\begin{aligned}\text{(b)}\ \lim_{r+\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx &= \lim_{r\to+\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-r}^{r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} (\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}r^2) \\ &= \lim_{r\to+\infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

O Exemplo 3 ilustra por que não usamos o limite em (b) para determinar a convergência de uma integral imprópria quando ambos os extremos de integração são infinitos. Isto é, a integral imprópria em (a) é divergente, mas o limite em (b) existe e é 0.

EXEMPLO 4 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+3} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{(x+3)^2+3} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_0^b \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\lim_{a\to-\infty} \left(-\operatorname{tg}^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

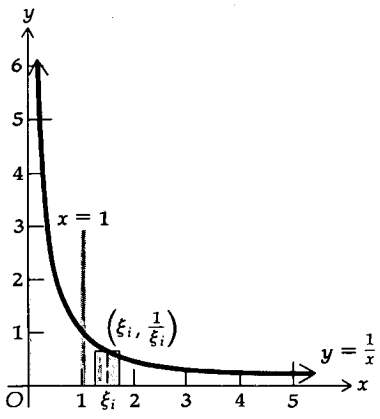


FIGURA 2

EXEMPLO 5 É possível indicar um número para representar a medida da área da região à direita da reta $x = 1$, abaixo do gráfico de $y = 1/x$, e acima do eixo x?

Solução A região está na Figura 2. Seja L o número que queremos atribuir à medida da área, se for possível. Seja A a medida da área da região limitada pelos gráficos das equações $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, onde $b > 1$. Então

$$A = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \Delta_i x$$

$$= \int_1^b \frac{1}{x}\, dx$$

Assim, chamamos de $L = \lim_{b \to +\infty} A$ se esse limite existir. Mas

$$\lim_{b \to +\infty} A = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [\ln b - \ln 1]$$

$$= +\infty$$

Portanto, não é possível atribuir um número à medida da área da região.

EXEMPLO 6 É possível atribuir um número finito à medida do volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo x, da região do Exemplo 5?

Solução O elemento de volume é um disco circular com espessura $\Delta_i x$ e raio da base $1/\xi_i$. Seja L o número que queremos atribuir à medida do volume e seja V a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelos gráficos das equações $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, onde $b > 1$. Então,

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(\frac{1}{\xi_i}\right)^2 \Delta_i x$$

$$= \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

Seja $L = \lim_{b \to +\infty} V$, se o limite existir.

$$\lim_{b \to +\infty} V = \lim_{b \to +\infty} \pi \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \pi \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \pi \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right)$$

Logo, atribuímos o valor π à medida do volume do sólido.

EXEMPLO 7 Determine se $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ é convergente ou divergente.

Solução

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\cos x \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (-\cos b + 1)$$

Para todo inteiro n, enquanto b assume todos os valores de $n\pi$ a $2n\pi$, cos b assume todos os valores desde -1 até 1. Logo, $\lim_{b \to +\infty} \cos b$ não existe. Assim sendo, a integral imprópria é divergente.

O Exemplo 7 ilustra o caso no qual a integral imprópria é divergente, porém o limite não é infinito.

Uma aplicação de integral imprópria com um extremo de integração infinito envolve o cálculo de probabilidades. A probabilidade de um evento particular ocorrer é um número no intervalo fechado [0, 1]. Se houver certeza de que um evento ocorrerá, então a probabilidade será 1; se o evento não ocorrer nunca, então sua probabilidade será 0. Quanto mais certeza tivermos de que um evento irá ocorrer, mais próxima de 1 será sua probabilidade.

Suponha que o conjunto de todos os resultados possíveis de uma determinada situação seja o conjunto de todos os números x num certo intervalo I. Por exemplo, x pode representar quantos minutos alguém espera até vagar um lugar em um determinado restaurante; quantas horas de vida útil tem um tubo de televisor ou a altura de uma pessoa em centímetros. É necessário, algumas vezes, determinar qual a probabilidade de x estar em algum subintervalo de I. Por exemplo, podemos querer determinar qual a probabilidade de que uma pessoa tenha de esperar de 20 a 30 min por uma mesa em um restaurante, ou a probabilidade de que um tubo de televisor dure mais de 2.000 h, ou ainda, a probabilidade de que alguém escolhido ao acaso tenha entre 1,60 e 1,80 cm de altura. Tais problemas envolvem o cálculo da integral de uma função chamada de *função densidade de probabilidade*. As funções densidade de probabilidade são obtidas de experiências estatísticas. Vamos apresentar uma breve discussão informal dessas funções aqui, para mostrar como aparecem as integrais impróprias.

Uma **função densidade de probabilidade** é uma função f cujo domínio é o conjunto R de números reais e que satisfazem as duas condições seguintes:

1. $f(x) \geqslant 0$ para todo x em R
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Vamos considerar aqui a *função densidade exponencial* definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

onde $k > 0$. Para verificar se essa função qualifica-se como uma função densidade de probabilidade, vejamos se ela satisfaz as duas propriedades acima referidas.

1. Se $x < 0$, $f(x) = 0$; se $x \geqslant 0$, $f(x) = ke^{-kx}$, e como $k > 0$, $ke^{-kx} > 0$.

2. $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-kx}\,dx \\ &= 0 + \lim_{b\to+\infty}\left[-\int_{0}^{b} e^{-kx}(-k\,dx)\right] \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-kx}\right]_{0}^{b} \\ &= \lim_{b\to+\infty}(-e^{-kb}+1) \\ &= 1\end{aligned}$$

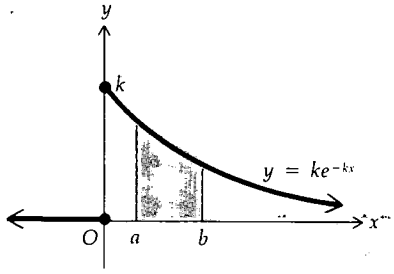


FIGURA 3

Se f for uma função densidade de probabilidade de ocorrência de determinado evento, então a **probabilidade de que o evento irá ocorrer no intervalo fechado [a, b]** será denotada por $P([a, b])$ e

$$P([a, b]) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

A Figura 3 mostra um esboço do gráfico da função densidade exponencial. Como $\int_{0}^{+\infty} ke^{-kx}\,dx = 1$, a medida da área da região limitada por $y = ke^{-kx}$, pelo eixo x e pelo eixo y é 1. A medida da área da região sombreada na figura é $P([a, b])$.

EXEMPLO 8 Para determinado tipo de bateria elétrica, a função densidade de probabilidade de que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida ao acaso é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}e^{-x/60} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Ache a probabilidade de que uma bateria escolhida ao acaso tenha um tempo de vida (a) entre 15 e 25 h e (b) pelo menos 50 h.

Solução A função definida por (5) é da forma de (4) com $k = \frac{1}{60}$. (a) A probabilidade de que o tempo de vida de uma bateria escolhida ao acaso esteja entre 15 e 25 h é $P([15, 25])$, e (b) a probabilidade de que o tempo de vida seja pelo menos 50 h é $P([50, +\infty])$.

(a) $$\begin{aligned}P([15, 25]) &= \int_{15}^{25} \tfrac{1}{60}e^{-x/60}\,dx \\ &= -\int_{15}^{25} e^{-x/60}(-\tfrac{1}{60}dx) \\ &= -e^{-x/60}\Big]_{15}^{25} \\ &= -e^{-25/60} + e^{-15/60} \\ &= -e^{-0,417} + e^{-0,250} \\ &= -0,659 + 0,779 \\ &= 0,120\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ P([50, +\infty)) &= \lim_{b\to+\infty} \int_{50}^{b} \tfrac{1}{60} e^{-x/60}\, dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x/60}\right]_{50}^{b} \\ &= \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b/60} + e^{-50/60}) \\ &= 0 + e^{-0,833} \\ &= 0,435\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 11.3

Nos Exercícios de 1 a 18, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$
2. $\int_{-\infty}^{1} e^{x}\, dx$
3. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\, dx$
4. $\int_1^{+\infty} 2^{-x}\, dx$
5. $\int_0^{+\infty} x2^{-x}\, dx$
6. $\int_5^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cosh x\, dx$
8. $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x}\, dx$
9. $\int_5^{+\infty} \dfrac{x\, dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{3x\, dx}{(3x^2+2)^3}$
11. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \dfrac{3\, dx}{x^2+9}$
12. $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln x}$
13. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$
14. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$
15. $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{16+x^2}$
17. $\int_1^{+\infty} \ln x\, dx$
18. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx$
19. Calcule, se existir:

    (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ (b) $\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{sen} x\, dx$
20. Prove que se $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ for convergente, então $\int_{-b}^{+\infty} f(-x)dx$ também será convergente e terá o mesmo valor.
21. Mostre que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}\, dx$ é convergente e a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1}\, dx$ é divergente.
22. Prove que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^n}$ será convergente se e somente se $n > 1$.
23. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/(e^x + e^{-x})$ e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.
24. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/(x^2 - 1)$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Caso seja possível, determine-o.
25. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região à direita da reta $x = 1$ e limitada pela curva cuja equação é $y = 1/x^{3/2}$ e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.
26. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo eixo x, pelo eixo y e pela curva cuja equação é $y = e^{-2x}$. Caso seja possível, determine-o.
27. Para a bateria do Exemplo 8, ache a probabilidade de que uma bateria escolhida ao acaso tenha um tempo de vida de (a) não mais do que 50 h e (b) pelo menos 75 h.
28. Para um certo tipo de lâmpada, a função densidade de probabilidade de que x horas seja o tempo de vida útil de seu bulbo, escolhido ao acaso, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-x/40} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

    Ache a probabilidade de que o tempo de vida útil de um bulbo escolhido ao acaso: (a) esteja entre 40 e 60 h, e (b) seja de pelo menos 60 h.
29. Em uma certa cidade, a função densidade de probabilidade de que x min seja a duração de uma chamada telefônica escolhida ao acaso, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-x/3} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

    Ache a probabilidade de que uma chamada telefônica escolhida ao acaso dure: (a) entre 1 min e 2 min e (b) pelo menos 5 min.
30. Para um determinado aparelho, a função densidade de probabilidade de que ele irá precisar de manutenção x meses após sua compra é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{-0,02x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

    Se o aparelho tiver um ano de garantia, qual será a probabilidade de que um comprador escolhido ao acaso não precise consertar seu aparelho durante o prazo de garantia?

31. Se f for uma função densidade de probabilidade, então a *média* (ou *valor médio*) das probabilidades será dada por $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$. Ache a média das probabilidades obtidas da função de densidade exponencial (4).
32. Uma função densidade de probabilidade *uniforme* é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \dfrac{1}{d-c} & \text{se } c \leqslant x \leqslant d \\ 0 & \text{se } d < x \end{cases}$$

Mostre que essa função satisfaz as condições necessárias para que possamos classificá-la como uma função densidade de probabilidade.

Os Exercícios de 33 a 36 mostram aplicações de integrais impróprias no campo da Economia. Suponha que exista um fluxo contínuo de rendimento para o qual os juros sejam compostos continuamente a uma taxa anual 100i% e seja f(t) o rendimento em t anos. Se o rendimento continuar indefinidamente, o valor atual V, de toda a renda futura, será definido por

$$V = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it}\,dt$$

33. Um fluxo contínuo de renda decresce com o tempo e em t anos o rendimento é $1.000 \cdot 2^{-t}$. Ache o valor atual dessa renda, se for usada permanentemente, uma taxa anual de juros de 8%, compostos continuamente.
34. Suponha que o dono de um imóvel comercial receba um aluguel permanente pela propriedade, pago indefinidamente. Se o aluguel anual for de $ 12.000 e o dinheiro render 10% ao ano, compostos continuamente, ache o valor atual de todos os pagamentos futuros.
35. O bônus do Governo Britânico é uma apólice que rende ao portador apenas um pagamento anual. Sendo R o valor atual de um fluxo de pagamentos anuais e usando a taxa de juros correntes anuais de $100i\%$, compostos continuamente, mostre que um preço satisfatório para a venda de um desses bônus é R/i.
36. O fluxo contínuo de lucros de uma empresa é crescente no tempo e em t anos o montante do lucro é proporcional a t. Mostre que o valor atual da empresa é inversamente proporcional a i^2, onde $100i\%$ é a taxa de juros compostos continuamente.
37. Determine os valores de n para os quais a seguinte integral imprópria é convergente: $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^n}$.
38. Determine um valor de n para o qual a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \left(\dfrac{n}{x+1} - \dfrac{3x}{2x^2+n}\right)dx$ é convergente e calcule a integral para esse valor de n.
39. Determine um valor de n para o qual a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \left(\dfrac{nx^2}{x^3+1} - \dfrac{1}{3x+1}\right)dx$ é convergente e calcule a integral para esse valor de n.
40. Suponha que f seja contínua para todos os valores de x. Prove que se

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx = L \quad \text{e} \quad \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx = M$$

então, sendo d um número real qualquer,

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^d f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_d^b f(x)\,dx = L + M$$

Sugestão: $\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$
$\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

11.4 OUTRAS INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

A Figura 1 mostra a região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/\sqrt{x}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$. Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \Delta_i x$$

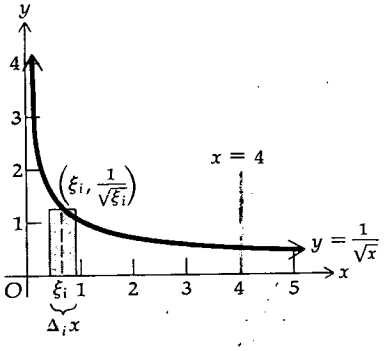


FIGURA 1

Se esse limite existir, ele será a integral definida denotada por

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso, $\lim_{x\to 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$, assim dizemos que o integrando tem uma descontinuidade infinita no extremo inferior. Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada através da definição dada a seguir.

11.4.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo x no intervalo semi-aberto à esquerda $(a, b]$, e se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos determinar se é possível representar por um número a medida da área da região mostrada na Figura 1. Da discussão que precedeu a Definição 11.4.1, a medida da área da região dada será uma integral imprópria (1), se ela existir. Pela Definição 11.4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_t^4 \\ &= \lim_{t \to 0^+} (4 - 2\sqrt{t}) \\ &= 4 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

Logo, 4 será a medida da área da região dada. ◀

Se o integrando tiver uma descontinuidade infinita no extremo superior da integração, usaremos a seguinte definição para determinar a existência da integral imprópria.

11.4.2 DEFINIÇÃO Se f for contínua em todos os x no intervalo semi-aberto à direita $[a, b)$ e se $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

Se existir uma descontinuidade infinita num ponto interior ao intervalo de integração, a existência da integral imprópria será determinada a partir da definição a seguir.

11.4.3 DEFINIÇÃO Se f for contínua em todos os valores de x no intervalo $[a, b]$ exceto c, onde $a < c < b$ e se $\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

se esses limites existirem.

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ for uma integral imprópria, ela será convergente se o limite correspondente existir; caso contrário ela será divergente.

EXEMPLO 1 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Solução O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1. Aplicando a Definição 11.4.3, temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_s^2 \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1\right] + \lim_{s\to 1^+} \left[-1 + \frac{1}{s-1}\right]\end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Suponha que, ao calcular a integral do Exemplo 1, passou despercebida a descontinuidade infinita do integrando em 1. Teríamos obtido

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x-1}\Big]_0^2 &= -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} \\ &= -2\end{aligned}$$

Esse resultado é, obviamente, incorreto. Como $1/(x-1)^2$ nunca é negativo, a integral de 0 a 2 não poderia ser um número negativo. ◀

EXEMPLO 2 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_0^1 x \ln x \, dx$$

Solução O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Da Definição 11.4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln x \, dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2\right]_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[\tfrac{1}{2}\ln 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}t^2 \ln t + \tfrac{1}{4}t^2\right]\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = 0 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t + 0 \qquad (2)$$

Para calcular

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\dfrac{1}{t^2}}$$

aplicamos a regra de L'Hôpital, pois $\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ e $\lim_{t\to 0^+} 1/t^2 = +\infty$. Temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{t^2}{2}\right]$$

$$= 0$$

Logo, de (2)

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\tfrac{1}{4}$$

EXEMPLO 3 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Solução Nessa integral, temos tanto um extremo superior infinito quanto uma descontinuidade infinita do integrando no extremo inferior. Procedemos da seguinte maneira:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left[\sec^{-1} x\right]_t^2 + \lim_{b\to+\infty} \left[\sec^{-1} x\right]_2^b$$

$$= \lim_{t\to 1^+} (\sec^{-1} 2 - \sec^{-1} t) + \lim_{b\to+\infty} (\sec^{-1} b - \sec^{-1} 2)$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi - \lim_{t\to 1^+} \sec^{-1} t + \lim_{b\to+\infty} \sec^{-1} b - \tfrac{1}{3}\pi$$

$$= -0 + \tfrac{1}{2}\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

A integral do Exemplo 3 é chamada de *integral imprópria de tipo misto.*

EXERCÍCIOS 11.4

Nos Exercícios de 1 a 25, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
2. $\int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$
3. $\int_{-5}^{-3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$
4. $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$
5. $\int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$
6. $\int_{-4}^1 \frac{dz}{(z+3)^3}$
7. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec\theta\, d\theta$
8. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$
10. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\, d\theta$
11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1-\operatorname{sen} y}$
12. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$
13. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$
14. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
15. $\int_0^{+\infty} \ln x\, dx$
16. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
17. $\int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$
18. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$
19. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3}$
20. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
21. $\int_{1/2}^2 \frac{dz}{z(\ln z)^{1/5}}$

22. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{1-x}$ 23. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 24. $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

25. $\int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}}$

26. Calcule, se existir: (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; (b) $\lim_{r\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x}+\int_{r}^{1}\frac{dx}{x}\right]$.

Nos Exercícios de 27 a 29, ache os valores de n para os quais a integral imprópria converge e para esses valores calcule a integral.

27. $\int_0^1 x^n\,dx$ 28. $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$ 29. $\int_0^1 x^n \ln^2 x\,dx$

30. Mostre que é possível representar por um número a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/\sqrt{x}$, pela reta $x = 1$ e pelos eixos x e y; mas que não é possível representar por um número finito o volume do sólido obtido pela rotação da região em torno do eixo x.

31. Determine se é possível representar por um número a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva cuja equação é $y = x^{-1/3}$, pela reta $x = 8$ e pelos eixos x e y.

32. Dada a integral imprópria $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ onde $b > a$, determine se a integral é convergente ou divergente em cada um dos casos: (a) $0 < n < 1$; (b) $n = 1$; (c) $n > 1$. Se a integral for convergente, calcule-a.

33. Use integração para provar que a circunferência do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ é $2\pi a$.

11.5 A FÓRMULA DE TAYLOR

Os valores de uma função polinomial podem ser encontrados através de um número finito de adições e multiplicações. Por outro lado, existem outras funções, tais como a logarítmica, a exponencial e as funções trigonométricas, que não podem ser calculadas tão facilmente. Vamos mostrar nesta secção que muitas funções podem ser aproximadas por polinômios e que os polinômios, em vez da função original, podem ser usados para cálculos, quando a diferença entre o valor da função em um ponto e o da aproximação polinomial for suficientemente pequena.

Existem vários métodos para aproximar uma função dada por polinômios. Um dos mais usados é o que envolve a **fórmula de Taylor**, assim chamada em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731). O teorema a seguir, que pode ser considerado como uma generalização do teorema do valor médio (4.3.2), estabelece a fórmula de Taylor.

11.5.1 TEOREMA Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b). Então, existe um número ξ no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (1)$$

A fórmula (1) também é válida se $b < a$; neste caso, $[a, b]$ é substituído por $[b, a]$ e (a, b) por (b, a).

Note que se $n = 0$, (1) torna-se

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

onde ξ está entre a e b. Esse resultado é o teorema do valor médio.

Adiaremos a prova do Teorema 11.5.1, que será dada ainda nesta secção.

Se em (1) b for substituído por x, obteremos a fórmula de Taylor. Ela é

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2)$$

onde ξ está entre a e x.

A condição sob a qual (2) é válida é que f e suas n primeiras derivadas devem ser contínuas num intervalo fechado contendo a e x, e a $(n+1)$-ésima derivada de f deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente. A fórmula (2) pode ser escrita

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (3)$$

onde

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4)$$

e

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{onde } \xi \text{ está entre } a \text{ e } x \quad (5)$$

$P_n(x)$ é chamado **polinômio de Taylor** de enésimo grau da função f no número a e $R_n(x)$ é chamado de *resto*. O termo $R_n(x)$, conforme dado em (5), é chamado de resto *na forma de Lagrange*, em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange (1736-1813).

O caso especial da fórmula de Taylor, obtida tomando $a = 0$ em (2) é

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

onde ξ está entre 0 e x. Essa fórmula é chamada de **fórmula de Maclaurin** em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746). Entretanto, a fórmula foi obtida antes por Taylor e por outro matemático britânico, James Stirling (1692-1770). O **polinômio de Maclaurin** de enésimo grau para uma função f, obtida de (4) com $a = 0$, é

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6)$$

Podemos aproximar uma função através de um polinômio de Taylor em um número a ou por um polinômio de Maclaurin.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos calcular o polinômio de Maclaurin do enésimo grau para a função exponencial natural. Se $f(x) = e^x$, todas as derivadas de f em x são e^x e as derivadas em 0 são iguais a 1. Logo, de (6)

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad (7)$$

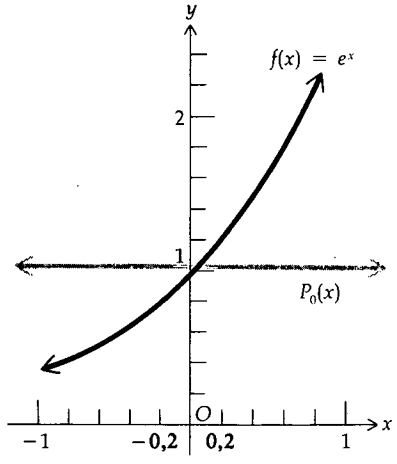


FIGURA 1

Assim, os quatro primeiros polinômios de Maclaurin da função exponencial natural são

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$

Nas Figuras de 1 a 4 o gráfico de $f(x) = e^x$ aparece junto com os gráficos de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$, respectivamente. Na Figura 5 os gráficos dos quatro polinômios de Maclaurin e o gráfico de $f(x) = e^x$ estão no mesmo sistema de coordenadas. Observe como os polinômios aproximam e^x para valores de x próximos de zero e note que à medida que n cresce, a aproximação melhora. As Tabelas 1 e 2 dão valores de e^x, $P_n(x)$ (quando n é 0, 1, 2 e 3) e $e^x - P_n(x)$ para $x = 0{,}4$ e $x = 0{,}2$, respectivamente. A partir desses dois valores de x podemos imaginar que quanto mais próximos de zero estiverem os valores de x, melhor será a aproximação para um dado $P_n(x)$. ◀

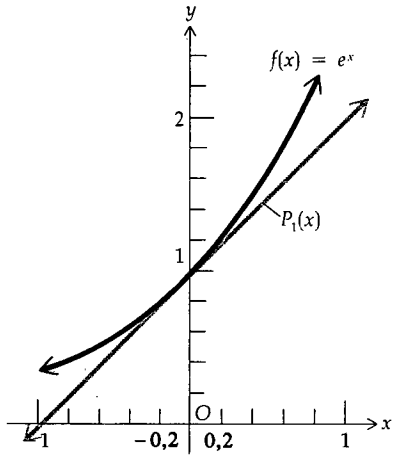


FIGURA 2

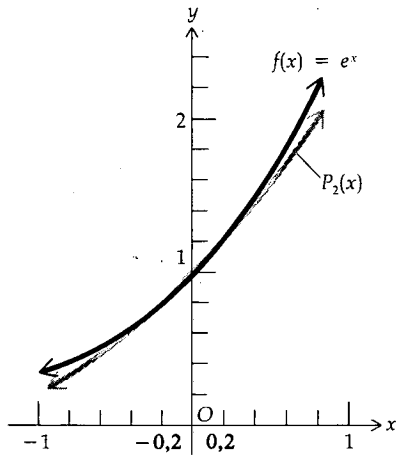


FIGURA 3

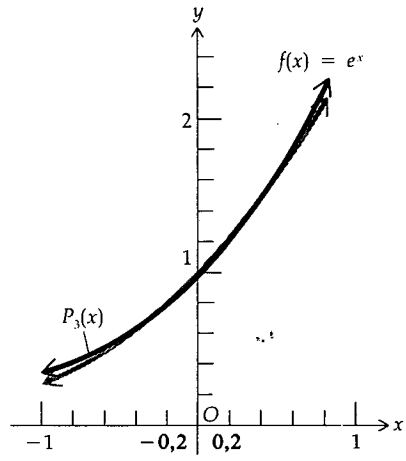


FIGURA 4

Tabela 1

n	$e^{0,4}$	$P_n(0,4)$	$e^{0,4} - P_n(0,4)$
0	1,4918	1	0,4918
1	1,4918	1,4	0,0918
2	1,4918	1,48	0,0118
3	1,4918	1,4907	0,0011

Tabela 2

n	$e^{0,2}$	$P_n(0,2)$	$e^{0,2} - P_n(0,2)$
0	1,2214	1	0,2214
1	1,2214	1,2	0,0214
2	1,2214	1,22	0,0014
3	1,2214	1,2213	0,0001

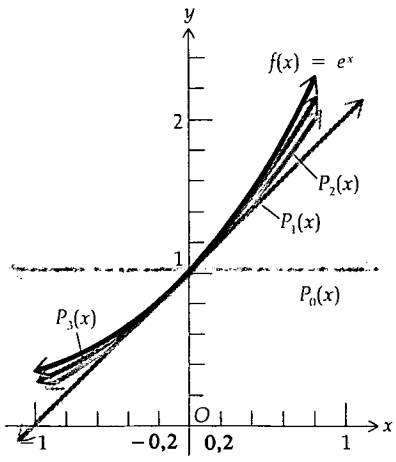


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos determinar agora o polinômio de Maclaurin de enésimo grau para a função seno. Se $f(x) = \text{sen } x$, então

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen } x \qquad f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(iv)}(x) = \text{sen } x \qquad f^{(v)}(x) = \cos x \qquad f^{(vi)}(x) = -\text{sen } x$$

e assim por diante. Assim $f(0) = 0$,

$$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(iv)}(0) = 0 \qquad f^{(v)}(0) = 1$$

e assim por diante. De (6),

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Então $P_0(x) = 0$,

$$P_1(x) = x \qquad P_2(x) = x$$
$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5.040} \qquad P_8(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5.040}$$

e assim por diante.

A Figura 6 mostra o gráfico da função seno, bem como os gráficos de seus polinômios de Maclaurin de graus 1, 3, 5 e 7. Note que as aproximações polinomiais são melhores à medida que n cresce. ◀

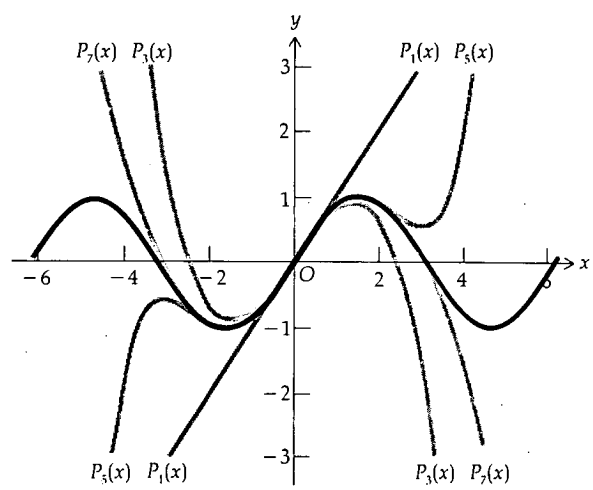


FIGURA 6

EXEMPLO 1 Ache o polinômio de Taylor de terceiro grau da função co-seno em $\frac{\pi}{4}$ e o resto na forma de Lagrange.

Solução Seja $f(x) = \cos x$. Então de (4),

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\frac{1}{4}\pi)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{1}{4}\pi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

Como $f(x) = \cos x$, $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f''(x) = -\cos x$, $f''(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f'''(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Logo,

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{12}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3$$

Como $f^{(iv)}(x) = \cos x$, de (5) obtemos

$$R_3(x) = \tfrac{1}{24}(\cos \xi)(x - \tfrac{1}{4}\pi)^4 \qquad \text{onde } \xi \text{ está entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ e } x$$

Como $|\cos \xi| \leqslant 1$, podemos concluir que para todo x, $|R_3(x)| \leqslant \frac{1}{24}(x - \frac{1}{4}\pi)^4$.

De (3),

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \tag{8}$$

Se $P_n(x)$ for usado para aproximar $f(x)$, diremos que temos uma limitação superior para o erro dessa aproximação, se pudermos achar um número $E > 0$ tal que $|R_n(x)| \leqslant E$ ou, de (8), tal que $|f(x) - P_n(x)| \leqslant E$ ou, analogamente,

$$P_n(x) - E \leqslant f(x) \leqslant P_n(x) + E$$

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1 para calcular um valor aproximado de cos 47° e determine a precisão do resultado.

Solução $47° \sim \frac{47}{180}\pi$ rad. Assim, na solução do Exemplo 1, seja $x = \frac{47}{180}\pi$ e $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{90}\pi$ e

$$\cos 47° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}[1 - \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3] + R_3(\tfrac{47}{180}\pi)$$

onde

$$R_3(\tfrac{47}{180}\pi) = \tfrac{1}{24}\cos \xi(\tfrac{1}{90}\pi)^4 \quad \text{com} \quad \tfrac{1}{4}\pi < \xi < \tfrac{47}{180}\pi$$

Como $0 < \cos \xi < 1$,

$$0 < R_3(\tfrac{47}{180}\pi) < \tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{90}\pi)^4 < 0{,}00000007$$

Sendo $\frac{1}{90}\pi \approx 0{,}0349066$, obtemos

$$\cos 47° \approx 0{,}681998$$

que é exato até a sexta casa decimal.

EXEMPLO 3 Use um polinômio de Maclaurin para encontrar um valor de $\sqrt{e}$, exato até a quarta casa decimal.

Solução Se $f(x) = e^x$, então de (7), o polinômio de Maclaurin do enésimo grau de $f(x)$ será

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

e de (5),

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad \text{onde } \xi \text{ está entre 0 e } x$$

Queremos $|R_n(\frac{1}{2})|$ menor do que 0,00005. Na fórmula acima, seja $x = \frac{1}{2}$, e como $e^{1/2} < 2$, temos

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

$|R_n(\frac{1}{2})|$ será menor do que 0,00005 se $1/2^n(n+1)! < 0{,}00005$. Quando $n = 5$,

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} = \frac{1}{(32)(720)}$$
$$= 0{,}00004$$

Como $0{,}00004 < 0{,}00005$, tomamos $P_5(\frac{1}{2})$ como a aproximação de $\sqrt{e}$ exata até a quarta casa decimal. Como

$$P_5(\tfrac{1}{2}) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{384} + \tfrac{1}{3840}$$

obtemos $\sqrt{e} \approx 1{,}6487$.

Agora provaremos o Teorema 11.5.1. Há várias provas conhecidas desse teorema, embora nenhuma delas seja bem argumentada. A demonstração a seguir faz uso do teorema do valor médio de Cauchy (11.1.3).

Prova do Teorema 11.5.1 Sejam F e G duas funções definidas por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \quad (9)$$

e

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (10)$$

Segue que $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Derivando (9), obtemos

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!}$$
$$- \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!} - \frac{f^{(iv)}(x)(b-x)^3}{3!} + \ldots$$
$$+ \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$$

Combinando os termos, vemos que a soma dos termos de ordem ímpar com os termos seguintes de ordem par é zero; assim sendo, resta somente o último termo. Logo

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \quad (11)$$

Derivando (10), obtemos

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b - x)^n \tag{12}$$

Testando as hipóteses do Teorema 11.1.3, vemos que

(i) F e G são contínuas em $[a, b]$;
(ii) F e G são deriváveis em (a, b);
(iii) para todo x em (a, b), $G'(x) \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 11.1.3,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

onde ξ está em (a, b). Mas $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Então,

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} G(a) \tag{13}$$

para algum ξ em (a, b).

Fazendo $x = a$ em (10), $x = \xi$ em (11) e $x = \xi$ em (12) e, substituindo em (13), obtemos

$$F(a) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b - \xi)^n \left[-\frac{n!}{(b - \xi)^n} \right] \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1} \tag{14}$$

Se $x = a$ em (9), obtemos

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n$$

Substituindo (14) na relação acima, teremos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

que é o resultado desejado. O teorema é válido se $b < a$, pois a conclusão do Teorema 11.1.3 não depende da posição relativa de a e b. ■

Existem outras formas de apresentar o resto da fórmula de Taylor. Dependendo da função, uma forma pode ser preferível a outra. O teorema a seguir apresenta o resto como uma integral e é conhecido como *forma integral do resto da fórmula de Taylor*.

11.5.2 TEOREMA Se f for uma função cujas $n + 1$ primeiras derivadas são contínuas em um intervalo fechado contendo a e x, então $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a e $R_n(x)$ é o resto dado por

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 30).

EXERCÍCIOS 11.5

Nos Exercícios de 1 a 14, ache o polinômio de Taylor do enésimo grau com resto de Lagrange no número a para a função definida pela equação dada.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $a = 1$; $n = 3$
2. $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$; $n = 4$
3. $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0$; $n = 3$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; $n = 3$
6. $f(x) = \cosh x$; $a = 0$; $n = 4$
7. $f(x) = \operatorname{senh} x$; $a = 0$; $n = 4$
8. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; $n = 4$
9. $f(x) = \ln x$; $a = 1$; $n = 3$
10. $f(x) = \ln(x + 2)$; $a = -1$; $n = 3$
11. $f(x) = \ln \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; $n = 3$
12. $f(x) = e^{-x^2}$; $a = 0$; $n = 3$
13. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$; $a = 0$; $n = 3$
14. $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$; $a = 0$; $n = 3$

15. Calcule o valor de e exato até a quinta casa decimal e prove que sua resposta tem a precisão pedida.
16. Use o polinômio de Taylor do Exercício 8 para calcular $\sqrt{5}$ com precisão até a casa decimal que justifique desprezar R_4.
17. Estime o erro que se comete quando $\cos x$ é substituído por $1 - \frac{1}{2}x^2$ se $|x| < 0{,}1$.
18. Estime o erro que se comete quando $\sqrt{1 + x}$ é substituído por $1 + \frac{1}{2}x$ se $0 < x < 0{,}01$.
19. Calcule sen 31° com precisão de três casas decimais, usando o polinômio de Taylor do Exercício 5 em $\frac{\pi}{6}$. (Use a aproximação $\frac{1}{180}\pi \approx 0{,}0175$.)
20. Use o polinômio de Maclaurin para a função definida por $f(x) = \ln(1 + x)$, para calcular o valor de ln 1,2 com quatro casas decimais de precisão.
21. Use o polinômio de Maclaurin para a função definida por

$$f(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

para calcular o valor de ln 1,2 com precisão até a quarta casa decimal. Compare o resultado com o do Exercício 20.

22. Mostre que se $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$$

onde $|R(x)| < \frac{1}{3.840}$.

23. Use o resultado do Exercício 22 para encontrar um valor aproximado de $\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} x^2\, dx$ e estime o erro.
24. Mostre que a fórmula $(1 + x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x$ é precisa até a terceira casa decimal se $-0{,}03 \leqslant x \leqslant 0$.
25. Mostre que a fórmula $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ é precisa até a segunda casa decimal se $-0{,}1 \leqslant x \leqslant 0$.
26. Faça esboços dos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = mx$ no mesmo conjunto de eixos. Note que se m for positivo e próximo de zero, então os gráficos interceptam-se num ponto cuja abscissa é próxima de π. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - mx$. Usando o polinômio de Taylor do segundo grau de f em π mostre que uma solução aproximada da equação $\operatorname{sen} x = mx$, quando m é positivo e próximo de zero, é dada por $x \approx \pi/(1 + m)$.
27. Use o método descrito no Exercício 26 para encontrar uma solução aproximada da equação $\operatorname{cotg} x = mx$ quando m é positivo e próximo de zero.
28. (a) Use o polinômio de Maclaurin do primeiro grau para aproximar e^k se $0 < k < 0{,}01$. (b) Estime o erro em termos de k.
29. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^3 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x - 1)$.
30. Prove o Teorema 11.5.2.

(*Sugestão*: seja $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$. Resolva em $f(x)$ e integre $\int_a^x f'(t)dt$ por partes fazendo $u = f'(t)$ e $dv = dt$. Repita esse processo e o resultado desejado segue por indução matemática.)

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

Nos Exercícios de 1 a 18, calcule o limite, se existir.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{tgh} 2x}{\operatorname{senh}^2 x}$
2. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{2}{\cos^2 x} \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec}^2 x - x^{-2})$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e - (1 + x)^{1/x}}{x}$
5. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{2t}/t)}{t^{1/2}}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{tg} x}$
8. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^{100}}{e^t}$
9. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2y}{y - \operatorname{sen} 5y}$
10. $\lim\limits_{z \to \pi/2^-} \dfrac{z \cos 3z}{\cos^2 z}$
11. $\lim\limits_{t \to 0^-} (1 + 4t)^{3/t}$
12. $\lim\limits_{y \to +\infty} (1 + e^{2y})^{-2/y}$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln(x - \ln x)}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{4x^3}$
15. $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} \theta + 3}{\sec \theta - 1}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/x}$
17. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x}$
18. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$

Nos Exercícios de 19 a 32, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

19. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{2x+3}$

20. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

21. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-2)^2}$

22. $\int_{2}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

23. $\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{cotg}^2 \theta\, d\theta$

24. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t^2}$

25. $\int_{-\infty}^{3} 4^x\,dx$

26. $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

27. $\int_{0}^{1} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

28. $\int_{0}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

30. $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx$

31. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+x^3}$

32. $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

33. Dada

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{2x}}{2x} & \text{se } x \neq 0\\ -1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0, usando a Definição 2.6.1.
(b) Prove que f é diferenciável em 0 calculando $f'(0)$.

34. Dada a função f do Exercício 33, ache, se existir: (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

35. Dada

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}} & \text{se } x \neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) f é contínua em 0? (b) Ache $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, se existir.

36. Se a reta normal à curva $y = \ln x$ no ponto $(x_1, \ln x_1)$ intercepta o eixo x no ponto cuja abscissa é a, prove que $\lim_{x_1\to+\infty} (a - x_1) = 0$.

37. Calcule, se existirem:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{senh} x\,dx$ (b) $\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{senh} x\,dx$

38. (a) Prove que $\lim_{x\to+\infty} (x^n/e^x) = 0$ para todo n inteiro positivo. (b) Ache $\lim_{x\to 0} (e^{-1/x}/x^n)$, onde $x > 0$ e n é qualquer inteiro positivo, fazendo $x = 1/t$ e usando o resultado da parte (a).

Nos Exercícios de 39 a 41, ache o polinômio de Taylor de grau n com resto de Lagrange em um número a para a função definida pela equação dada.

39. $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 6$

40. $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$; $a = 1$; $n = 3$

41. $f(x) = x^{-1/2}$; $a = 9$; $n = 4$

42. Expresse e^{x^2} e $\cos x$ como polinômios de Maclaurin de grau 4 e use-os para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^4}$$

43. Calcule o limite do Exercício 42 usando a regra de L'Hôpital.

44. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$$

como um polinômio em potências de $x + 2$.

45. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região à direita do eixo y, limitada pela curva $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e sua assíntota. Sendo possível, calcule-o.

46. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $2xy - y = 1$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$. Sendo possível, calcule-o.

47. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região no primeiro quadrante abaixo da curva cuja equação é $y = e^{-x}$. Sendo possível, calcule-o.

48. Ache os valores de n para os quais a integral imprópria

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$$

converge e calcule-a para esses valores de n.

49. Em certo campus universitário a função densidade de probabilidade de que a duração de uma chamada telefônica seja x min é dada por

$$f(x)=\begin{cases}0{,}4e^{-0{,}4x} & \text{se } x \geqslant 0\\ 0 & \text{se } x<0\end{cases}$$

Qual a probabilidade de que um telefonema escolhido ao acaso dure (a) entre 2 e 3 min; (b) no máximo 3 min; (c) no mínimo 10 min?

50. Se os quatro primeiros termos do polinômio de Maclaurin forem usados para aproximar o valor de $\sqrt{e}$, qual será a precisão do resultado?

51. Suponha que determinado negócio produza um fluxo contínuo de renda e que em t anos a partir de agora a renda seja dada por $1.000t - 300$. Qual o valor atual de todo o rendimento futuro se 8% ao ano for a taxa de juros compostos continuamente? (*Sugestão*: veja o parágrafo que precede o Exercício 33 nos Exercícios 11.3.)

52. Mostre que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, sem usar a regra de L' Hôpital. (*Sugestão*: calcule $f'(0)$ para $f(x) = e^x$, usando a definição de uma derivada.)

Apêndice

A.1 USO DE UMA TABELA DE INTEGRAIS

Apresentamos várias técnicas de integração e vimos como elas são úteis para a avaliação de muitas integrais. No entanto, há ocasiões em que esses procedimentos não são suficientes ou levam a uma integração complicada. Em tais casos, você pode desejar usar uma *tabela de integrais*. Tabelas bastante completas aparecem em textos de Matemática, e tabelas menores são encontradas na maioria dos textos de Cálculo. Deve-se ter o cuidado de não se confiar totalmente nas tabelas, ao calcular integrais. É essencial que se tenha o domínio das técnicas de integração, como foi mencionado no Capítulo 9, pois pode ser necessário empregar algumas das técnicas para expressar o integrando numa forma que seja encontrada em uma tabela.

Uma tabela breve de integrais aparece no final deste livro. As fórmulas usadas nos exemplos e exercícios desta secção aparecem nessa tabela. Observe que na tabela há legendas indicando a forma do integrando. A primeira legenda é *Algumas Formas Elementares* e as cinco fórmulas incluídas constam daquelas dadas na introdução ao Capítulo 9. A segunda legenda é *Formas Racionais Contendo* $a + bu$. O primeiro exemplo utiliza uma dessas fórmulas.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3}$$

Solução A fórmula 10 na tabela de integrais é

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu}\right] + C$$

Usando essa fórmula com $u = x$, $a = 4$ e $b = -1$, temos

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3} = \frac{1}{(-1)^2}\left[\frac{4}{2(4-x)^2} - \frac{1}{4-x}\right] + C$$

$$= \frac{2}{(4-x)^2} - \frac{1}{4-x} + C$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{6-2x^2}$$

Solução A fórmula 25 na tabela é

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C \tag{1}$$

Observe que essa fórmula pode ser usada se o coeficiente de x^2 na integral for 1, em vez de 2. Assim, escrevemos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{3 - x^2}$$

Para a integral à direita aplicamos (1) com $u = x$ e $a = \sqrt{3}$ e nós temos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)}$$

A integral no segundo membro é da forma

$$\int \frac{du}{u(a + bu)}$$

onde $u = x$, $a = 1$ e $b = 2$. A fórmula 11 na tabela é

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

Usando essa fórmula, temos

$$\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \ln \left| \frac{x}{1 + 2x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{2x + 1} \right| + C$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Solução A fórmula 27 na tabela é

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \tag{2}$$

Podemos aplicar essa fórmula à integral dada se obtivermos uma expressão da forma $u^2 \pm a^2$, completando o quadrado sob o sinal radical. Para completar o quadrado de $x^2 + 2x$ acrescentamos 1 e, portanto, também subtraímos 1. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}}$$

A integral é da forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

onde $u = x + 1$ e $a = 2$. Logo, de (2),

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}} &= \ln|(x + 1) + \sqrt{(x + 1)^2 - 4}| + C \\ &= \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2 \sqrt{4x^2 + 1}\, dx$$

Solução A fórmula 29 na tabela, com o sinal mais, é

$$\int u^2 \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 + a^2)\sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C \qquad (3)$$

Podemos aplicar essa fórmula escrevendo a integral do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{4x^2 + 1}\, dx &= \int x^2 \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}\, dx \\ &= 2 \int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx \end{aligned}$$

De (3) com $u = x$ e $a = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} 2 \int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx &= 2\left[\frac{x}{8}\left(2x^2 + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{16}}{8} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right|\right] + C \\ &= \frac{x}{16}(8x^2 + 1)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{64} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right| + C \end{aligned}$$

Das fórmulas 16, 19, 21, 73, 77, 86 e 98, entre outras, expressamos uma integral em termos de uma integral mais simples da mesma forma. Tais fórmulas são chamadas **fórmulas de redução**. O exemplo a seguir mostra como elas são aplicadas.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \sec^5 x\, dx$$

Solução A fórmula 77 é

$$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du \qquad (4)$$

Aplicamos essa fórmula com $u = x$ e $n = 5$ e temos

$$\int \sec^5 x\, dx = \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4} \int \sec^3 x\, dx$$

Agora aplicamos (4) à integral no segundo termo com $n = 3$ e obtemos

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x\, dx &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2} \int \sec x\, dx\right) \\ &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

Como a integral no Exemplo 6 é uma potência ímpar da secante, ela pode ser calculada com o uso de integração por partes, conforme foi explicado na Seção 9.3. De fato, essa integral aparece como Exercício 12 nos Exercícios 9.3.

EXERCÍCIOS A.1

Nos Exercícios de 1 a 36, use a tabela de integrais para calcular a integral. Nos Exercícios de 1 a 4, o integrando é uma forma racional $a + bu$. Use uma das fórmulas de 6 a 13.

1. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{2 + 3x}$
2. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(5 - 2x)^3}$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(6 - x)^2}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(7 + 3x)}$

Nos Exercícios de 5 a 8, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a \pm bu}$. Use uma das fórmulas de 14 a 23.

5. $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$
6. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 + 2x}\, dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + 2x}}{x}\, dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 2x}}$

Nos Exercícios 9 e 10, o integrando é uma forma contendo $a^2 + u^2$. Use uma das fórmulas de 24 a 26.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 25}$

Nos Exercícios de 11 a 14, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. Use uma das fórmulas de 27 a 38.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$
12. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 + 1}\, dx$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x}\, dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 1)^2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

Nos Exercícios 15 e 16, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$. Use uma das fórmulas de 39 a 48.

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\, dx$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - 9x^2}}$

Nos Exercícios 17 e 18, o integrando é uma forma contendo $2au - u^2$. Use uma das fórmulas de 49 a 58.

17. $\displaystyle\int x\sqrt{4x - x^2}\, dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Nos Exercícios de 19 a 24, o integrando é uma forma contendo funções trigonométricas. Use uma das fórmulas de 59 a 88.

19. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$
20. $\displaystyle\int \cos^8 x\, dx$
21. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^7 x\, dx$
22. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$
23. $\displaystyle\int t^4 \cos t\, dt$
24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$

Nos Exercícios 25 e 26, o integrando é uma forma contendo uma função trigonométrica inversa. Use uma das fórmulas de 89 a 94.

25. $\displaystyle\int \sec^{-1} 3x\, dx$
26. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} 4t\, dt$

Nos Exercícios de 27 a 34, o integrando é uma forma contendo uma função exponencial ou logarítmica. Use uma das fórmulas de 95 a 106.

27. $\int x^4 e^x \, dx$

28. $\int x^3 2^x \, dx$

29. $\int x^2 e^{4x} \, dx$

30. $\int x^2 \ln x \, dx$

31. $\int x^3 \ln (3x) \, dx$

32. $\int 5x^2 e^{-2x} \, dx$

33. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 5x \, dx$

34. $\int e^{3t} \cos 4t \, dt$

Nos Exercícios 35 e 36, o integrando é uma forma contendo uma função hiperbólica. Use uma das fórmulas de 107 a 124.

35. $\int 3y \operatorname{senh} 5y \, dy$

36. $\int e^x \operatorname{sech} e^x \, dx$

Nos Exercícios de 37 a 52, use a tabela de integrais para calcular a integral definida.

37. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x)^2}$

38. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x \, dx}{(1+x)^2}$

39. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2+16}}$

40. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(9+4x^2)^{3/2}}$

41. $\displaystyle\int_1^2 x^4 \ln x \, dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

43. $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{x^2+2x-15} \, dx$

44. $\displaystyle\int_3^5 x^2 \sqrt{x^2-9} \, dx$

45. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4w-w^2} \, dw$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec^5 x \, dx$

47. $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 5t \, dt$

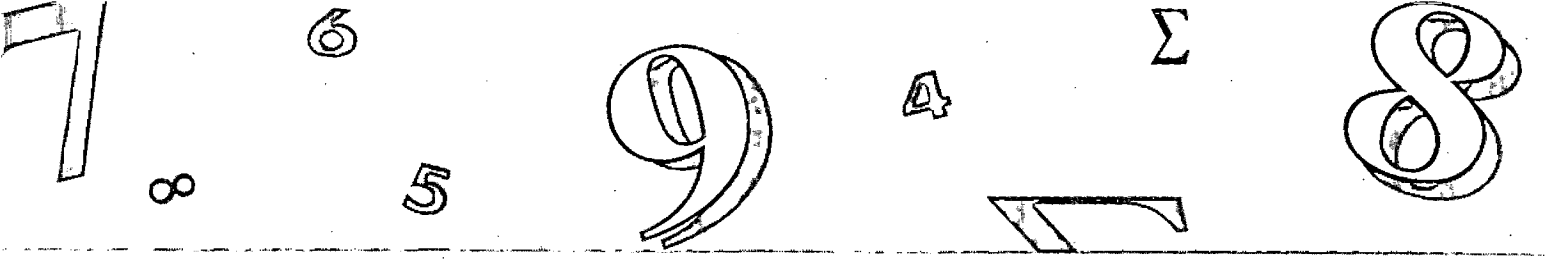
48. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 \theta \, d\theta$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x \cos^3 2x \, dx$

50. $\displaystyle\int_4^5 w^2 \sqrt{w^2-16} \, dw$

51. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$

52. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{2t} \operatorname{sen} 3t \, dt$



Fórmulas

O ALFABETO GREGO

α	alfa	ι	iota	ρ	rô
β	beta	k	kapa	σ	sigma
γ	gama	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mi	υ	ipsilon
ε	epsilon	ν	ni	ϕ	fi
ζ	zeta	ξ	csi	χ	qui
η	eta	o	ômicron	ψ	psi
θ	teta	π	pi	ω	ômega

FÓRMULAS DE GEOMETRIA

Os seguintes símbolos são usados para a medida:

r: raio h: altura b: base a: base C: circunferência A: área s: área da superfície
B: área da base V: volume

Círculo: $A = \pi r^2$; C: $2\pi r$

Triângulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Retângulo e paralelogramo: $A = bh$

Trapézio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular reto: $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi rh$

Cone circular reto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (com bases paralelas): $V = Bh$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3}Bh$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRIA

As Oito Identidades Trigonométricas Fundamentais

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1 \qquad \cos x \sec x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1 \qquad \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Identidades Sobre Soma e Diferença

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \qquad \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \qquad \cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{tg}(u + v) = \dfrac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} \qquad \operatorname{tg}(u - v) = \dfrac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$

Identidades Sobre Medidas Múltiplas

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u \qquad \cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u \qquad \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$

$\operatorname{tg} 2u = \dfrac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2} \qquad \operatorname{tg}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{2} \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 + \cos t}{2}$

$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

Identidades para o Produto, Soma e Diferença de Senos e Co-senos

$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)] \qquad \cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)] \qquad \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right) \qquad \operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

$\cos s + \cos t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right) \qquad \cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

Algumas Fórmulas de Redução

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x$	$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$	$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x$	$\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

Lei dos Senos e dos Co-senos

a, b e c representam as medidas dos lados de um triângulo: α, β e γ representam as medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a, b, e c, respectivamente.

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

TABELA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\text{sen } u) = \cos u D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\text{sen } u D_x u$
10. $D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u D_x u$
11. $D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \text{ tg } u D_x u$
13. $D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u D_x u$
14. $D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\text{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\text{cotg}^{-1} u) = \frac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\text{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\text{senh } u) = \cosh u D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \text{senh } u D_x u$
22. $D_x(\text{tgh } u) = \text{sech}^2 u D_x u$
23. $D_x(\text{cotgh } u) = -\text{cosech}^2 u D_x u$
24. $D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u D_x u$
25. $D_x(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotg } u D_x u$

TABELA DE INTEGRAIS

Algumas Formas Elementares

1. $\int du = u + C$
2. $\int a\, du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas Racionais Contendo $a + bu$

6. $\int \frac{u\, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}[a + bu - a \ln|a + bu|] + C$
7. $\int \frac{u^2\, du}{a + bu} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2 \ln|a+bu|\right] + C$
8. $\int \frac{u\, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu|\right] + C$
9. $\int \frac{u^2\, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu|\right] + C$
10. $\int \frac{u\, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu}\right] + C$
11. $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$
12. $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$
13. $\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

Formas Contendo $\sqrt{a + bu}$

14. $\int u\sqrt{a + bu}\, du = \frac{2}{15b^3}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$
15. $\int u^2\sqrt{a + bu}\, du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a + bu)^{3/2} + C$
16. $\int u^n\sqrt{a+bu}\, du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2an}{b(2n + 3)} \int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\, du$
17. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$
18. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a + bu} + C$
19. $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2an}{b(2n + 1)} \int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{a + bu}}$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C & \text{se } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

21. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

23. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$$

Formas Contendo $a^2 \pm u^2$

24. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

25. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \frac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1}\frac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

26. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1}\frac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

Formas Contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Nas fórmulas de 27 a 38, podemos substituir

$\ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$ por $\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}$

$\ln|u + \sqrt{u^2-a^2}|$ por $\cosh^{-1}\frac{u}{a}$

$\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right|$ por $\operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{u}$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

28. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

29. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

30. $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

31. $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a \sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

32. $$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

33. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

34. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

35. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

38. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas Contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$

39. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

40. $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

41. $$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C = \sqrt{a^2-u^2} - a \cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$$

43. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

44. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$
$= -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$

46. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

47. $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

48. $\frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas Contendo $2au - u^2$

49. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

50. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

51. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u} = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

52. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

53. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

54. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

55. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

56. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

57. $\int \frac{du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}} + C$

58. $\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}} + C$

Formas Contendo Funções Trigonométricas

59. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

60. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

61. $\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$

62. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

63. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right)\right| + C$

64. $\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right| + C$

65. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

66. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

67. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

68. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$

69. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

70. $\int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

71. $\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u + C$

72. $\int \operatorname{cotg}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du$

76. $\int \operatorname{cotg}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\,du$

77. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\int \operatorname{cosec}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} u\operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} u\,du$

79. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\,du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

80. $\int \cos mu \cos nu\,du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\,du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^2 \operatorname{sen} u \, du = 2u \operatorname{sen} u + (2 - u^2) \cos u + C$

85. $\int u^2 \cos u \, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \operatorname{sen} u + C$

86. $\int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$

87. $\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$

88. $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \, du = -\dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u \, du$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u \, du$

Formas Contendo Funções Trigonométricas Inversas

89. $\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

90. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$

91. $\int \operatorname{tg}^{-1} u \, du = u \operatorname{tg}^{-1} u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

92. $\int \operatorname{cotg}^{-1} u \, du = u \operatorname{cotg}^{-1} u + \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

93. $\int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$

$= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C$

94. $\int \operatorname{cosec}^{-1} u \, du = u \operatorname{cosec}^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$

$= u \operatorname{cosec}^{-1} u + \cosh^{-1} u + C$

Formas Contendo Funções Exponenciais e Logarítmicas

95. $\int e^u \, du = e^u + C$

96. $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

97. $\int ue^u \, du = e^u(u - 1) + C$

98. $\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du$

99. $\int u^n a^u \, du = \dfrac{u^n a^u}{\ln a} - \dfrac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C$

100. $\int \dfrac{e^u \, du}{u^n} = -\dfrac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1} \int \dfrac{e^u \, du}{u^{n-1}}$

101. $\int \dfrac{a^u \, du}{u^n} = -\dfrac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{\ln a}{n-1} \int \dfrac{a^u \, du}{u^{n-1}}$

102. $\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$

103. $\int u^n \ln u \, du = \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$

104. $\int \dfrac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + C$

105. $\int e^{au} \operatorname{sen} nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C$

106. $\int e^{au} \cos nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C$

Formas Contendo Funções Hiperbólicas

107. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

108. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

109. $\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln|\cosh u| + C$

110. $\int \operatorname{cotgh} u \, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

111. $\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

112. $\int \operatorname{cosech} u \, du = \ln|\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2}u| + C$

113. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

114. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

115. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

116. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

117. $\int \operatorname{senh}^2 u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \tfrac{1}{2}u + C$

118. $\int \cosh^2 u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \tfrac{1}{2}u + C$

119. $\int \operatorname{tgh}^2 u \, du = u - \operatorname{tgh} u + C$

120. $\int \operatorname{cotgh}^2 u \, du = u - \operatorname{cotgh} u + C$

121. $\int u \operatorname{senh} u \, du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C$

122. $\int u \cosh u \, du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C$

123. $\int e^{au} \operatorname{senh} nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu) + C$

124. $\int e^{au} \cosh nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu) + C$

Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

EXERCÍCIOS 1.1 (Página 12)

1. $(-2, +\infty)$ **3.** $(-\infty, \frac{3}{4}]$ **5.** $[4, 8]$ **7.** $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$ **9.** $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$ **11.** $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$ **13.** $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
15. $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ **17.** $[-1, \frac{1}{2}]$ **19.** $(-3, \frac{3}{4})$ **21.** $(\frac{3}{2}, \frac{31}{14}] \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$ **23.** $\{-\frac{5}{2}, 1\}$ **25.** $\{-\frac{1}{4}, 4\}$ **27.** $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$
29. $\{\frac{4}{3}, 3\}$ **31.** $[\frac{5}{8}, +\infty)$ **33.** $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ **35.** $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ **37.** $(-11, 3)$ **39.** $[\frac{2}{3}, 2]$ **41.** $(-\infty, -2) \cup (12, +\infty)$
43. $[-\frac{1}{2}, 4]$ **45.** $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ **47.** $(1, +\infty)$ **49.** $[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}]$ **51.** $(-\infty, \frac{10}{9}) \cup (2, +\infty)$ **53.** $|x| > |a|$ **55.** $|x - 2| > 2$

EXERCÍCIOS 1.2 (Página 23)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 5 aparecem nas Figs. 1.2-1 a 1.2-5.)
1. (a) (1, 2); (b) (−1, −2); (c) (−1, 2); (d) (−2, 1) **3.** (a) (2, −2); (b) (−2, 2); (c) (−2, −2); (d) não se aplica **5.** (a)(−1, 3); (b)(1, −3); (c) (1, 3); (d) (−3, −1)

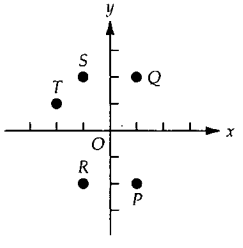


FIGURA 1.2-1

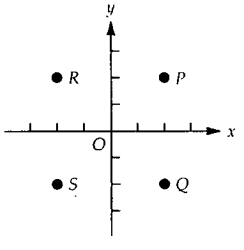


FIGURA 1.2-3

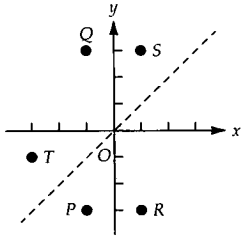


FIGURA 1.2-5

9. $\sqrt{26}$; $\frac{1}{2}\sqrt{89}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ **11.** $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{41}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{82}$ e $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$; $\frac{41}{2}$ **13.** $\sqrt{578}$ **15.** $(-8, 12)$
19. $(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3})$ e $(-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3})$ **21.** -1 **23.** $-\frac{1}{7}$ **25.** $4x - y = 11$ **27.** $2x + y + 1 = 0$ **29.** $13x - 4y - 28 = 0$
31. $4x - 3y + 12 = 0$ **33.** $x + 2y - 4 = 0$ **35.** $y = -7$ **37.** $\sqrt{3}x - y + (2\sqrt{3} - 5) = 0$ **39.** (a) $-\frac{1}{3}$; (b) 0
41. (a) colinear; (b) não-colinear **43.** (a) $y = 0$; (b) $x = 0$; (c) $xy = 0$ **47.** (a) $2x + 3y + 7 = 0$; (b) $\sqrt{13}$
51. $(-\frac{9}{4}, \frac{17}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, $(\frac{13}{4}, \frac{27}{4})$ **53.** (a) $-\frac{A}{B}$; (b) $-\frac{C}{B}$; (c) $-\frac{C}{A}$; (d) $Bx - Ay = 0$
55. $9x - 4y - 11 = 0$; $y = 1$; $9x + 4y - 19 = 0$. Eles se interceptam em $(\frac{5}{3}, 1)$. **59.** (a) $x = 1$; (b) $y = 1$; (c) $2x + y - 3 = 0$

EXERCÍCIOS 1.3 (Página 30)

1. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ **3.** $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$ **5.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$ **7.** (3, 4); 4 **9.** $(0, -\frac{2}{3})$; $\frac{5}{3}$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios 7 e 9 aparecem nas Figs. 1.3.-7 e 1.3.-9.)
11. circunferência **13.** o conjunto vazio **15.** circunferência
(Esboços dos gráficos dos Exercícios 17 a 43 aparecem nas Figs. 1.3-17 a 1.3-43.)
45. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$ **47.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ **49.** $3x + 4y - 19 = 0$

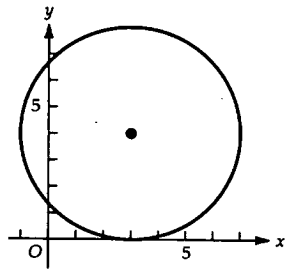


FIGURA 1.3-7

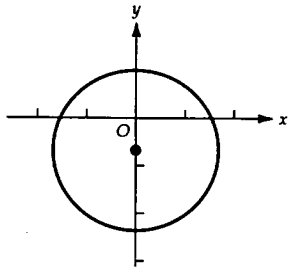


FIGURA 1.3-9

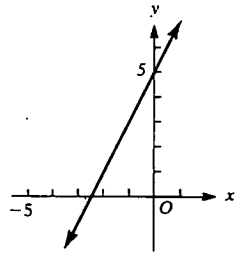


FIGURA 1.3-17

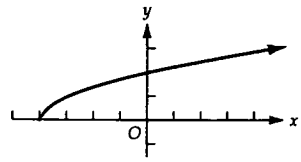


FIGURA 1.3-19

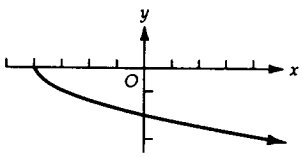


FIGURA 1.3-21

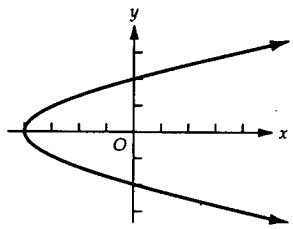


FIGURA 1.3-23

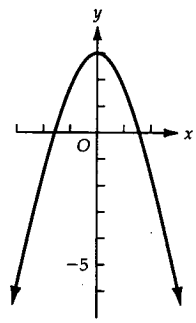


FIGURA 1.3-25

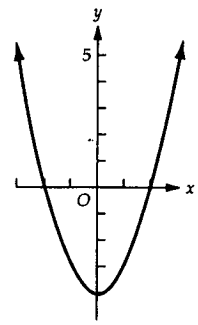


FIGURA 1.3-27

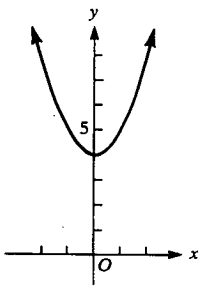


FIGURA 1.3-29

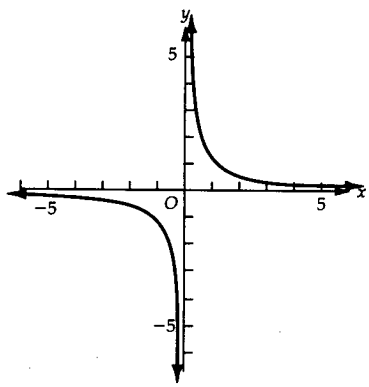


FIGURA 1.3-31

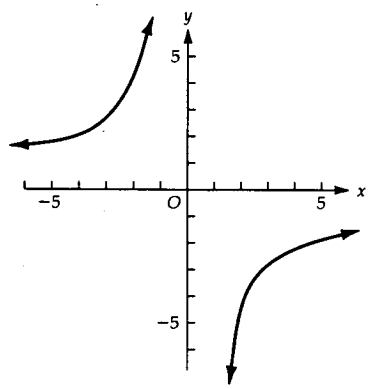


FIGURA 1.3-33

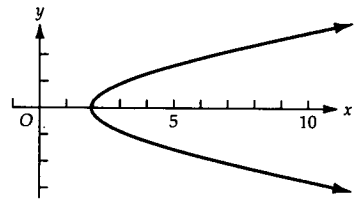


FIGURA 1.3-35

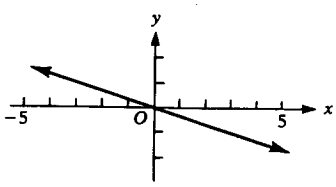


FIGURA 1.3-37(a)

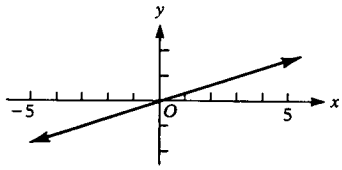


FIGURA 1.3-37(b)

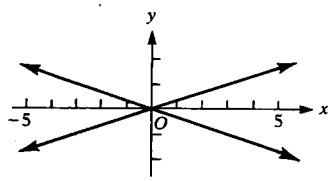


FIGURA 1.3-37(c)

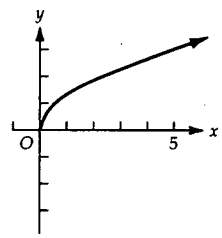


FIGURA 1.3-39(a)

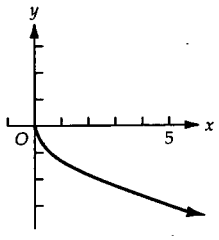


FIGURA 1.3-39(b)

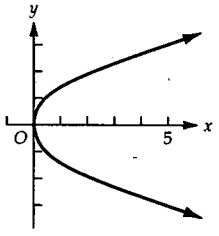


FIGURA 1.3-39(c)

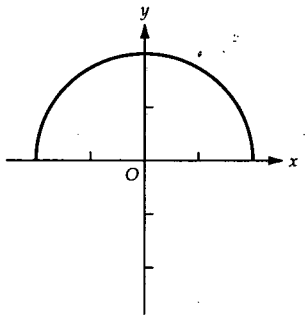


FIGURA 1.3-41(a)

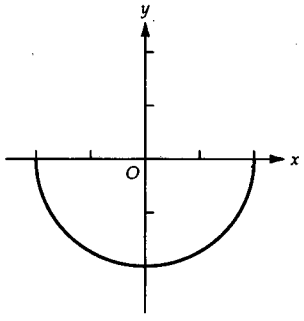


FIGURA 1.3-41(b)

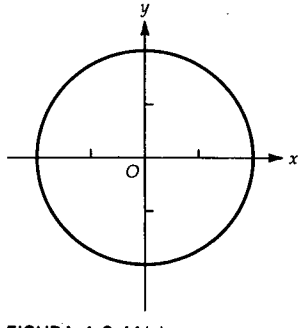


FIGURA 1.3-41(c)

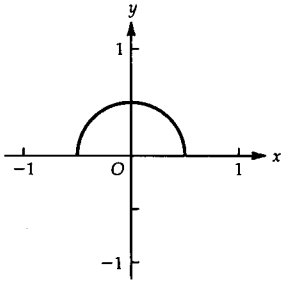


FIGURA 1.3-43(a)

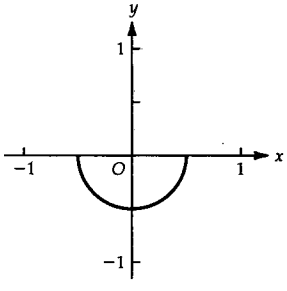


FIGURA 1.3-43(b)

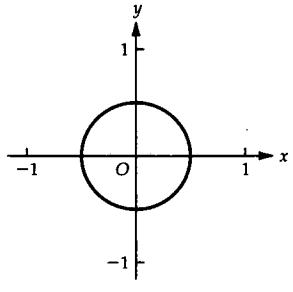


FIGURA 1.3-43(c)

EXERCÍCIOS 1.4 (Página 39)

1. (a) sim, $x \geqslant 4$; (b) sim, $|x| \geqslant 2$; (c) sim, $|x| \leqslant 2$; (d) não **3.** (a) sim, $(-\infty, +\infty)$; (b) não; (c) sim, $(-\infty, +\infty)$; (d) sim, $(-\infty, +\infty)$
5. (a) 5; (b) -5; (c) -1; (d) $2a + 1$; (e) $2x + 1$; (f) $4x - 1$; (g) $4x - 2$; (h) $2x + 2h - 1$; (i) $2x + 2h - 2$; (j) 2
7. (a) -5; (b) -6; (c) -3; (d) 30; (e) $2h^2 + 9h + 4$; (f) $8x^4 + 10x^2 - 3$; (g) $2x^4 - 7x^2$; (h) $2x^2 + (4h + 5)x + (2h^2 + 5h - 3)$;

(i) $2x^2 + 5x + (2h^2 + 5h - 6)$; (j) $4x + 2h + 5$ **9.** (a) 1; (b) $\sqrt{11}$; (c) 2; (d) 5; (e) $\sqrt{4x + 9}$; (f) $\dfrac{2}{\sqrt{2x + 2h + 3} + \sqrt{2x + 3}}$

11. (a) $x^2 + x - 6$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $-x^2 + x - 4$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x^3 - 5x^2 - x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;

(d) $\dfrac{x - 5}{x^2 - 1}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 1\}$; (e) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$, domínio: $\{x | x \neq 5\}$ **13.** (a) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}$, domínio: $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$;

(b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x}$, domínio: $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$; (c) $\dfrac{x + 1}{x^2 - x}$, domínio; $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$: (d) $\dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, domínio: $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$;

(e) $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$ **15.** (a) $\sqrt{x} + x^2 - 1$, domínio: $[0, +\infty)$;

(b) $\sqrt{x} - x^2 + 1$, domínio: $[0, +\infty)$; (c) $\sqrt{x}(x^2 - 1)$, domínio: $[0, +\infty)$;

(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$, domínio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; (e) $\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$ **17.** (a) $x^2 + 3x - 1$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;

(b) $x^2 - 3x + 3$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq \frac{2}{3}\}$;

(e) $\dfrac{3x - 2}{x^2 + 1}$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **19.** (a) $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 2\}$;

(b) $\dfrac{-x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 2\}$; (c) $\dfrac{x}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 2\}$;

(d) $\dfrac{x - 2}{x^2 + x}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2\}$; (e) $\dfrac{x^2 + x}{x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 2\}$
21. (a) $x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$: (b) $x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 4$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $x + 14$, domínio: $(-\infty, +\infty)$
23. (a) $x^2 - 6$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 10x + 24$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 10$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;

(d) $x^4 - 2x^2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **25.** (a) $\sqrt{x^2 - 4}$, domínio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (b) $x - 4$, domínio: $[2, +\infty)$; (c) $\sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$, domínio: $[6, +\infty)$ (d) $x^4 - 4x^2 + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **27.** (a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$; (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$; (c) x, domínio: $\{x | x \neq 0\}$; (d) $\sqrt[4]{x}$, domínio: $[0, +\infty)$ **29.** (a) $|x + 2|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $|x| + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $|x + 2| + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **31.** (a) $2x^2 - 3$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $4x^2 - 12x + 9$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $4x - 9$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **33.** (a) 0; (b) 4; (c) $4 - 2x$ **35.** (a) 1; (b) -1; (c) 1; (d) -1; (e) 1 se $x \leq 0$, -1 se $x > 0$; (f) 1 se $x \geq -1$, -1 se $x < -1$; (g) 1; (h) -1 se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$ **37.** (a) par; (b) nem um nem outro; (c) ímpar; (d) par; (e) ímpar; (f) ímpar; (g) nem um nem outro; (h) par; (i) par; (j) ímpar **39.** (a) par; (b) ímpar; (c) par; (d) par

EXERCÍCIOS 1.5 (Página 44)

(Esboços dos gráficos aparecem nas Figs. 1.5-1 a 1.5-43.)
1. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, +\infty)$ **3.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-1, +\infty)$ **5.** domínio: $[-1, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$ **7.** domínio: $(-\infty, 2]$; imagem: $[0, +\infty)$ **9.** domínio: $(-\infty, 0]$; imagem: $[0, +\infty)$ **11.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$ **13.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$ **15.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[4, +\infty)$ **17.** domínio: $\{x | x \neq 1\}$; imagem: $\{y | y \neq -2\}$ **19.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $\{-2, 2\}$ **21.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $\{y | y \neq 3\}$ **23.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-4, +\infty)$ **25.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$ **27.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ **29.** domínio: $\{x | x \neq -5 \text{ e } x \neq -1\}$; imagem: $\{y | y \neq -7 \text{ e } y \neq -3\}$ **31.** domínio: $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$ **33.** domínio: $\{x | x \neq 2\}$; imagem: $[0, +\infty)$ **35.** domínio: $\{x | x \neq -5\}$; imagem: $[-6, +\infty)$ **37.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[1, +\infty)$ **39.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: {inteiros} **41.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, 1)$ **43.** domínio: $\{x | x \neq 0\}$; imagem: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$

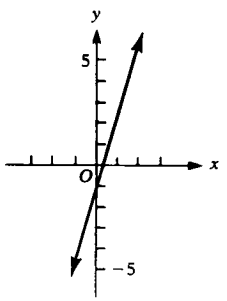


FIGURA 1.5-1

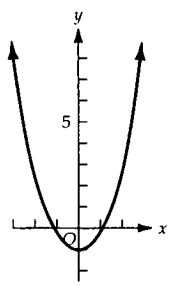


FIGURA 1.5-3

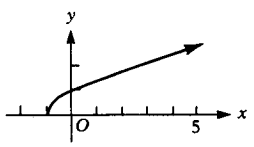


FIGURA 1.5-5

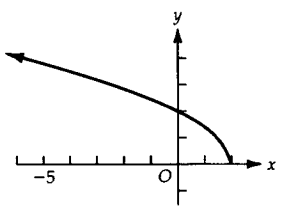


FIGURA 1.5-7

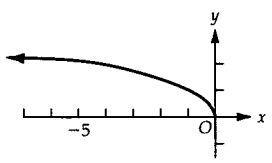


FIGURA 1.5-9

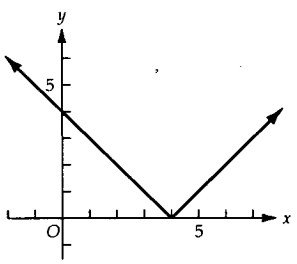


FIGURA 1.5-11

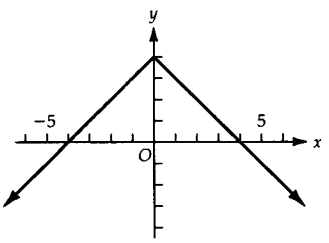


FIGURA 1.5-13

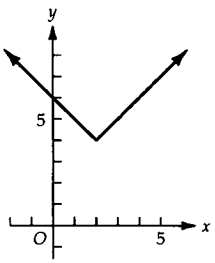


FIGURA 1.5-15

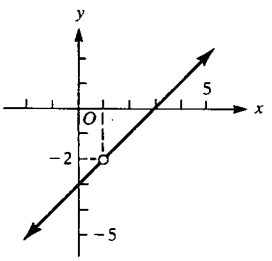


FIGURA 1.5-17

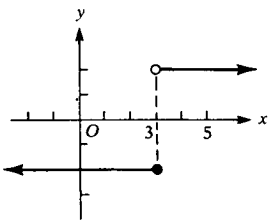


FIGURA 1.5-19

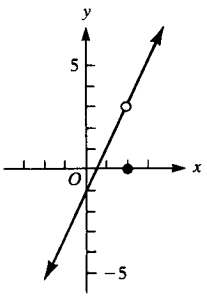


FIGURA 1.5-21

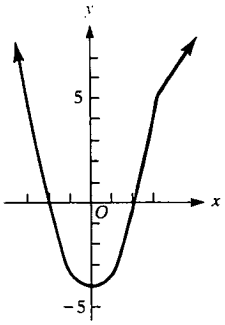


FIGURA 1.5-23

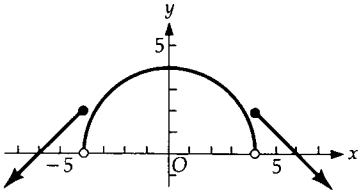


FIGURA 1.5-25

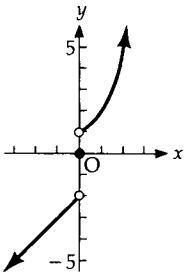


FIGURA 1.5-27

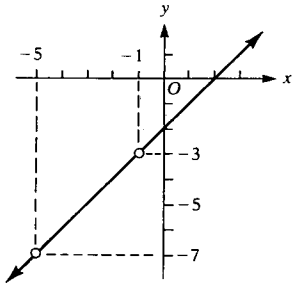


FIGURA 1.5-29

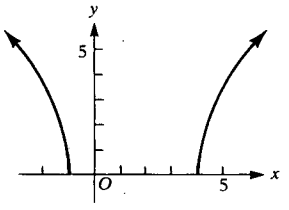


FIGURA 1.5-31

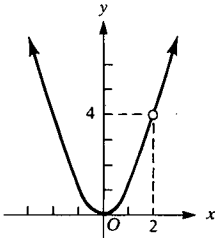


FIGURA 1.5-33

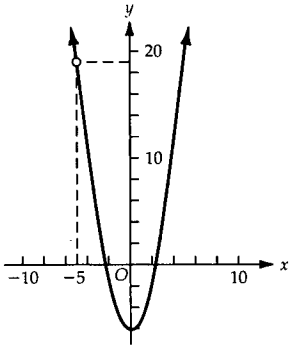


FIGURA 1.5-35

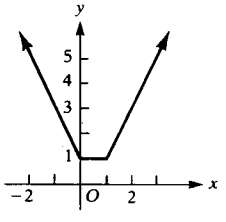


FIGURA 1.5-37

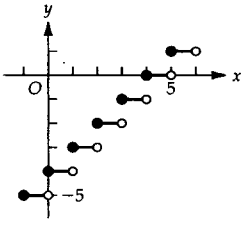


FIGURA 1.5-39

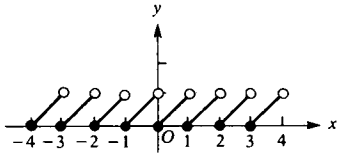


FIGURA 1.5-41

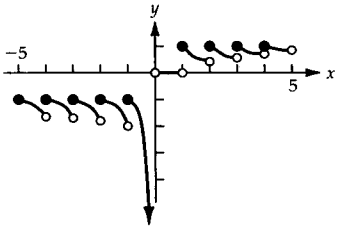


FIGURA 1.5-43

EXERCÍCIOS 1.6 (Página 51)

1. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{3}{4}\pi$; (c) $\frac{7}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$; (e) $\frac{1}{9}\pi$; (f) $\frac{5}{2}\pi$; (g) $-\frac{5}{12}\pi$; (h) $\frac{5}{9}\pi$ **3.** (a) 45°; (b) 120°; (c) 330°; (d) −90°; (e) 28°39′; (f) 540°; (g) −114°36′; (h) 15° **5.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{2}$ **7.** (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) −1; (d) 0 **9.** (a) $\sqrt{3}$; (b) 1; (c) −1; (d) 1 **11.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) 1 **13.** (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\sqrt{2}$ **15.** (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) −2; (d) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **17.** (a) 0; (b) 1; (c) −1; (d) indefinido **19.** (a) 1; (b) 0; (c) indefinido; (d) 1 **21.** (a) −1; (b) −1 (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $\sqrt{3}$ **23.** (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (c) 0; (d) 0 **25.** (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) π; (c) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; (d) 0 **27.** (a) 0, π; (b) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; (c) 0, π; (d) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ **29.** (a) $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$; (c) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$; (d) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ **31.** (a) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; (b) 0, π. **33.** (a) π; (b) $\frac{3}{2}\pi$ **35.** (a) $\frac{3}{5}$; (b) 1 **37.** (a) $-\frac{7}{4}$; (b) $\frac{3}{55}$ **39.** (a) 63°; (b) 19° **41.** 27°, 45°, 108° **43.** $3x - y + 7 = 0$; $x + 3y - 11 = 0$ **45.** (a) sen $3x$, $(-\infty, +\infty)$; (b) tg $\frac{x}{2}$, $\{x | x \neq (2k + 1)\pi\}$, onde k é qualquer inteiro

47. (a) cotg $\frac{1}{x}$, $\left\{x | x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{k\pi}\right\}$, onde k é qualquer inteiro; (b) sec$(x - \pi)$, $\{x | x \neq \pi \text{ e } x \neq (k + \frac{1}{2})\pi\}$, onde k é qualquer inteiro

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1 (Página 52)

1. $[5, +\infty)$ **3.** $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ **5.** $(-\frac{3}{2}, 1)$ **7.** $[-3, \frac{3}{2}]$ **9.** $(-\frac{4}{3}, 4)$ **11.** $(-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$ **13.** $\{-3, \frac{9}{2}\}$ **15.** $\{-2, 2\}$
17. $-4, 14$ **19.** $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0$ **21.** Veja Fig. 1-21 **23.** Veja Fig. 1-23 **25.** Veja Fig. 1-25 **29.** 15 **31.** $(-2, -5)$; $(3, -6)$
35. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$

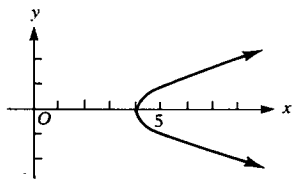


FIGURA 1-21

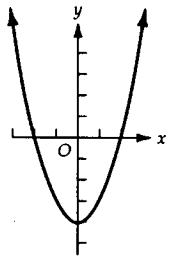


FIGURA 1-23

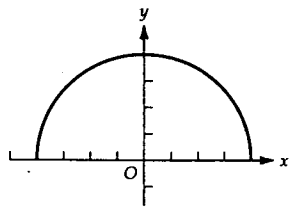


FIGURA 1-25

37. $(\frac{3}{2}, -1)$; 1 **39.** $3x - y + 9 = 0$ **41.** $5x + 2y - 19 = 0$ **43.** $7x^2 + 7y^2 + 11x - 19y - 6 = 0$ **45.** $12x + 3y - 2 = 0$
47. $0 \leqslant k \leqslant 2$ **49.** (a) 35; (b) $3x^4 + x^2 + 5$; (c) $6x + 3h - 1$ **51.** (a) ímpar; (b) par; (c) nem um nem outro; (d) ímpar
53. (a) $x^2 + 4x - 7$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 4x - 1$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $4x^3 - 3x^2 - 16x + 12$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;
(d) $\dfrac{x^2 - 4}{4x - 3}$, domínio: $\{x | x \neq \frac{3}{4}\}$; (e) $\dfrac{4x - 3}{x^2 - 4}$, domínio: $\{x | x \neq \pm 2\}$; (f) $16x^2 - 24x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;
(g) $4x^2 - 19$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **55.** (a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$; (b) $\dfrac{-x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$;
(c) $\dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$; (d) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 3x}$, domínio: $\{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 3\}$; (e) $\dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$, $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$;
(f) $-\dfrac{x + 1}{2x + 3}$, domínio: $\{x | x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -1\}$; (g) $\dfrac{1}{x - 2}$, domínio: $\{x | x \neq 2, x \neq 3\}$ **57.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$;
Veja Fig. 1-57 **59.** domínio: $\{x | x \neq 2\}$; imagem: $\{y | y \neq 6\}$; Veja Fig. 1-59 **61.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-1, +\infty)$;
Veja Fig. 1-61 **63.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$; Veja Fig. 1-63

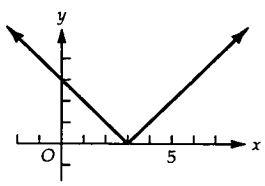


FIGURA 1-57

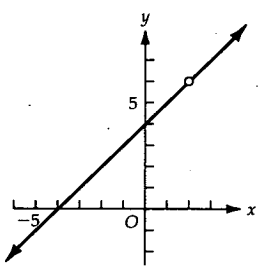


FIGURA 1-59

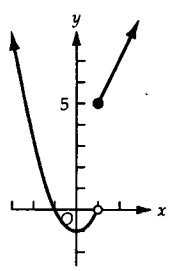


FIGURA 1-61

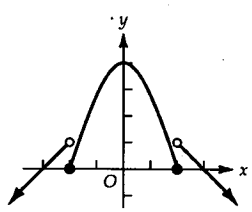


FIGURA 1-63

65. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $2 + \sqrt{3}$; (e) -1; (f) $-\dfrac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ **67.** (a) $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$: (b) 0; (c) $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; (d) $\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$; (e) $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$; (f) $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$
69. 52°, 90°, 106°, 112° **71.** $x = 0$; $3x + 4y = 0$ **75.** medianas interceptam em $(\frac{13}{3}, \frac{13}{3})$; altitudes interceptam em (9, 7); centro da circunferência circunscrita está em (2, 3)

EXERCÍCIOS 2.1 (Página 63)

1. (b) 0,2 **3.** (b) 0,005 **5.** (b) 0,01 **7.** (b) 0,005 **9.** (b) $\frac{1}{1.400}$ **11.** (b) 0,0006 **13.** (b) $\frac{1}{3.000}$ **15.** (b) 0,0075 **17.** (b) 0,0008 **19.** (b) 0,01
21. (b) $\frac{1}{3.000}$ **23.** $\delta = \epsilon$ **25.** $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon$ **27.** $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ **29.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **31.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **33.** $\delta = \epsilon$ **35.** $\delta = \min(1, \frac{1}{3}\epsilon)$ **37.** $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$
39. $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$ **41.** $\delta = \min(1, \frac{1}{17}\epsilon)$

EXERCÍCIOS 2.2 (Página 72)

1. 8 **3.** 7 **5.** 0 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-\frac{1}{22}$ **11.** $\frac{3}{2}$ **13.** $\frac{2}{3}$ **15.** (a) 0,3333, 0,2857, 0,2564, 0,2506, 0,2501; 0,2000, 0,2222, 0,2439, 0,2494, 0,2499; (b) $\frac{1}{4}$ **17.** (a) 0,2500, 0,2000, 0,1549, 0,1441, 0,1430, 0,1429; 0, 0,0769, 0,1304, 0,1416, 0,1427, 0,1428; (b) $\frac{1}{7}$ **19.** (a) 0,1716, 0,1690, 0,1671, 0,1667, 0,1667, 0,1623, 0,1644, 0,1662, 0,1666, 0,1667; (b) $\frac{1}{6}$ **21.** 14 **23.** -6 **25.** $\frac{16}{7}$ **27.** 12 **29.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ **35.** $\frac{1}{3}$ **37.** -1 **39.** $\frac{11}{17}$ **45.** (a) 0; (b) Veja Fig. 2.2-45

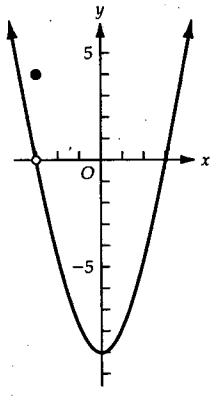


FIGURA 2.2-45

EXERCÍCIOS 2.3 (Página 76)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 21 aparecem nas Figs. 2.3-1 a 2.3-21.)
1. (a) -3; (b) 2; (c) não existe porque $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ **3.** (a) 8; (b) 0; (c) não existe porque $\lim_{t\to -4^+} f(t) \neq \lim_{t\to -4^-} f(t)$ **5.** (a) 4; (b) 4; (c) 4 **7.** (a) 5; (b) 5; (c) 5 **9.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **11.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **13.** (a) -4; (b) -4; (c) -4 **15.** (a) 1; (b) -1; (c) não existe porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ **17.** (a) 2; (b) 0; (c) não existe porque $\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$; (d) 0; (e) -2; (f) não existe porque $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ **19.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **21.** (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 0; (f) 0 **23.** (a) -2; (b) 2; (c) não existe **25.** (a) 2; (b) 1; (c) não existe **27.** Veja Fig. 2.3-27 (a) -1; (b) 1; (c) não existe **29.** -6 **31.** $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$ **35.** (a) Veja Fig. 2.3-35 (b) 40; (c) 35; (d) 140; (e) 130

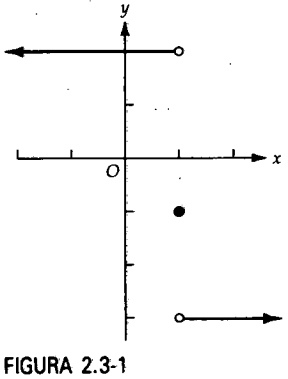


FIGURA 2.3-1

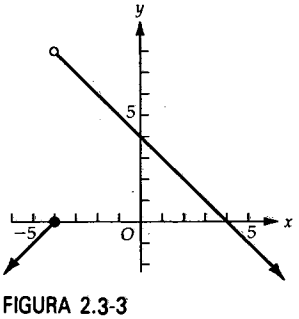


FIGURA 2.3-3

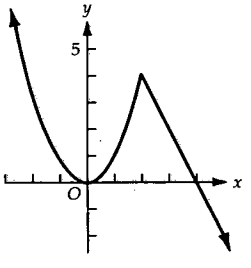


FIGURA 2.3-5

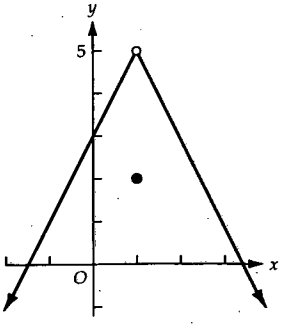


FIGURA 2.3-7

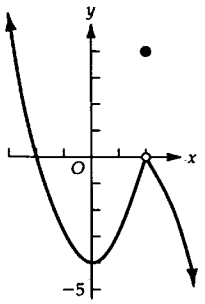


FIGURA 2.3-9

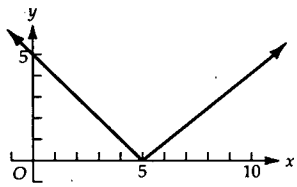


FIGURA 2.3-11

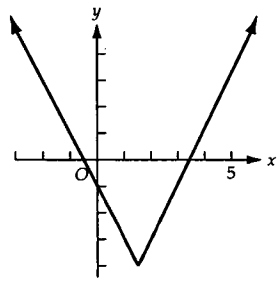


FIGURA 2.3-13

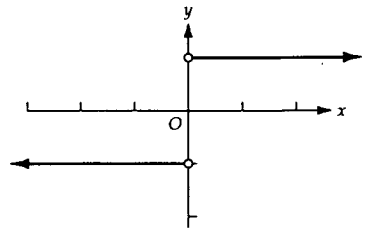


FIGURA 2.3-15

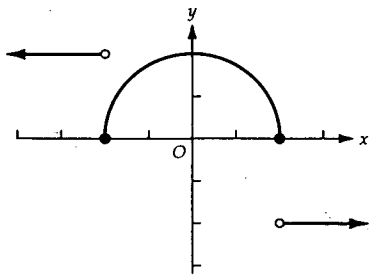


FIGURA 2.3-17

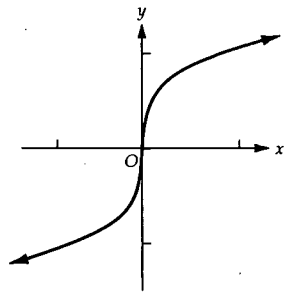


FIGURA 2.3-19

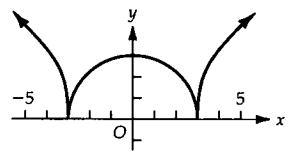


FIGURA 2.3-21

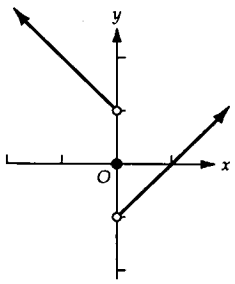


FIGURA 2.3-27

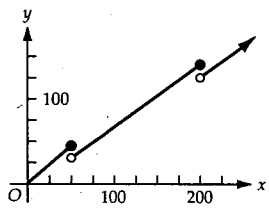


FIGURA 2.3-35

EXERCÍCIOS 2.4 (Página 87)

1. (a) 1, 2, 10, 100, 1.000, 10.000; (b) $+\infty$ **3.** (a) 1, 4, 100, 10.000, 1.000.000, 100.000.000; 1, 4, 100, 10.000, 1.000.000, 100.000.000; (b) $+\infty$
5. (a) $-4, -7, -31, -301, -3.001, -30.001$; (b) $-\infty$ **7.** (a) $-2, -5, -29, -299, -2.999, -29.999$; (b) $-\infty$
9. (a) 5, 9, 41, 401, 4.001, 40.001; (b) $+\infty$ **11.** (a) 2,3, 4,3, 20,3, 200,3, 2000,5, 20.037; (b) $+\infty$ **13.** $+\infty$ **15.** $-\infty$ **17.** $-\infty$
19. $+\infty$ **21.** $-\infty$ **23.** $+\infty$ **25.** $+\infty$ **27.** $-\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 33 a 41 aparecem nas Figs. 2.4-33(a) a 2.4-41.)
33. (a) $x = 0$; (b) $x = 0$; (c) $x = 0$; (d) $x = 0$ **35.** $x = 4$ **37.** $x = -3$ **39.** $x = -3$ **41.** $x = -5, x = -3$

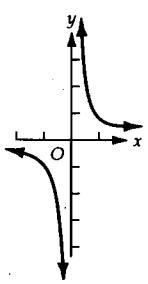


FIGURA 2.4-33(a)

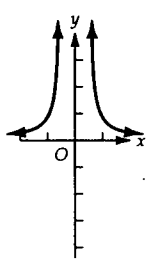


FIGURA 2.4-33(b)

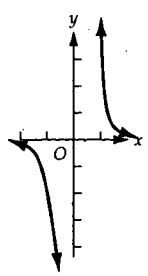


FIGURA 2.4-33(c)

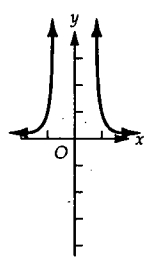


FIGURA 2.4-33(d)

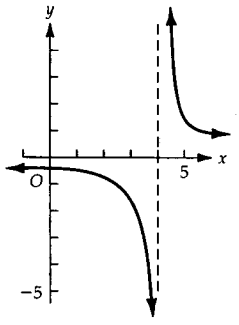


FIGURA 2.4-35

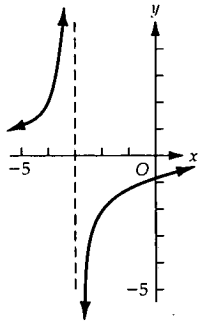


FIGURA 2.4-37

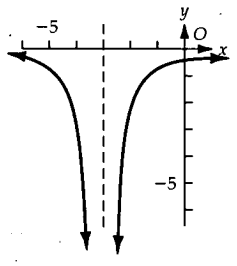


FIGURA 2.4-39

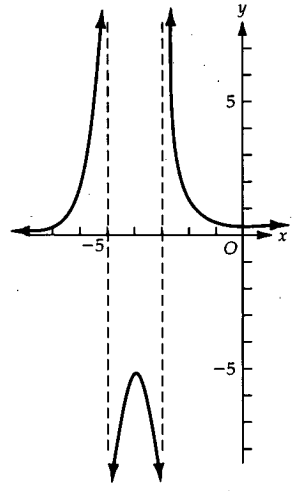


FIGURA 2.4-41

EXERCÍCIOS 2.5 (Página 97)

1. 4, 1, 0,25, 0,1111, 0,0625, 0,0400, 0,0004, 0,000004; 4, 1, 0,25, 0,1111, 0,0625, 0,0400, 0,0004, 0,000004; (c) 0; (d) 0
3. 1, 0,1250, 0,0156, 0,0046, 0,0020, 0,0010, 10^{-6}, 10^{-9}; -1, $-0{,}1250$, $-0{,}0156$, $-0{,}0046$, $-0{,}0020$, $-0{,}0010$, -10^{-6}, -10^{-9}; (c) 0; (d) 0 **5.** 0, $-1{,}5$, $-2{,}4$, $-2{,}823$, $-2{,}919$, $-2{,}953$, $-2{,}970$, $-2{,}9997$, $-2{,}999997$; 0, $-1{,}5$, $-2{,}4$, $-2{,}823$, $-2{,}919$, $-2{,}953$, $-2{,}970$, $-2{,}9997$, $-2{,}999997$; (c) -3; (d) -3 **7.** 3, 2,273, 2,158, 2,015, 2,0015, 2,00015, 2,000015; 1,4, 1,769, 1,857, 1,985, 1,9985, 1,99985, 1,999985; (c) 2; (d) 2 **9.** 0,75, 0,1944, 0,1100, 0,0101, 0,001001, 0,0001, 0,00001; $-0{,}25$, $-0{,}1389$, $-0{,}0900$, $-0{,}0099$, $-0{,}0010$, $-0{,}0001$, $-0{,}00001$; (c) 0; (d) 0 **11.** $\frac{2}{5}$ **13.** $-\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{7}{3}$ **17.** 0 **19.** $+\infty$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** $+\infty$ **25.** $-\infty$ **27.** 1 **29.** -1 **31.** 0 **33.** $-\infty$ **35.** 0

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 37 a 55 aparecem nas Figs. 2.5-37 a 2.5-55.)

37. $y = 2$, $x = 3$ **39.** $y = 1$, $x = 0$ **41.** $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$ **43.** $y = 4$, $x = -3$, $x = 3$ **45.** $y = 0$, $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{5}{2}$
47. $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ **49.** $y = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$ **51.** $y = 1$, $y = -1$ **53.** $y = -1$, $y = 1$, $x = 3$ **55.** $y = 2$, $x = -1$, $x = 1$

57. tome $N = 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$ **59.** tome $N = \sqrt{\dfrac{2}{\epsilon} - 1}$ **61.** tome $N = \dfrac{\epsilon - 7}{2\epsilon}$

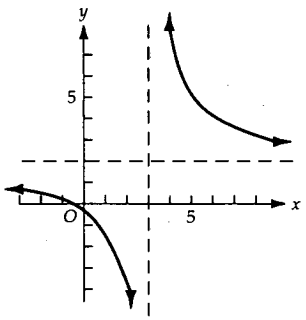


FIGURA 2.5-37

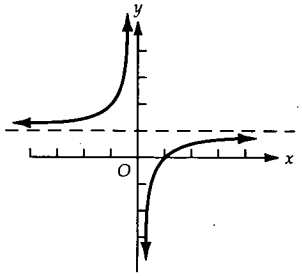


FIGURA 2.5-39

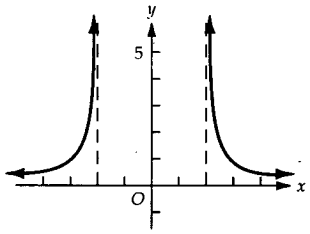


FIGURA 2.5-41

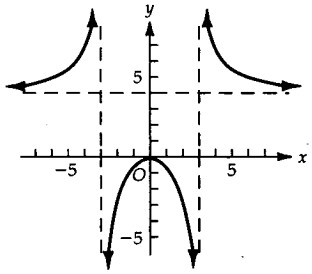


FIGURA 2.5-43

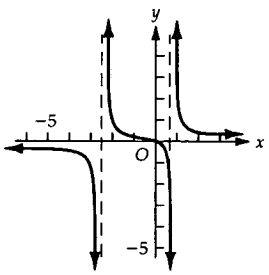


FIGURA 2.5-45

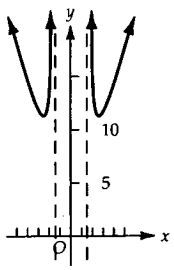


FIGURA 2.5-47

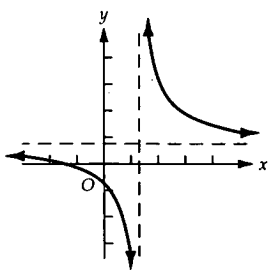


FIGURA 2.5-49

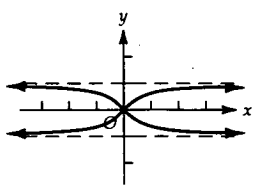


FIGURA 2.5-51

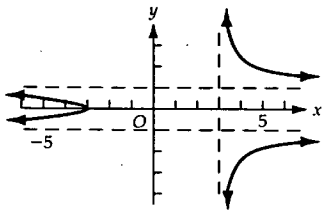


FIGURA 2.5-53

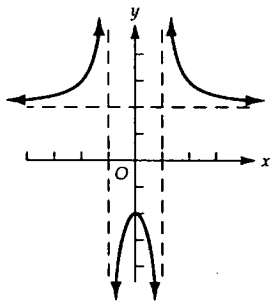


FIGURA 2.5-55

EXERCÍCIOS 2.6 (Página 105)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 13 aparecem nas Figs. 2.6-1 a 2.6-13.)

1. -3; $f(-3)$ não existe **3.** -3; $\lim_{x \to -3} g(x) \neq g(-3)$ **5.** 4; $h(4)$ não existe **7.** 4; $\lim_{x \to 4} f(x)$ não existe **9.** -2, 2; $F(-2)$ e $F(2)$ não existem **11.** -2, 2; $G(-2)$ e $G(2)$ não existem **13.** 0; $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe **15.** (Veja Fig. 2.3-9) 2, $\lim_{t \to 2} g(t) \neq g(2)$ **17.** Veja Fig. 2.6-17, 0; $\lim_{x \to 0} g(x)$ não existe **19.** Veja Fig. 2.3-15, 0; $f(0)$ não existe **21.** todos os inteiros; $\lim_{x \to k} [\![x]\!]$ não existe se k for um inteiro qualquer inteiro **23.** removível; 4 **25.** essencial **27.** removível; 0 **29.** essencial **31.** removível; $-\frac{1}{6}$ **33.** todos os números reais **35.** todos os números reais exceto 3 **37.** todos os números reais exceto -2 e 2 **39.** todos os números reais exceto 2 **41.** todos os números reais exceto 1 **43.** (b) 50 e 200 **45.** Veja a Fig. 2.6-45, f é contínua em toda parte **47.** Seja $g(0) = \dfrac{1}{3a^2}$ **51.** $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < a \\ 1 \text{ se } a \leqslant x \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x < a \\ 0 \text{ se } a \leqslant x \end{cases}$

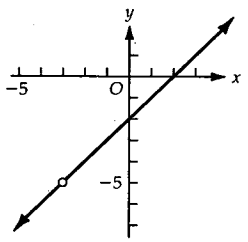


FIGURA 2.6-1

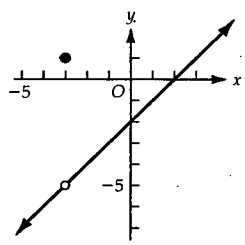


FIGURA 2.6-3

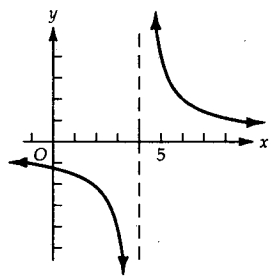


FIGURA 2.6-5

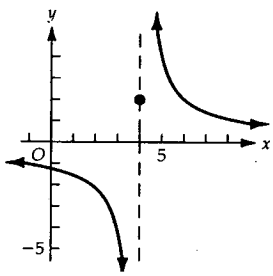


FIGURA 2.6-7

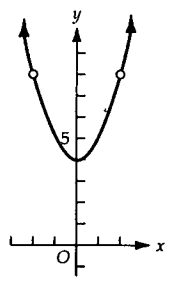


FIGURA 2.6-9

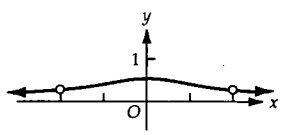


FIGURA 2.6-11

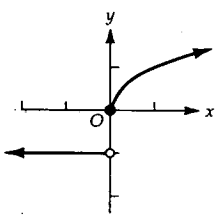


FIGURA 2.6-13

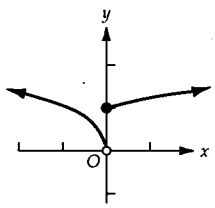


FIGURA 2.6-17

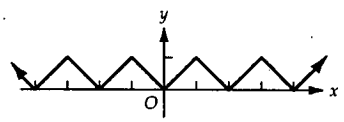


FIGURA 2.6-45

EXERCÍCIOS 2.7 (Página 112)

1. $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$; contínua em todos os números em $(-3, 3)$ **3.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; contínua em todos os números em $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ **5.** $(f \circ g)(x) = x^{3/2}$; contínua em todos os números positivos **7.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; contínua em todos os números exceto 2 **9.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$; contínua em todos números em $(2, +\infty)$ **11.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$; contínua em todos os números positivos exceto 4 **13.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{|x| - 1}}$; contínua em todos os números em $(-2, -1) \cup (1, 2)$

15. contínua; descontínua; descontínua; contínua; descontínua; contínua **17.** contínua; contínua; descontínua; contínua, descontínua; contínua **19.** contínua; contínua; contínua; contínua; descontínua **21.** contínua; descontínua; descontínua; descontínua; contínua **23.** contínua; contínua; contínua; contínua; descontínua; descontínua **25.** $[-3, 3]$ **27.** $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ **29.** $(2, +\infty)$ **31.** $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ **33.** $[-2, -1) \cup (1, 2]$ **35.** Veja Fig. 2.7-35 **37.** Veja Fig. 2.7-37 **39.** $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup (2, +\infty)$ **41.** (a) $V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x)$; (b) $[0, 4]$ **43.** (a) $A(x) = x(120 - x)$; (b) $[0, 120]$

(Esboços dos gráficos dos exercícios de 45 a 55 aparecem nas Figs. 2.7-45 a 2.7-55.)

45. $k = 5$ **47.** $c = -3$, $k = 4$ **49.** $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ **51.** $c = -4$ **53.** f é descontínua em -2 **55.** f é descontínua em 1

57. não; f será contínua em $[a, c]$ se $\lim_{x \to b} g(x)$ existir e for igual a $h(b)$ **59.** $\sqrt{10} - 3$

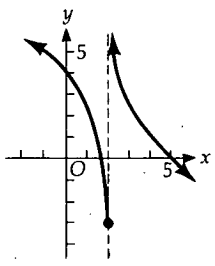


FIGURA 2.7-35

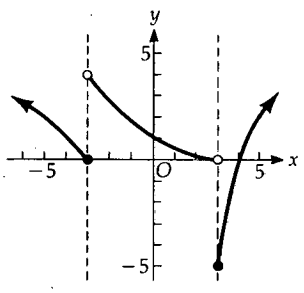


FIGURA 2.7-37

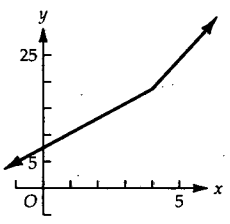


FIGURA 2.7-45

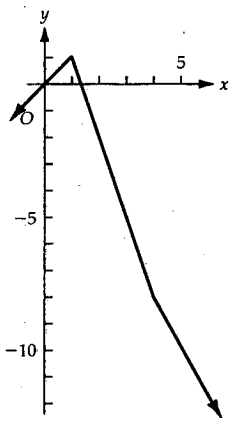


FIGURA 2.7-47

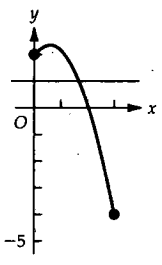


FIGURA 2.7-49

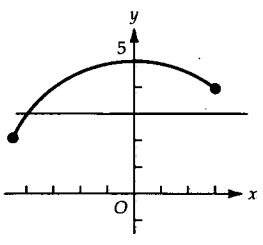


FIGURA 2.7-51

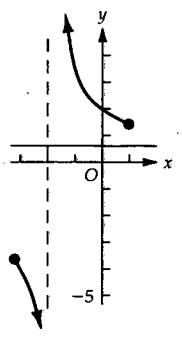


FIGURA 2.7-53

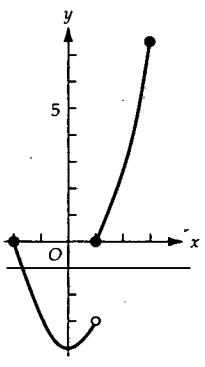


FIGURA 2.7-55

EXERCÍCIOS 2.8 (Página 122)

1. 4 **3.** $\frac{9}{7}$ **5.** $\frac{3}{5}$ **7.** $\frac{1}{9}$ **9.** 0 **11.** 0 **13.** 12 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $+\infty$ **19.** 0 **21.** 0 **23.** -1 **25.** 3 **27.** 0 **29.** -4 **31.** 1 **33.** 0

EXERCÍCIOS 2.9 (Página 130)

1. 1 **3.** -1 **5.** 1 **7.** 2 **9.** -2 **11.** $\sqrt{3}$ **13.** não

EXERCÍCIOS 2.10 (Página 134)

1. qualquer intervalo (a, b) onde $-2 < a < 3$ e $b > 3$ **3.** qualquer intervalo (a, b) onde $0 \leqslant a < 1$ e $b > 1$
5. qualquer intervalo (a, b) onde $a < -3$ e $-3 < b < 3$ **7.** qualquer intervalo (a, b) onde $-4 \leqslant a < 0$ e $b > 0$
9. (a) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; (b) (a, b) onde $a < k < b \leqslant -1$ ou $0 \leqslant a < k < b$ **11.** (a) todos os números no intervalo $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$; (b) (a, b) onde $-\frac{7}{2} \leqslant a < b \leqslant -2$ ou $-2 \leqslant a < b \leqslant \frac{3}{2}$ **13.** Veja Fig. 2.10-13 **15.** Veja Fig. 2.10-15

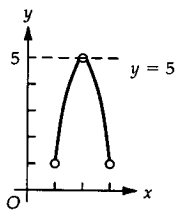


FIGURA 2.10-13

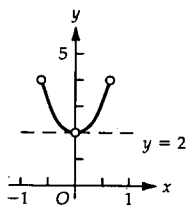


FIGURA 2.10-15

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2 (Página 135)

1. 9 **3.** -6 **5.** $\sqrt[3]{2}$ **7.** $-\frac{1}{6}$ **9.** $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ **11.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **13.** $\delta = \min(1, \frac{1}{9}\epsilon)$ **15.** $\delta = \min(1, \frac{1}{2}\epsilon)$ **17.** $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$ **19.** $-\frac{5}{2}$ **21.** 8
23. $\frac{1}{3}$ **25.** $-\infty$ **27.** $+\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** 3 **33.** $-\infty$ **35.** 0 **37.** $\frac{1}{3}$ **39.** $\frac{5}{2}$ **41.** 0 **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** $\dfrac{2}{3a^{1/3}}$ **47.** $-\frac{1}{2}$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 49 a 61 aparecem nas Figs. 2-49 a 2-61.)
49. $y = 1$, $x = 4$ **51.** $y = 1$, $x = 0$ **53.** $y = 5$, $x = 2$, $x = -2$ **55.** $y = 3$, $x = -4$ **57.** -2, 1; $f(-2)$ e $f(1)$ não existem
59. -2; $\lim_{x \to -2} g(x)$ não existe **61.** 0, 1; $h(0)$ não existe, $\lim_{x \to 1} h(x)$ não existe **63.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2}$; contínua em todos números em $(-5, 5)$

65. $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - |x|}}$; contínua em todos os números em $(-3, -2) \cup (2, 3)$

67. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } & x < -1 \\ 0 \text{ se } & x = -1 \\ -1 \text{ se } & -1 < x < 1 \\ 0 \text{ se } & x = 1 \\ 1 \text{ se } & x > 1 \end{cases}$; contínua em todos os números reais exceto -1 e 1

69. $[-5, 5]$ **71.** $(-3, -2] \cup [2, 3)$ **73.** $(-\infty, -4) \cup [-4, 4) \cup [4, +\infty)$ **75.** removível, $\frac{6}{5}$ **77.** essencial **79.** 0
81. Veja Fig. 2-81, $a = 10$, $b = -23$ **83.** (a) Veja Fig. 2-83; (b) todos os valores de a; (c) todos os não-inteiros

85. Veja Fig. 2-85. (a) sim; (b) não **87.** Veja a função sinal **89.** Veja Fig. 2-89, $c = \sqrt{7}$ **91.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$
95. 2 **97.** 3 **99.** (b) qualquer intervalo (a, b) onde $-2 \leqslant a < -\frac{3}{2} < b \leqslant \frac{3}{2}$

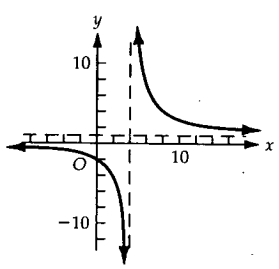


FIGURA 2-49

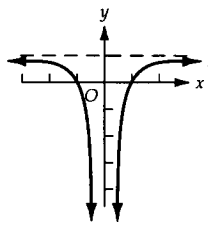


FIGURA 2-51

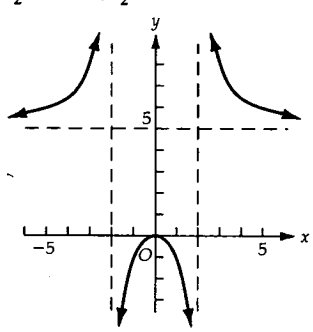


FIGURA 2-53

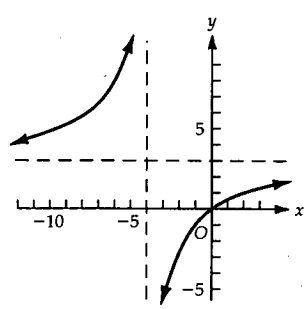


FIGURA 2-55

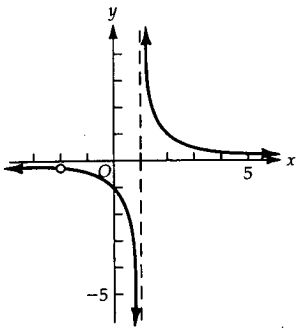


FIGURA 2-57

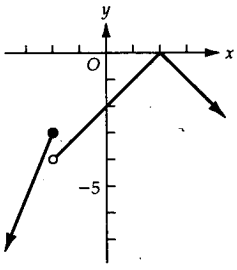


FIGURA 2-59

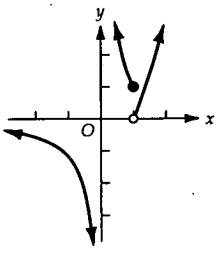


FIGURA 2-61

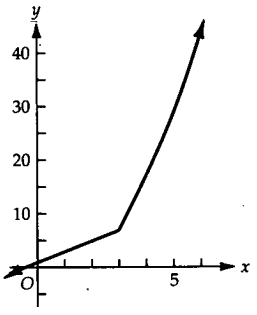


FIGURA 2-81

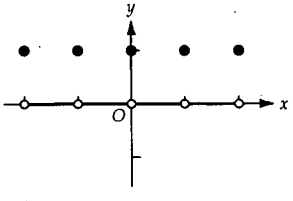


FIGURA 2-83

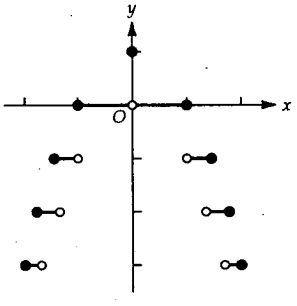


FIGURA 2-85

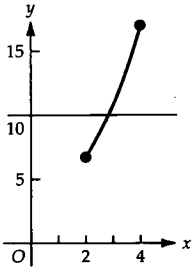


FIGURA 2-89

EXERCÍCIOS 3.1 (Página 147)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 11 aparecem nas Figs. 3.1-1 a 3.1-11.)

1. $-2x_1$ **3.** $-4x_1 + 4$ **5.** $3x_1^2$ **7.** $6x_1 - 12$ **9.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{4 - x_1}}$ **11.** $3x_1^2 - 12x_1 + 9$ **13.** $8x + y + 9 = 0$; $x - 8y + 58 = 0$

15. $6x - y - 16 = 0$; $x + 6y - 52 = 0$ **17.** $2x + 3y - 12 = 0$; $3x - 2y - 5 = 0$ **19.** $4x + y = 0$; $x - 4y = 0$ **21.** $8x - y - 5 = 0$

23. $4x + 4y - 11 = 0$ **25.** 7 **27.** 0 **29.** $-4x$ **31.** $-3x^2$ **33.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **35.** $\dfrac{-13}{(3x - 2)^2}$ **37.** $-\dfrac{2}{x^3} - 1$

39. (a) e (c) 7, 6,5, 6,1, 6,01, 6,001, 5, 5,5, 5,9, 5,99, 5,999; (b) e (d) 6 **41.** (a) e (c) 0,2361, 0,2426, 0,2485, 0,2498, 0,2499; 0,2679, 0,2583, 0,2515, 0,2502, 0,2500; (b) e (d) $\frac{1}{4}$ **43.** -10 **45.** $-\frac{3}{128}$ **47.** -12 **49.** $-\frac{1}{27}$ **51.** $-\frac{8}{x^3} + 3$ **53.** $-\dfrac{7}{2\sqrt{2 - 7x}}$

55. $\dfrac{1}{3x^{2/3}}$ **57.** $g(a)$ **61.** $2a$

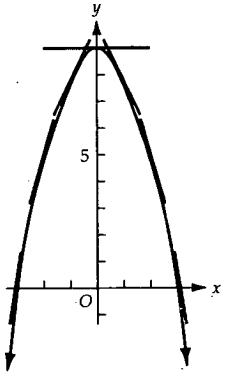


FIGURA 3.1-1

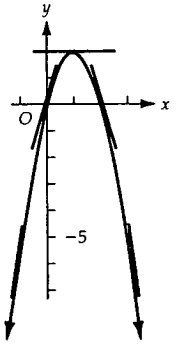


FIGURA 3.1-3

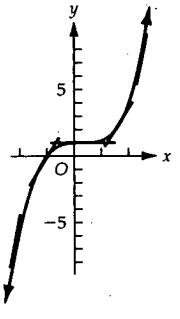


FIGURA 3.1-5

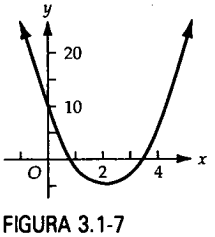


FIGURA 3.1-7

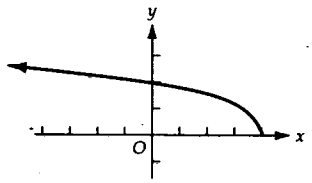


FIGURA 3.1-9

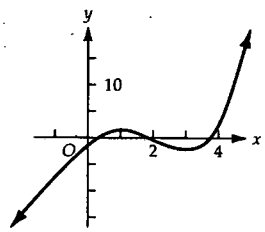


FIGURA 3.1-11

EXERCÍCIOS 3.2 (Página 155)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 27 aparecem nas Figs. 3.2-1 a 3.2-27.)
1. (b) sim; (c) 1, −1; (d) não **3.** (b) sim; (c) −1, 1; (d) não **5.** (b) sim; (c) 0, 1; (d) não **7.** (b) sim; (c) 0, 0; (d) sim **9.** (b)sim; (c) não existe, 0; (d) não **11.** (b) sim; (c) 8, 8; (d) sim **13.** (b) sim; (c) nem um nem outro existem; (d) não **15.** (b) sim; (c) −6, −6; (d) sim **17.** (b) não; (c) 1,0; (d) não **19.** (b) não; (c) 12, 12; (d) não **27.** (b) 0 **29.** (a) 3; (b) não **31.** $a = 8$, $b = -9$

33. Veja Fig. 3.2-33. (a) 0; (b) 1; (c) não existe **39.** (a) $I(x) = \begin{cases} 15x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 150 \\ 22{,}5x - 0{,}05x^2 & \text{se } 150 < x \leqslant 250 \end{cases}$ **41.** (a) $n > 1$; (b) $n > 1$

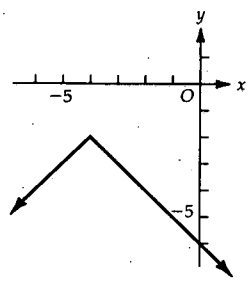


FIGURA 3.2-1

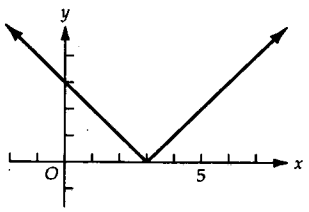


FIGURA 3.2-3

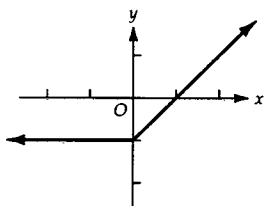


FIGURA 3.2-5

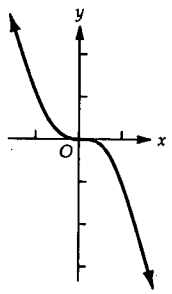


FIGURA 3.2-7

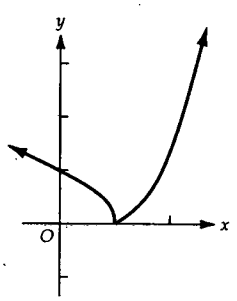


FIGURA 3.2-9

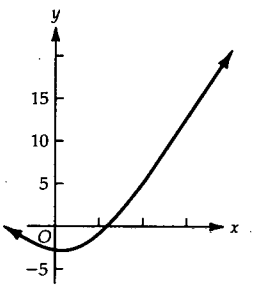


FIGURA 3.2-11

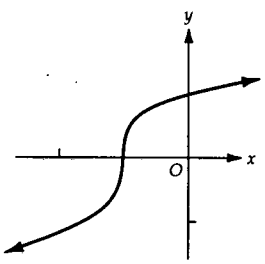


FIGURA 3.2-13.

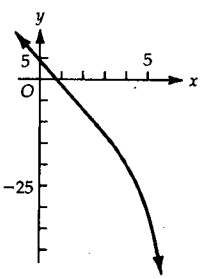


FIGURA 3.2-15

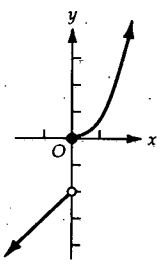


FIGURA 3.2-17

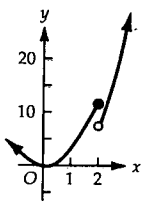


FIGURA 3.2-19

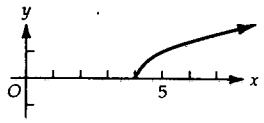


FIGURA 3.2-21

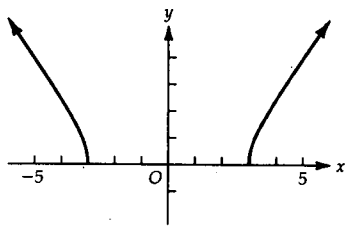


FIGURA 3.2-23

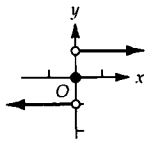


FIGURA 3.2-25

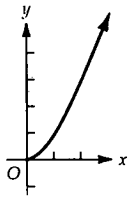


FIGURA 3.2-27

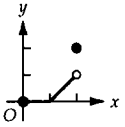


FIGURA 3.2-33

EXERCÍCIOS 3.3 (Página 162)

1. 7 **3.** $-2 - 2x$ **5.** $3x^2 - 6x + 5$ **7.** $x^7 - 4x^3$ **9.** $t^3 - t$ **11.** $4\pi r^2$ **13.** $2x + 3 - \frac{2}{x^3}$ **15.** $16x^3 + \frac{1}{x^5}$ **17.** $-\frac{6}{x^3} - \frac{20}{x^5}$
19. $3\sqrt{3}s^2 - 2\sqrt{3}s$ **21.** $70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$ **23.** $-18y^2(7 - 3y^3)$
25. $10x^4 - 24x^3 + 12x^2 + 2x - 3$ **27.** $-\frac{1}{(x-1)^2}$ **29.** $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ **31.** $\frac{5(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$ **33.** $\frac{48y^2}{(y^3+8)^2}$ **35.** $\frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$
37. $12x - y = 20$ **39.** $x + 20y + 96 = 0$ **41.** $2x - y = 3$ **43.** $x + 8y + 2 = 0$; $x + 8y - 2 = 0$ **45.** $28x - y = 99$; $4x - y = 3$
49. $2(3x + 2)(6x^2 + 2x - 3)$ **51.** $3(2x^2 + x + 1)^2(4x + 1)$

EXERCÍCIOS 3.4 (Página 171)

1. $v(t) = 6t$; 18 **3.** $v(t) = -\frac{1}{4t^2}$; -1 **5.** $v(t) = 6t^2 - 2t$; 8 **7.** $v(t) = \frac{8}{(4+t)^2}$; $\frac{1}{2}$ **9.** $t < -3$, move-se para a direita; $-3 < t < 1$, move-se para a esquerda; $t > 1$ move-se para a direita; muda de direção quando $t = -3$ e $t = 1$ **11.** $t < -2$, move-se para a direita; $-2 < t < \frac{1}{2}$, move-se para a esquerda; $t > \frac{1}{2}$, move-se para a direita; muda de direção quando $t = -2$ e $t = \frac{1}{2}$
13. $t < -3$, move-se para a esquerda; $-3 < t < 3$, move-se para a direita; $t > 3$, move-se para a esquerda; muda de direção quando $t = -3$ e $t = 3$
15. (a) -32 cm/s; (b) -64 cm/s; (c) 4 s; (d) -128 cm/s **17.** 160 cm/s **19.** (a) $(20t_1 + 24)$ cm/s; (b) $\frac{6}{5}$ s **21.** (a) 8,600; (b) 8,300; (c) 8,100; (d) 8,050; (e) 8 **25.** (a) $-2{,}9$ graus por hora, (b) -3 graus por hora **27.** (a) 18.750 litros por minuto; (b) 17.500 litros por minuto
29. (a) $C'(x) = 3 + 2x$; (b) \$83; (c) \$84 **31.** (a) $R'(x) = 600 - \frac{3}{20}x^2$; (b) \$540; (c) \$536,95 **33.** (a) \$3,6 milhões por ano; (b) 23,1 %; (c) \$6,8 milhões por ano; (d) 18,7 % **35.** (a) 920 pessoas por ano; (b) 6,1 %; (c) 1.400 pessoas por ano; (d) 6,4 %
37. (a) lucrativo; (b) não-lucrativo; (c) 90

EXERCÍCIOS 3.5 (Página 180)

3. $3 \cos x$ **5.** $\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x$ **7.** $2(\cos t - t \operatorname{sen} t)$ **9.** $x \cos x$ **11.** $4 \cos 2x$ **13.** $-x^2 \operatorname{sen} x$ **15.** $3 \sec x(2 \operatorname{tg}^2 x + 1)$
17. $-\operatorname{cosec} y(2 \operatorname{cotg}^2 y + 1)$ **19.** $-\frac{2(z+1)\operatorname{sen} z + 2\cos z}{(z+1)^2}$ **21.** $\frac{1}{\cos x - 1}$ **23.** $\frac{1 - 4\sec t + \sec^2 t}{\cos t(\cos t - 4)^2}$ **25.** $\frac{2\cos y}{(1 - \operatorname{sen} y)^2}$
27. $(1 - \cos x)(x + \cos x) + (1 - \operatorname{sen} x)(x - \operatorname{sen} x)$ **29.** $-\frac{5 \operatorname{cosec} t \operatorname{cotg} t}{(\operatorname{cosec} t + 2)^2}$ **31.** 1 **33.** $-\frac{2}{\pi}$ **35.** π^2 **37.** 2 **39.** $\sqrt{2}$ **41.** $-\frac{10}{3}$
43. (a) 0,0226, 0,2674, 0,4559, 0,4956, 0,4995; 0,8188, 0,6915, 0,5424, 0,5043, 0,5006; (b) $\frac{1}{2}$ **45.** (a) 2,2305, 2,0203, 2,0020, 2,0002, 2,0000; 1,8237, 1,9803, 1,9980, 1,9998, 2,0000; (b) 2 **47.** (a) $-0{,}4771$, $-0{,}4886$, $-0{,}4977$, $-0{,}4989$, $-0{,}4998$; $-0{,}5224$, $-0{,}5113$, $-0{,}5023$, $-0{,}5011$, $-0{,}5002$; (b) $-\frac{1}{2}$ **49.** (a) 0,4929, 0,5736, 0,6468, 0,6567, 0,6647; 0,9116, 0,7770, 0,6872, 0,6768, 0,6687; (b) $\frac{2}{3}$ **51.** (a) $x - y = 0$; (b) $x - 2y + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = 0$; (c) $x + y - \pi = 0$ **53.** (a) $x - y = 0$; (b) $4x - 2y + 2 - \pi = 0$; (c) $4x - 2y - 2 + \pi = 0$
55. (a) 4 cos t; (b) $v(0) = 4$, $v(\frac{1}{3}\pi) = 2$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $v(\frac{2}{3}\pi) = -2$, $v(\pi) = -4$ **57.** (a) 3 sen t; (b) $v(0) = 0$, $v(\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 3$, $v(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\pi) = 0$ **59.** $\frac{\sqrt{2}}{9}$ W; (b) $2W$

EXERCÍCIOS 3.6 (Página 189)

1. $6(2x + 1)^2$ **3.** $8(x + 2)(x^2 + 4x - 5)^3$ **5.** $2(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)(8t^3 - 21t^2 + 2)$ **7.** $\frac{-4x}{(x^2+4)^3}$ **9.** $-12(\operatorname{sen} 3x + \cos 4x)$
11. $2 \sec 2x \operatorname{tg}^3 2x$ **13.** $2 \sec^2 x \operatorname{tg} x(2 \operatorname{tg}^2 x + 1)$ **15.** $4 \operatorname{cotg} t \operatorname{cosec}^2 t$ **17.** $6(3u^2 + 5)^2(3u - 1)(12u^2 - 3u + 5)$

19. $-2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-3}(12x-17)$ **21.** $10(r^2+1)^2(2r-1)(r+3)(2r^3+4r^2-r+1)$ **23.** $\dfrac{18(y-7)}{(y+2)^3}$

25. $-\dfrac{9(2x-1)^2(2x^2-2x+1)}{(3x^2+x-2)^4}$ **27.** $\dfrac{2z(z^2-5)^2(z^2+22)}{(z^2+4)^3}$ **29.** $6t\,\text{sen}(6t^2-2)$ **31.** $6(\text{tg}^2 x - x^2)^2(\text{tg}\,x\,\sec^2 x - x)$

33. $\dfrac{6\cos 2y(\text{sen}^2 2y+2)}{(\cos^2 2y+1)^2}$ **35.** $-12\cos 3x\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)$ **37.** $24x+y+39=0$; $y=0$; $y=1$; $y=0$; $24x-y-39=0$. Veja Fig. 3.6-37

39. (a) $\dfrac{8t(t^2-1)}{(t^2+1)^3}$ cm/s; (b) 0 cm/s; $\frac{48}{125}$ cm/s

41. (a) $(5\pi\cos\pi t - 3\pi\,\text{sen}\,\pi t)$ cm/s; (b) $\sqrt{2}\pi$ cm/s, 3π cm/s **43.** (a) $6.000\,\text{sen}\,\frac{12}{5}\pi \approx 1.854$; (b) 6.000 **45.** (a) $5\sqrt{3}$; (b) 10

47. 329 predadores/semana **49.** (a) $3x^4$; (b) $6x^5$ **55.** Veja Figura 9 na Secção 1.5. **57.** Veja Fig. 1.5-37

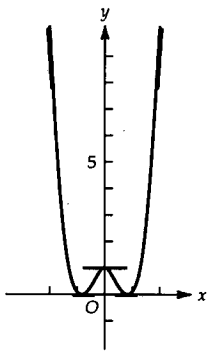


FIGURA 3.6-37

EXERCÍCIOS 3.7 (Página 194)

1. $x^{-1/2}(2-\frac{5}{2}x^{-1})$ **3.** $\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ **5.** $\dfrac{-2}{(5-3x)^{1/3}}$ **7.** $\dfrac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$ **9.** $-\dfrac{\text{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **11.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{r}}\,\text{cosec}^2\sqrt{3r}$ **13.** $-\dfrac{3\cos 3x}{2(\text{sen}\,3x)^{3/2}}$

15. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sec^2\sqrt{x^2+1}$ **17.** $\dfrac{17}{2[(2x-5)(3x+1)^3]^{1/2}}$ **19.** $\dfrac{6x^2-10x+1}{3(2x^3-5x^2+x)^{2/3}}$ **21.** $\dfrac{1}{\sqrt{2r}}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)$

23. $\frac{1}{4}x(5-x^2)^{-1/2}(x^3+1)^{-3/4}(-7x^3+15x-4)$ **25.** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ **27.** $\dfrac{\cos t}{(1-\text{sen}\,t)^{3/2}(1+\text{sen}\,t)^{1/2}}$ **29.** $\dfrac{\sec\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}(\text{tg}^2\sqrt{y}+\sec^2\sqrt{y})$

31. $\dfrac{x+5}{6\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^4}}$ **33.** $\dfrac{-1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}\sqrt{9-x}}}$ **35.** $\dfrac{\text{sen}\,4z}{(1+\cos^2 2z)^{3/2}}$ **37.** $2x+3y=6$; $2\sqrt[3]{4}x+3y=3\sqrt[3]{4}$; $x=1$; $2\sqrt[3]{4}x-3y=\sqrt[3]{4}$; $2x-3y+2=0$ **39.** $4x-5y+9=0$ **41.** $x+4y=0$ **43.** (a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) nenhum valor de t

45. (a) 50 centavos por litro; (b) 25 **47.** 100 **49.** 2,7 km/min **51.** $\dfrac{2x(x^2-4)}{|x^2-4|}$ **53.** $3x|x|$

EXERCÍCIOS 3.8 (Página 198)

1. $-\dfrac{x}{y}$ **3.** $\dfrac{8y-3x^2}{3y^2-8x}$ **5.** $-\dfrac{y^2}{x^2}$ **7.** $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **9.** $\dfrac{x-xy^2}{x^2y-y}$ **11.** $\dfrac{3x^2-4xy-1}{2x^2+2}$ **13.** $\dfrac{y^{2/3}+y}{24x^{2/3}y^{5/3}-x}$ **15.** $\dfrac{y+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$

17. $\dfrac{2+5x^2-4x^{3/2}y}{2x^{1/2}(x^2+3)}$ **19.** $\dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y)-1}$ **21.** $\dfrac{\text{tg}\,x\sec^2 x}{\text{cotg}\,y\,\text{cosec}^2 y}$ **23.** $\dfrac{y\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,y}{x\cos y+\cos x}$ **25.** $\dfrac{2\,\text{tg}\,x\sec^2 x+\text{cosec}^2(x-y)}{2\,\text{tg}\,y\sec^2 y+\text{cosec}^2(x-y)}$

27. $\dfrac{3x^2-4y}{4x-3y^2}$ **29.** $\dfrac{3x^2-y^3}{x^3-6xy}$ **31.** $\dfrac{x^3+8y^3}{4x^3-3x^2y}$ **33.** $2x+y=4$ **35.** $5x-7y+11=0$ **37.** -1 **39.** $(1,0)$, $(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$

41. (a) $f_1(x) = 2\sqrt{x-2}$, domínio: $x \geqslant 2$; $f_2(x) = -2\sqrt{x-2}$, domínio: $x \geqslant 2$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-41(a)-(c); (d) $f_1'(x) = (x-2)^{-1/2}$, domínio: $x > 2$; $f_2'(x) = -(x-2)^{-1/2}$, domínio: $x > 2$; (e) $\frac{2}{y}$; (f) $x - y - 1 = 0$; $x + y - 1 = 0$ **43.** (a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, domínio: $|x| \geqslant 3$; $f_2(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$, domínio: $|x| \geqslant 3$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-43(a)-(c); (d) $f_1'(x) = x(x^2 - 9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$; $f_2'(x) = -x(x^2 - 9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$; (e) $\frac{x}{y}$; (f) $5x + 4y + 9 = 0$; $5x - 4y + 9 = 0$ **45.** (a) $f_1(x) = \sqrt{8 - x^2 + 2x} + 2$, domínio: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; $f_2(x) = -\sqrt{8 - x^2 + 2x} + 2$, domínio: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-45(a)-(c); (d) $f_1'(x) = (1 - x)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$; $f_2'(x) = (x - 1)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$; (e) $\frac{1 - x}{y - 2}$; (f) $y - 5 = 0$, $y + 1 = 0$

47. (a) decrescente a 11,2 nós; (b) crescente a 34,9 nós **49.** $\sqrt{3}x - y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$; $\sqrt{3}x + y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

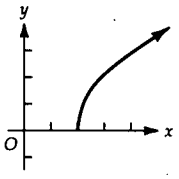


FIGURA 3.8-41(a)

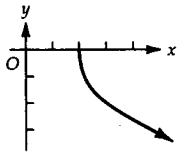


FIGURA 3.8-41(b)

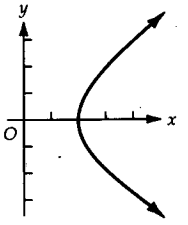


FIGURA 3.8-41(c)

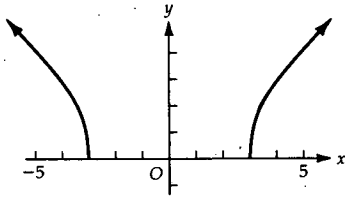


FIGURA 3.8-43(a)

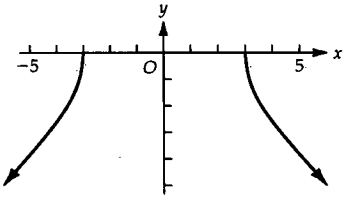


FIGURA 3.8-43(b)

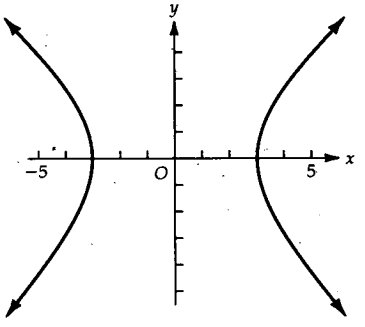


FIGURA 3.8-43(c)

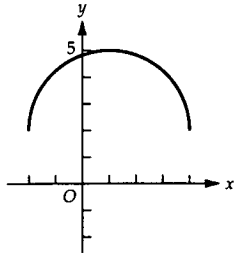


FIGURA 3.8-45(a)

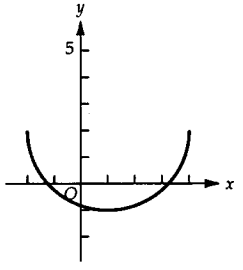


FIGURA 3.8-45(b)

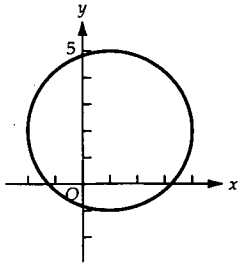


FIGURA 3.8-45(c)

EXERCÍCIOS 3.9 (Página 204)

1. -3 **3.** -2 **5.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **7.** $-\frac{3}{4}$ **9.** $\frac{9}{5}$ m/s **11.** $\frac{1}{2\pi}$ cm/min **13.** $\frac{5}{8\pi}$ m/min **15.** $\frac{25}{3}$ m/s **17.** $0{,}001\pi$ cm^3/dia **19.** $0{,}004\pi$ cm^2/dia **21.** $\frac{6}{25\pi}$ m/min **23.** 100 kg/m^2 por minuto. **25.** 128π cm^2/s **27.** 14 m/s **29.** \$1.020 por semana **31.** 875 unidades por mês **33.** decrescente à taxa de 55 camisas por semana **37.** 22 m^3/min **39.** $\frac{1}{194}(3\sqrt{97} + 97)$ m/s $\approx$ 0,65 m/s **41.** $\frac{200}{3}$ m/s **43.** decrescente à taxa de $\frac{1}{48}$ rad/s

EXERCÍCIOS 3.10 (Página 211)

1. $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$; $f''(x) = 20x^3 - 12x$ 3. $g'(s) = 8s^3 - 12s^2 + 7$; $g''(s) = 24s^2 - 24s$ 5. $f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - 5$; $f''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$
7. $f'(x) = x(x^2 + 1)^{-1/2}$; $f''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2}$ 9. $f'(t) = -8t \operatorname{sen} t^2$; $f''(t) = -16t^2 \cos t^2 - 8 \operatorname{sen} t^2$
11. $G'(x) = -2 \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x$; $G''(x) = 2 \operatorname{cosec}^2 x(3 \operatorname{cotg}^2 x + 1)$ 13. $g'(x) = \dfrac{8x}{(x^2 + 4)^2}$; $g''(x) = \dfrac{32 - 24x^2}{(x^2 + 4)^3}$
15. $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$ 17. $24x$ 19. $1.152(2x - 1)^{-5}$ 21. $108 \sec^2 3x(3 \operatorname{tg}^2 3x + 1)$ 23. $-32(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$
29. $-\dfrac{3a^4x^2}{y^7}$ 31. $-\frac{7}{4}$; 5 33. $v = 3t^2 - 18t + 15$; $a = 6t - 18$; quando $0 < t < 1$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é decrescente e a aceleração é decrescente; quando $1 < t < \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21})$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é decrescente e a aceleração é crescente; quando $\frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}) < t < 3$, a partícula está à esquerda da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é decrescente e a aceleração é crescente; quando $3 < t < 5$, a partícula está à esquerda da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é crescente e a aceleração é decrescente; quando $5 < t < \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21})$, a patícula está à esquerda da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é crescente e a aceleração é crescente; quando $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) < t$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é crescente e a aceleração é crescente. 35. $\frac{3}{2}$ s; $\frac{7}{4}$ m; $-\frac{1}{4}$ m/s
37. $\frac{1}{2}$ s; $\frac{249}{80}$ m; $-\frac{11}{8}$ m/s 39. $\frac{3}{2}$ s; $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ m; $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ m/s 47. $f'(x) = 2|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; $f''(x) = 2\dfrac{|x|}{x}$, domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 49. $f'(x) = 4|x^3|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; $f''(x) = 12x|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ 51. $f'''(x) = 24|x|$
53. $h''(x) = (f'' \circ g)(x)(g'(x))^2 + (f' \circ g)(x)g''(x)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3 (Página 212)

1. $15x^2 - 14x + 2$ 3. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{x^3}$ 5. $x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$ 7. $60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$ 9. $\dfrac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$ 11. $4(2s^3 - 3s + 7)^3(6s^2 - 3)$
13. $\dfrac{1 - 2x^3}{3x^{2/3}(x^3 + 1)^{4/3}}$ 15. $x(4x^2 - 13)(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}$ 17. $(x + 1) \operatorname{sen} x + x \cos x$ 19. $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \sec^2 \dfrac{1}{x}$
21. $\dfrac{2(1 + t^2) \sec^2 t \operatorname{tg} t - 2t \sec^2 t}{(1 + t^2)^2}$ 23. $-3 \operatorname{sen} 3w \cos(\cos 3w) + 6 \operatorname{sen} 4w$ 25. $\dfrac{8x}{3y^2 - 8y}$ 27. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}(x - \sqrt{x^2 - 1})}$ 29. $\dfrac{\cos x \cos y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$
31. $2x + 3[x^3 + (x^4 + x)^2]^2[3x^2 + 2(x^4 + x)(4x^3 + 1)]$ 33. $\dfrac{y - \sec^2 x}{\sec^2 y - x}$ 35. $x - 2y + 9 = 0$; $27x - 54y - 7 = 0$ 37. $5x - 4y - 6 = 0$; $4x + 5y - 13 = 0$ 39. $(-1, 0)$ 41. $-3(3 - 2x)^{-5/2}$ 43. $x < -3$ ou $x > -1$ 45. (a) $t = 3$, $t = 8$; (b) quando $t = 0$, $v = 24$, e a partícula está se movendo para a direita; quando $t = 3$, $v = -15$, e a partícula está se movendo para a esquerda; quando $t = 8$, $v = 40$, e a partícula está se movendo para a direita 47. $v^2 = 4(5 - s)(s - 3)$; $a = 16 - 4s$ 49. (a) 32 m/s; (b) 256 m; (c) 7 s; (d) -128 m/s
51. (a) 8,005; (b) 8 53. (a) 3.312,2; (b) 3.212,5 55. $-\frac{1}{3}$ 57. $\dfrac{2}{\sqrt{4x - 3}}$ 59. $\frac{1}{2}$ 61. $2(|x + 1| - |x|)\left(\dfrac{x + 1}{|x + 1|} - \dfrac{x}{|x|}\right)$
63. (a) Veja Fig. 3-63; (b) contínua em 3; (c) não-derivável em 3 65. (a) Veja Fig. 3-65; (b) 0; (c) 0 67. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$
69. (a) $C'(x) = 2x + 40$; (b) \$80; (c) \$81 71. 648 peixes/semana 77. 10,6 nós 79. $\dfrac{512}{625\pi}$ cm/s $\approx$ 0,26 cm/s 81. 9,6 m/s
85. $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ 89. não; se $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$, então f e g são deriváveis em 0; de qualquer modo, $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f \circ g$ não é derivável em 0

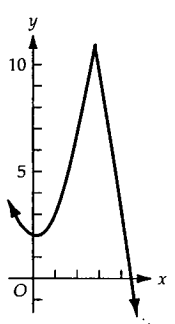


FIGURA 3-63

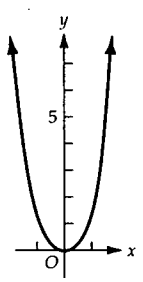


FIGURA 3-65

EXERCÍCIOS 4.1 (Página 223)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 21 a 57 que aparecem nas Figs. 4.1-21 a 4.1-57.)
1. $-5, \frac{1}{3}$ **3.** $-3, -1, 1$ **5.** $0, 2$ **7.** $-2, 0, 2$ **9.** não tem números críticos **11.** não tem números críticos **13.** $\frac{1}{6}k\pi$, quando k é um inteiro qualquer **15.** $\frac{1}{8}(2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer **17.** $\frac{1}{4}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer **19.** $-1, \frac{1}{5}, 2$ **21.** mín. abs.: $f(2) = -2$ **23.** não tem extremos abs. **25.** mín. abs.: $f(-\frac{2}{3}\pi) = -1$; máx. abs.: $f(0) = 2$ **27.** mín. abs.: $f(-3) = 0$ **29.** mín. abs.: $h(5) = 1$ **31.** mín. abs.: $F(4) = 1$ **33.** mín. abs.: $g(0) = 2$ **35.** máx. abs.: $f(5) = 2$ **37.** mín. abs.: $f(2) = 0$ **39.** mín. abs.: $g(0) = 1$ **41.** mín. abs.: $g(-3) = -46$; máx. abs.: $g(-1) = -10$ **43.** mín. abs.: $f(-2) = 0$; máx. abs.: $f(-4) = 144$ **45.** mín. abs.: $f(2) = 0$; máx. abs.: $f(3) = 25$ **47.** mín. abs.: $f(-\frac{1}{2}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{2}\pi) = 2$ **49.** não tem extremos abs. **51.** mín. abs.: $f(-1) = -1$; máx. abs.: $f(2) = \frac{1}{2}$ **53.** mín. abs.: $f(1) = -2$; máx. abs.: $f(0) = -\frac{1}{3}$ **55.** mín. abs.: $F(-3) = -13$; máx. abs.: $F(3) = 7$ **57.** mín. abs.: $f(-1) = 0$; máx. abs.: $f(1) = \sqrt[3]{4}$

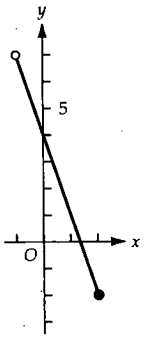


FIGURA 4.1-21

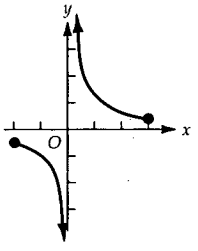


FIGURA 4.1-23

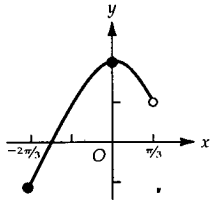


FIGURA 4.1-25

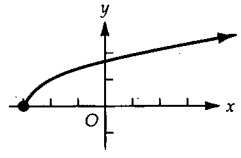


FIGURA 4.1-27

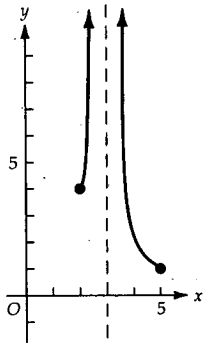


FIGURA 4.1-29

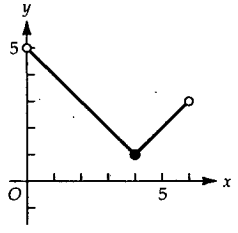


FIGURA 4.1-31

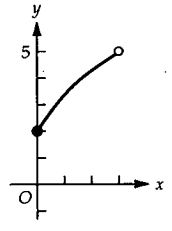


FIGURA 4.1-33

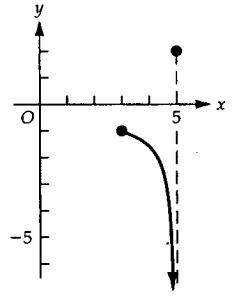


FIGURA 4.1-35

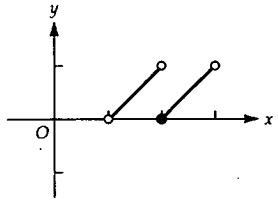


FIGURA 4.1-37

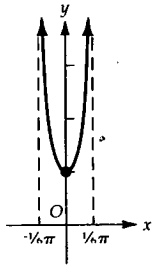


FIGURA 4.1-39

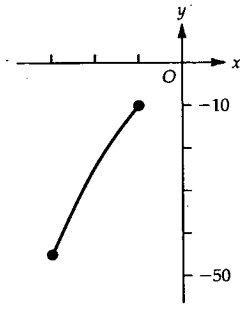


FIGURA 4.1-41

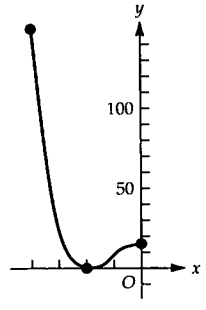


FIGURA 4.1-43

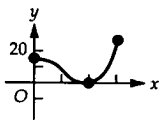


FIGURA 4.1-45

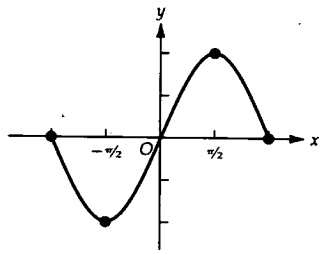


FIGURA 4.1-47

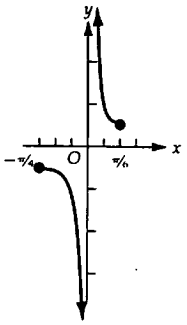


FIGURA 4.1-49

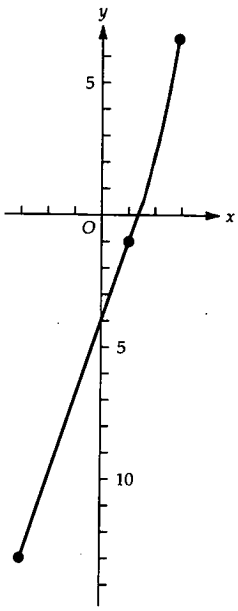


FIGURA 4.1-55

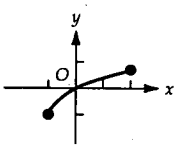


FIGURA 4.1-51

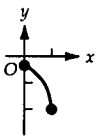


FIGURA 4.1-53

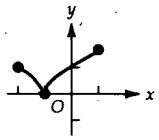


FIGURA 4.1-57

EXERCÍCIOS 4.2 (Página 229)

1. $\frac{5}{3}$ cm **3.** 60 m por 60 m **5.** 60 m por 120 m **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $12\sqrt{3}$ unidades quad. **11.** de A a P a C, onde P fica a 8 km abaixo de B **13.** de A a P a C, onde P fica a 4 km rio abaixo de B **15.** $\frac{1}{4}\pi$ **17.** 225 **19.** 400 **21.** 30 **23.** o raio é $3\sqrt{2}$ cm, a altura é $6\sqrt{2}$ cm. **25.** $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{100}{3}$ cm **27.** (a) $\sqrt{50 - 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} - 3)$ unidades $\approx$ 3,4 unidades; (b) $\sqrt{50 + 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} + 3)$ unidades $\approx$ 9,4 unidades **29.** $\frac{2}{3}k$ **33.** a largura é $48\sqrt{3}$ cm; a espessura é $48\sqrt{6}$ cm **35.** (a) o raio da circunferência é $\frac{5}{\pi + 4}$ m e a extensão do lado do quadrado é $\frac{10}{\pi + 4}$ m; (b) o raio da circunferência é $\frac{5}{\pi}$ m e não há quadrado

EXERCÍCIOS 4.3 (Página 235)

1. 2 **3.** $\frac{1}{4}\pi$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{8}{27}$ **9.** 0 **11.** (b) (i), (ii), (iii) satisfeitas; (c) $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6})$ **13.** (b) (i) não satisfeita **15.** (b) (ii) não satisfeita **17.** 4 **19.** $\cos c = \frac{2}{\pi}$; $c \approx 0{,}8807$ **21.** (i) não satisfeita **23.** (ii) não satisfeita **29.** $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS 4.4 (Página 240)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 39 aparecem nas Figs. 4.4-1 a 4.4-39.)
1. (a) e (b) $f(2) = -5$, mín. rel.; (c) $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, 2]$ **3.** (a) e (b) $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, máx. rel.; $f(1) = -1$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-\frac{1}{3}, 1]$ **5.** (a) e (b) $f(0) = 2$, máx. rel.; $f(3) = -25$, mín. rel.; (c) $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$; (d) $[0, 3]$ **7.** (a) e (b) f tem um valor máx. rel. de 4 se $x = (4k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer; f tem um valor mín. rel. de -4 se $x = (4k + 3)\pi$ onde k é um inteiro qualquer; (c) $[(4k - 1)\pi, (4k + 1)\pi]$, onde k é um inteiro qualquer; (d) $[(4k + 1)\pi, (4k + 3)\pi]$, onde k é um inteiro qualquer **9.** (a) e (b) $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(1) = \frac{1}{4}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; (c) $[0, 1]$, $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ **11.** (a) e (b) $f(-2) = -\frac{1}{15}$, máx. rel.; $f(-1) = -\frac{23}{15}$, mín. rel.; $f(1) = \frac{53}{15}$, máx. rel.; $f(2) = \frac{31}{15}$ mín. rel.; (c) $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, +\infty)$; $[-2, -1]$, $[1, 2]$ **13.** (a) e (b) não tem extremos rel.; (c) $(0, +\infty)$; (d) em nenhum intervalo **15.** (a) e (b) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, mín. rel.; (c) $(-\infty, 0)$, $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$; (d) $(0, \sqrt[3]{2}]$ **17.** (a) e (b) $f(\frac{1}{5}) = \frac{3.456}{3.125}$, máx. rel.; $f(1) = 0$, mín. rel.; (c) $(-\infty, \frac{1}{5}]$, $[1, +\infty)$; (d) $[\frac{1}{5}, 1]$ **19.** (a) e (b) $f(2) = 4$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 2]$; (d) $[2, 3]$

21. (a) e (b) $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(1) = -2$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-1, 1]$ **23.** (a) e (b) $f(4) = 2$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 4]$; (d) $[4, +\infty)$ **25.** (a) e (b) $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$, mín. rel.; (c) $[\frac{1}{8}, +\infty)$; (d) $(-\infty, \frac{1}{8}]$ **27.** (a) e (b) f tem um valor máx. rel. de $-\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; f tem um valor mín. rel. de $\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; (c) $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}k\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro qualquer; (d) $[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro qualquer **29.** (a) e (b) $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-1, 1]$ **31.** (a) e (b) $f(-2) = 5$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -2]$, $[0, +\infty)$; (d) $[-2, 0]$ **33.** (a) e (b) $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; $f(2) = 5$, máx. rel.: (c) $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$; (d) $[-1, 0]$, $[2, +\infty)$ **35.** (a) e (b) $f(-9) = -8$, mín. rel.; $f(-7) = -4$, máx. rel.; $f(-4) = -5$, mín. rel.; $f(0) = -3$, máx. rel.; $f(2) = -7$, mín. rel.; (c) $[-9, -7]$, $[-4, 0]$, $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, -9]$, $[-7, -4]$, $[0, 2]$ **37.** (a) e (b) não tem extremos rel.; (c) $[0, +\infty)$; (d) em nenhum intervalo **39.** (a) e (b) $f(4) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$, máx. rel.; (c) $(-4, 4]$; (d) $(-\infty, -4)$, $[4, +\infty)$ **43.** $a = -3$, $b = 7$ **45.** $a = -2$, $b = 9$, $c = -12$, $d = 7$

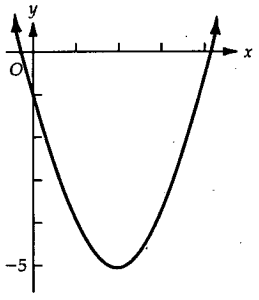


FIGURA 4.4-1

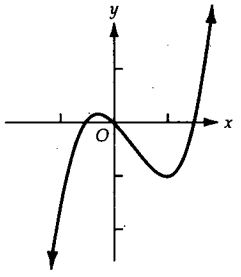


FIGURA 4.4-3

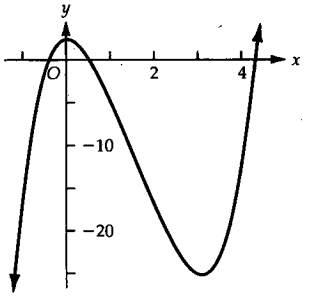


FIGURA 4.4-5

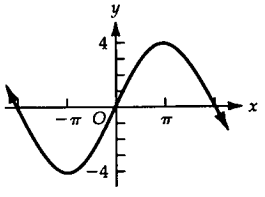


FIGURA 4.4-7

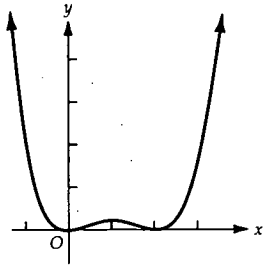


FIGURA 4.4-9

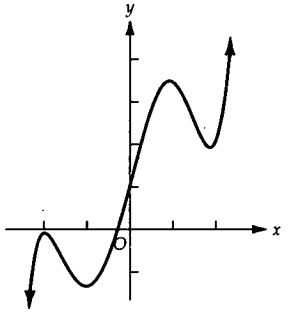


FIGURA 4.4-11

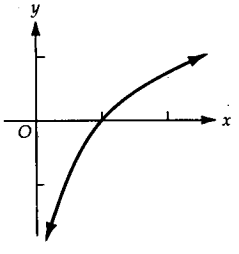


FIGURA 4.4-13

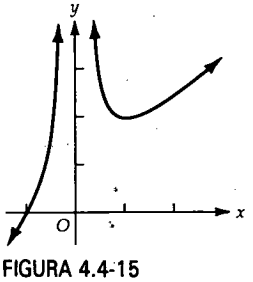


FIGURA 4.4-15

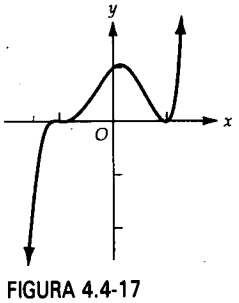


FIGURA 4.4-17

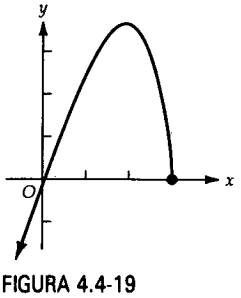


FIGURA 4.4-19

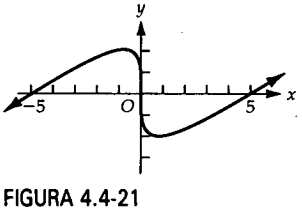


FIGURA 4.4-21

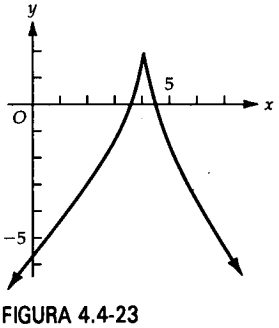


FIGURA 4.4-23

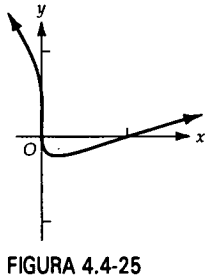


FIGURA 4.4-25

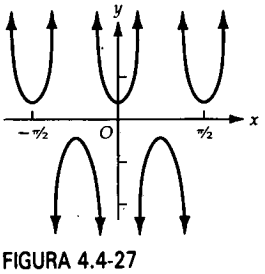


FIGURA 4.4-27

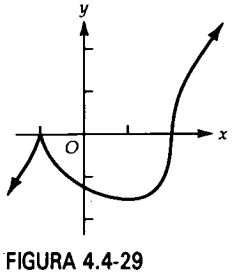


FIGURA 4.4-29

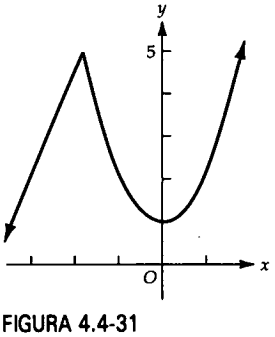


FIGURA 4.4-31

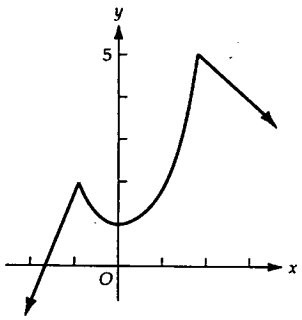


FIGURA 4.4-33

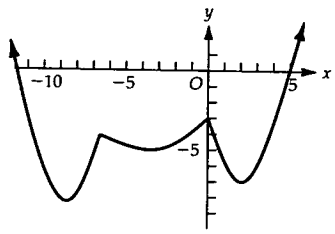


FIGURA 4.4-35

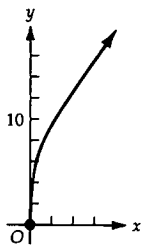


FIGURA 4.4-37

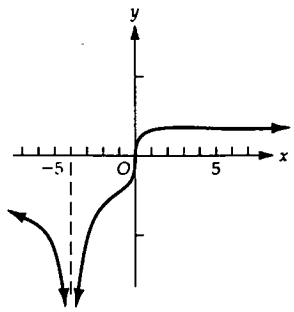


FIGURA 4.4-39

EXERCÍCIOS 4.5 (Página 248)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 23 aparecem nas Figs. 4.5-1 a 4.5-23.)
1. (0, 0); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **3.** $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$; côncavo para baixo para $x < -\frac{1}{2}$; côncavo para cima para $x > -\frac{1}{2}$ **5.** (0, 0), (4, −256); côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 4$; côncavo para baixo para $0 < x < 4$ **7.** (1, 0); côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$ **9.** (−2, 0); côncavo para cima para $x < -2$; côncavo para baixo para $x > -2$ **11.** $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$; côncavo para cima para $x < -1$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $-1 < x < 1$ **13.** $(-\frac{2}{3}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{3}\pi, 0)$, (0, 0), $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{2}{3}\pi, 0)$; côncavo para cima para $-\pi < x < -\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi < x < 0$ e $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$; côncavo para baixo para $-\frac{2}{3}\pi < x < -\frac{1}{3}\pi$, $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ e $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$ **15.** (0, 0); côncavo para baixo para $-\pi < x < 0$; côncavo para cima para $0 < x < \pi$
17. não tem pt. de infl.; côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **19.** (0, 0); côncavo para cima para $x < 0$; côncavo para baixo para $x > 0$ **21.** (0, 0); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **23.** (2, 3); côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **25.** $a = -1$, $b = 3$ **27.** $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 3$
29. (a) $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ onde k é um inteiro qualquer; (b) −1 em $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ se k for um inteiro par, 1 em $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ se k for um inteiro ímpar **31.** $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$, onde k é um inteiro qualquer; −1 em todos os pts. de infl.
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 33 a 47 aparecem nas Figs. 4.5-33 a 4.5-47.)
49. sim **51.** 10h40 da manhã.

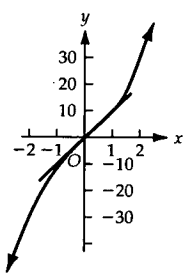


FIGURA 4.5-1

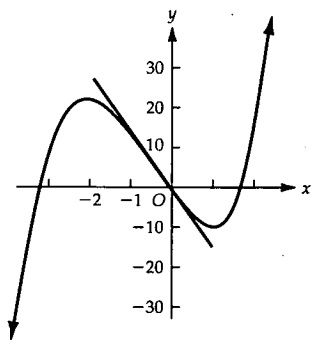


FIGURA 4.5-3

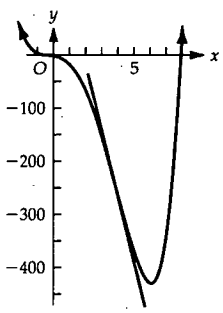


FIGURA 4.5-5

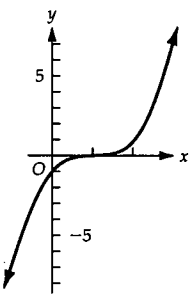


FIGURA 4.5-7

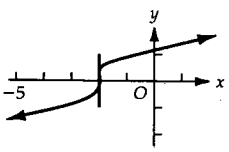


FIGURA 4.5-9

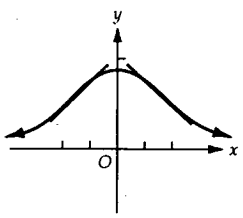


FIGURA 4.5-11

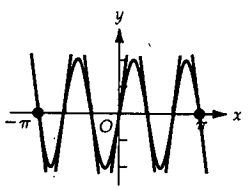


FIGURA 4.5-13

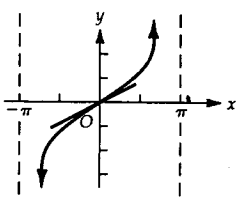


FIGURA 4.5-15

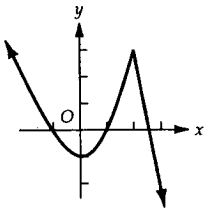


FIGURA 4.5-17

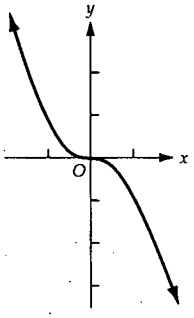


FIGURA 4.5-19

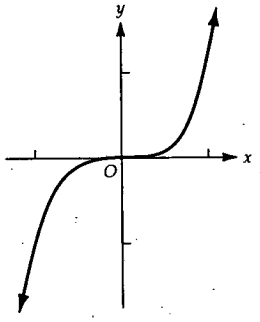


FIGURA 4.5-21

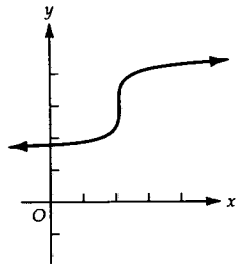


FIGURA 4.5-23

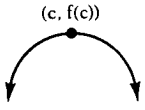


FIGURA 4.5-33

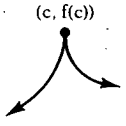


FIGURA 4.5-35

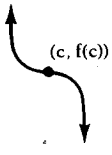


FIGURA 4.5-37

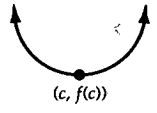


FIGURA 4.5-39

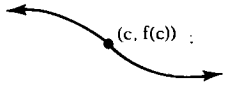


FIGURA 4.5-41

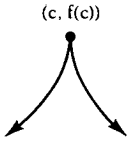


FIGURA 4.5-43

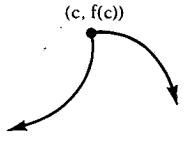


FIGURA 4.5-45

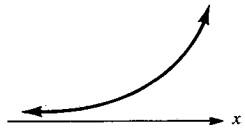


FIGURA 4.5-47

EXERCÍCIOS 4.6 (Página 253)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 25 aparecem nas Figs. 4.6-1 a 4.6-25.)
1. $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **3.** $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$, máx. rel.; $f(-1) = -11$, mín. rel.; $(\frac{1}{4}, \frac{37}{8})$, ponto de infl.; côncavo para cima para $x < \frac{1}{4}$; côncavo para baixo para $x > \frac{1}{4}$ **5.** $g(0) = 3$, máx. rel.; $g(2) = \frac{5}{3}$, mín. rel.; $(1, \frac{7}{3})$, ponto de infl.; côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$ **7.** $f(4) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **9.** $h(-\frac{3}{4}) = -\frac{99}{256}$, mín. rel.; $h(0) = 0$, máx. rel.; $h(1) = -\frac{5}{6}$, mín. rel.; pontos de infl. em $x = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{37})$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{12}(1 - \sqrt{37})$ e $x > \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{12}(1 - \sqrt{37}) < x < \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$ **11.** $F(\frac{1}{3}\pi) = -1$, mín. rel.; $F(0) = 1$, máx. rel.; $(\frac{1}{6}\pi, 0)$, ponto de infl.; côncavo para baixo para $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{6}\pi$; côncavo para cima para $\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ **13.** $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{16}$, mín. rel.; $(-2, 0), (-1, -1)$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < -2$ e $x > -1$; côncavo para baixo para $-2 < x < -1$ **15.** $f(1) = 8$, mín. rel.; $(3, \frac{16}{3}\sqrt{3})$, ponto de infl.; côncavo para cima para $0 < x < 3$; côncavo para baixo para $x > 3$ **17.** $h(-2) = -2$, mín. rel.; côncavo para cima para $x > -3$ **19.** $F(27) = 9$, máx. rel.; $(0, 0), (216, 0)$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 216$; côncavo para baixo para $0 < x < 216$ **21.** $f(-1) = -2$, mín. rel.; $f(1) = 2$, máx. rel.; $(0, 0), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{7}{8}\sqrt{2}), (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{8}\sqrt{2})$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$; côncavo para baixo para $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **23.** $f(0) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **25.** não tem extremos rel.; $(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi), (-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi), (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, pontos de infl.; côncavo para baixo para $-2\pi < x < -\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; côncavo para cima para $-\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ **27.** $\cos k\pi = 1$, onde k é qualquer inteiro par, máx. rel.; $\cos k\pi = -1$, onde k é qualquer inteiro ímpar, mín. rel. **29.** $\operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = 1$, onde k é qualquer inteiro, mín. rel.; $\operatorname{cosec}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi) = -1$, onde k é qualquer inteiro, máx. rel.

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 31 a 35 aparecem nas Figs. 4.6-31 a 4.6-41.)
43. f tem um mín. rel. em $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e um máx. rel. em $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

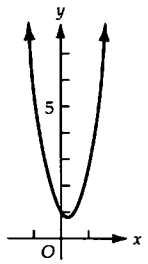


FIGURA 4.6-1

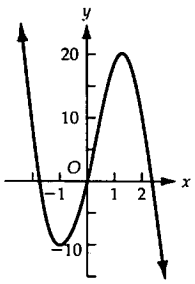


FIGURA 4.6-3

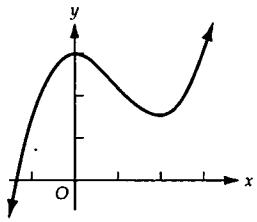


FIGURA 4.6-5

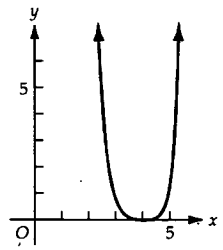


FIGURA 4.6-7

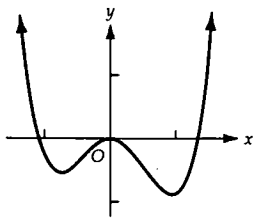


FIGURA 4.6-9

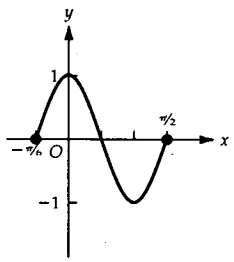


FIGURA 4.6-11

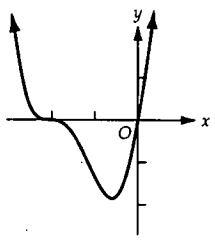


FIGURA 4.6-13

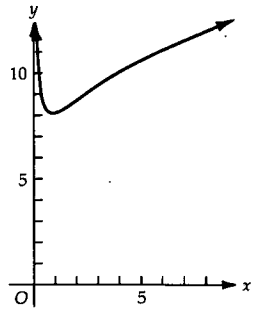


FIGURA 4.6-15

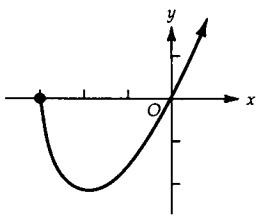


FIGURA 4.6-17

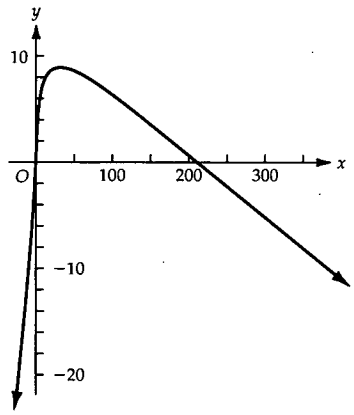


FIGURA 4.6-19

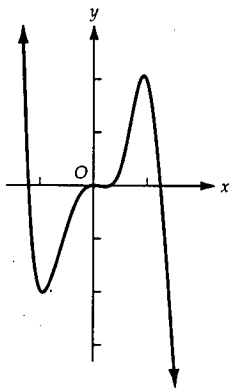


FIGURA 4.6-21

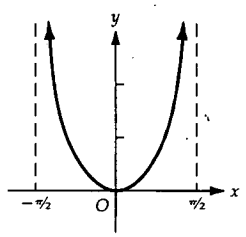


FIGURA 4.6-23

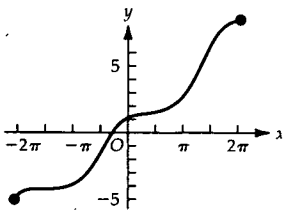


FIGURA 4.6-25

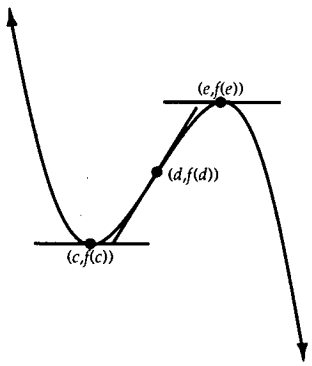


FIGURA 4.6-31

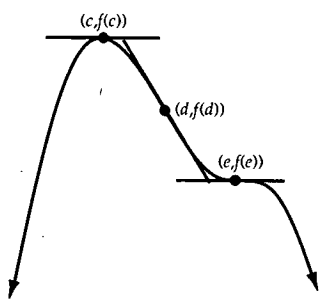


FIGURA 4.6-33

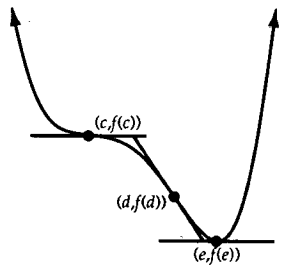


FIGURA 4.6-35

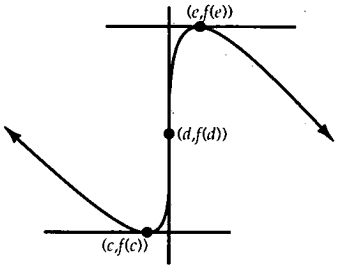


FIGURA 4.6-37

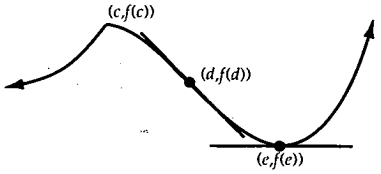


FIGURA 4.6-39

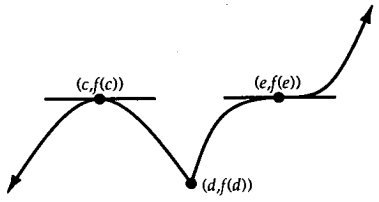


FIGURA 4.6-41

EXERCÍCIOS 4.7 (Página 259)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 57 aparecem nas Figs. 4.7-1 a 4.7-57.)

1. $x = 1, y = x + 1$ **3.** $x = 3, y = x + 3$ **5.** $x = -2, y = x - 6$ **7.** $x = 0, y = x + 2$ **9.** $f(-1) = 5$, máx. rel.; $f(1) = -3$, mín. rel.; (0, 1), ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; decrescente em $[-1, 1]$; côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **11.** $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$, mín. rel.; (0, 0), (1, −1), pontos de infl.; crescente em $[\frac{3}{2}, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, \frac{3}{2}]$ côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $0 < x < 1$ **13.** $f(-3) = 5$, máx rel.; $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{121}{27}$, mín. rel.; $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{27})$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -3]$ e $[-\frac{1}{3}, +\infty)$; decrescente em $[-3, -\frac{1}{3}]$; côncavo para baixo para $x < -\frac{5}{3}$; côncavo para cima para $x > -\frac{5}{3}$ **15.** $f(0) = 1$, mín. rel.; $(\frac{1}{2}, \frac{23}{16})$, (1, 2), pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{2}$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $\frac{1}{2} < x < 1$ **17.** $f(-1) = \frac{7}{12}$, mín. rel.; $f(0) = 1$, máx. rel.; $f(2) = -\frac{5}{3}$, mín. rel.; pontos de infl. em $x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[0, 2]$; crescente em $[-1, 0]$ e $[2, +\infty)$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7})$ e $x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$ **19.** $f(0) = 2$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima em toda parte **21.** $f(0) = 0$, mín. rel., não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima em toda parte **23.** não tem extremos relativos; (0, 0) ponto de infl. com tangente horizontal; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$; côncavo para cima em $(0, +\infty)$ **25.** não tem extremos relativos; (2, 0) ponto de infl.; decrescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **27.** $f(\frac{4}{5}) = \frac{26.244}{3.125}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; pontos de infl. em $(-1, 0)$ e $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$; crescente em $(-\infty, \frac{4}{5}]$ e $[2, +\infty)$; decrescente em $[\frac{4}{5}, 2]$; côncavo para baixo para $x < -1$ e $\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$; côncavo para cima para $-1 < x < \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$ e $x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$ **29.** $f(-\frac{4}{3}) = \frac{256}{81}$, máx. rel.; $f(0) = 0$, mín. rel.; $(-1, 2)$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ e $[0, +\infty)$; decrescente em $[-\frac{4}{3}, 0]$; côncavo para baixo para $x < -1$; côncavo para cima para $x > -1$ **31.** $f(-\frac{1}{2}\pi) = -3$, mín. rel.; $f(0) = 3$, máx. rel.; $f(\frac{1}{2}\pi) = -3$, mín. rel.; $(-\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, pontos de infl.; decrescente em $[-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ e $[0, \frac{1}{2}\pi]$; crescente em $[-\frac{1}{2}\pi, 0]$ e $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; côncavo para baixo para $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$; côncavo para cima para $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ **33.** $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $[0, \frac{1}{2}\pi)$ e $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; côncavo para baixo para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ **35.** não tem extremos relativos; (0, 0), ponto de infl; crescente $(-\pi, \pi)$; côncavo para baixo para $-\pi < x < 0$; côncavo para cima para $0 < x < \pi$; $x = -\pi$ e $x = \pi$ são assíntotas **37.** $f(-\frac{7}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $f(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $f(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $(-\frac{5}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(\frac{7}{4}\pi, 0)$, pontos de infl.; crescente em $[-2\pi, -\frac{7}{4}\pi]$, $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ e $[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]$; decrescente em $[-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi]$ e $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$; côncavo para baixo para $-2\pi < x < -\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$; côncavo para cima para $-\frac{5}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ **39.** $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(2) = 4$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, 0]$ e $[2, +\infty)$; decrescente em $[0, 1)$ e $(1, 2]$; côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$; $x = 1$ e $y = x + 1$ são assíntotas **41.** $f(0) = -1$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0]$; decrescente em $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -1$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $-1 < x < 1$; $y = 1, x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas **43.** $f(-1) = -1$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, (0, 0) e $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; crescente em $[-1, 1]$; côncavo para baixo para $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$; côncavo para cima para $-\sqrt{3} < x < 0$ e $x > \sqrt{3}$; $y = 0$ é uma assíntota **45.** $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[1, +\infty)$; crescente em $[0, 1]$; côncavo para baixo para $x < 0$ e $x > 0$ **47.** $f(1) = -1$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 1]$; crescente em $[1, +\infty)$; côncavo para cima para todo x **49.** não tem extremos relativos; (3, 2), ponto de infl.; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x > 3$; côncavo para cima para $x < 3$ **51.** não tem extremos relativos; (3, 2), ponto de infl. com tangente horizontal; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$ **53.** $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(\frac{16}{5}) = \frac{512}{125}\sqrt{5}$, máx. rel.; ponto de infl. em $x = \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$; decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[\frac{16}{5}, 4]$; crescente em $[0, \frac{16}{5}]$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6}) < x < 4$ **55.** $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, -\frac{2}{3}]$; decrescente em $[-\frac{2}{3}, 0]$; côncavo para baixo para $x < 0$ **57.** $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; (2, 0), ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; decrescente em $[-1, 1]$; côncavo para cima para $x < -1$ e $-1 < x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$

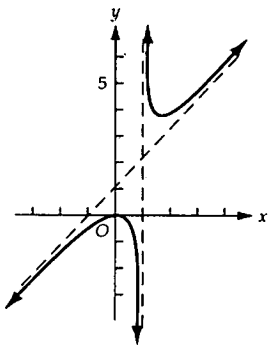


FIGURA 4.7-1

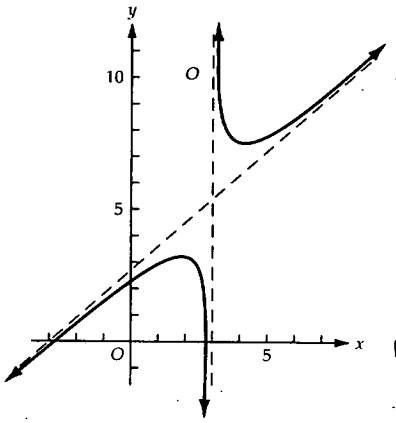


FIGURA 4.7-3

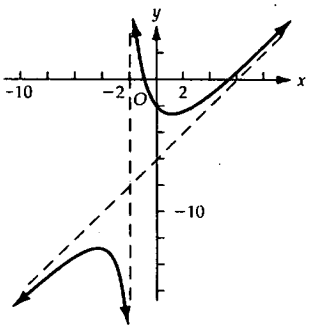


FIGURA 4.7-5

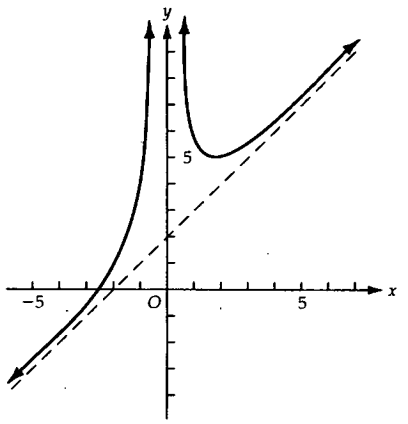


FIGURA 4.7-7

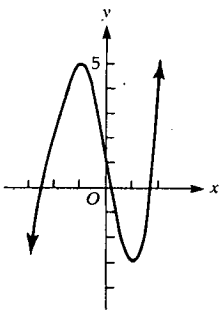


FIGURA 4.7-9

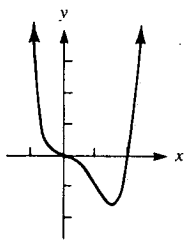


FIGURA 4.7-11

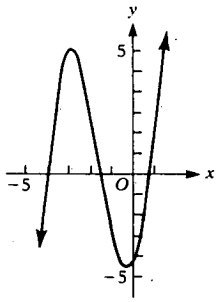


FIGURA 4.7-13

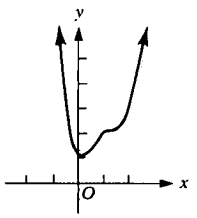


FIGURA 4.7-15

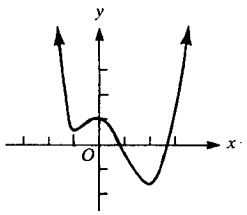


FIGURA 4.7-17

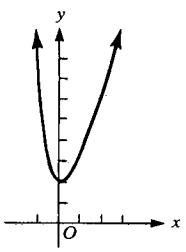


FIGURA 4.7-19

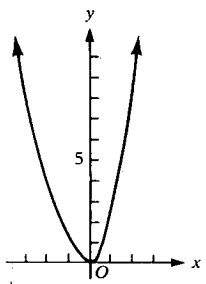


FIGURA 4.7-21

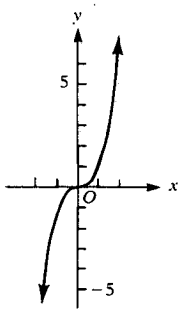


FIGURA 4.7-23

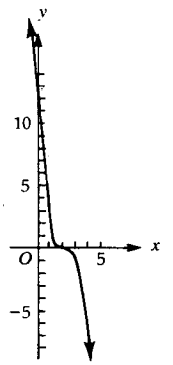


FIGURA 4.7-25

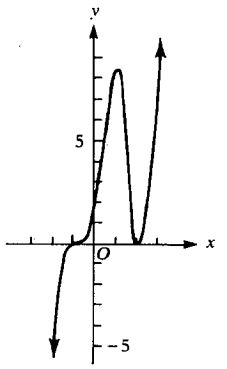


FIGURA 4.7-27

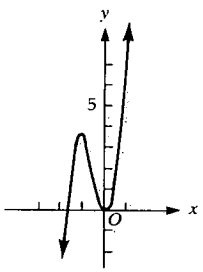


FIGURA 4.7-29

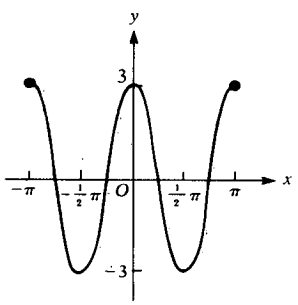


FIGURA 4.7-31

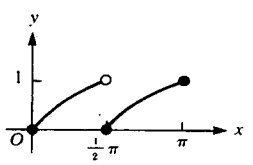


FIGURA 4.7-33

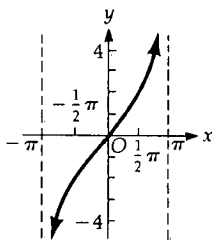


FIGURA 4.7-35

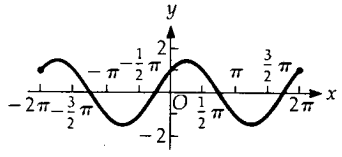


FIGURA 4.7-37

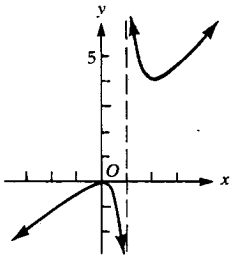


FIGURA 4.7-39

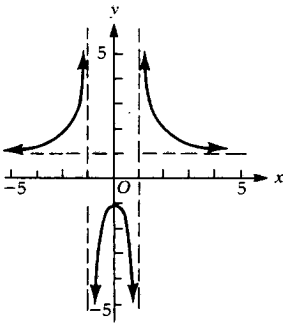


FIGURA 4.7-41

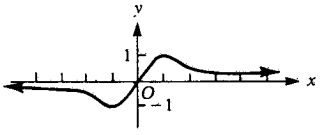


FIGURA 4.7-43

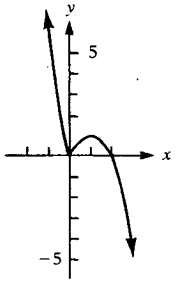


FIGURA 4.7-45

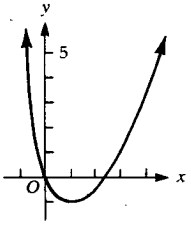


FIGURA 4.7-47

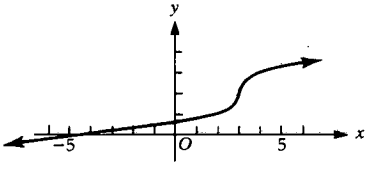


FIGURA 4.7-49

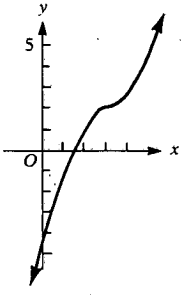


FIGURA 4.7-51

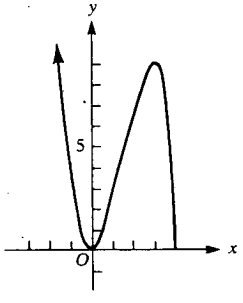


FIGURA 4.7-53

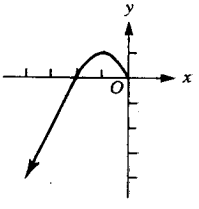


FIGURA 4.7-55

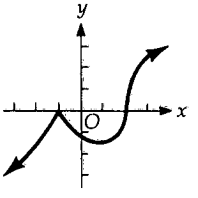


FIGURA 4.7-57

EXERCÍCIOS 4.8 (Página 267)

1. $f(0) = 0$, mín. abs. **3.** não existe **5.** $g(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, mín. abs. **7.** não existe **9.** $f(-2) = -13$, mín. abs.
11. $g(-1) = -2$, máx. abs. **13.** $f(0) = 0$, mín. abs.; $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{18}\sqrt{3}$, máx. abs. **15.** $f(-\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3}$, mín. abs. **17.** 45 m × 60 m
19. 6 cm × 9 cm **21.** 12 cm × 4 cm × 6 cm **23.** $2x - y + 1 = 0$ **25.** 1 mês; 7,5% **27.** altura $4\sqrt[3]{4}$ cm; raio, $\sqrt[3]{4}$ cm
29. 40 unidades **31.** \$ 1.500 **33.** $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$
35. raio do semicírculo, $\frac{10}{4+\pi}$ m; altura do retângulo, $\frac{10}{4+\pi}$ m **37.** 90 km/h **39.** $\frac{36}{25}$ s **41.** $5\sqrt{5}$ m **43.** $\sqrt{2}$ **45.** $2\sqrt{2}$ **47.** $\frac{4}{3}a$

EXERCÍCIOS 4.9 (Página 276)

1. 4; 5 **3.** $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; $\sqrt[3]{10} - 2 \approx 0{,}154$ **5.** (a) $(-3-4x)\,\Delta x - 2(\Delta x)^2$; (b) $(-3-4x)\,\Delta x$; (c) $-2(\Delta x)^2$
7. (a) $(3x^2 - 2x)\,\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; (b) $(3x^2 - 2x)\,\Delta x$; (c) $(3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

9. (a) $\dfrac{-2\Delta x}{(x-1)(x+\Delta x-1)}$; (b) $\dfrac{-2\Delta x}{(x-1)^2}$; (c) $\dfrac{2(\Delta x)^2}{(x-1)^2(x+\Delta x-1)}$ **11.** (a) 0,0309; (b) 0,03; (c) 0,0009
13. (a) $\frac{1}{42} \approx 0{,}0238$; (b) $\frac{1}{40} = 0{,}025$; (c) $-\frac{1}{840} \approx -0{,}0012$ **15.** (a) $-0{,}875$; (b) $-1{,}5$; (c) 0,625 **17.** $3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)\,dx$

19. $\frac{(14x^2 + 18x)\,dx}{3(2x + 3)^{2/3}}$ **21.** $\frac{(1 - 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x)\,dx}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}$ **23.** $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x(2 \operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx$ **25.** $-\frac{3x}{4y}$ **27.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

29. 1 **31.** (a) $dx = 4t\,dt$, $dy = 3\,dt$; (b) $\frac{3}{4t}$; (c) $\frac{9}{4y}$ **33.** (a) $dx = -2 \operatorname{sen} t\,dt$, $dy = 3 \cos t\,dt$; (b) $-\frac{3 \cos t}{2 \operatorname{sen} t}$; (c) $-\frac{9x}{4y}$

35. (a) 6,75 cm^3; (b) 0,3 cm^2 **37.** $\frac{12}{5}\pi$ m^3 **39.** $0{,}4\pi$ cm^2 **41.** $0{,}\dot{9}\pi$ cm^3 **43.** 4% **45.** 10 cm^3

EXERCÍCIOS 4.10 (Página 281)

1. 4,1179 **3.** −1,1673 **5.** 2,649 **7.** 0,507 **9.** −1,128 **11.** 1,73205 **13.** 1,81712 **15.** 0,7391 **17.** 0,8767
19. 2,0288, 4,9132 **21.** 3,14159

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4 (Página 282)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 31 aparecem nas Figs. 4-1 a 4-31.)
1. mín. abs.: $f(-5) = 0$ **3.** mín. abs.: $f(1) = -\frac{1}{2}$; máx. abs.: $f(2) = 64$ **5.** mín. abs.: $f(3) = 0$; máx. abs.: $f(0) = 9$
7. mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$; máx. abs.: $f(5) = 361$ **9.** mín. abs.: $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$ **11.** máx. abs.: $f(\frac{1}{12}) = \sqrt{3}$
13. $f(-2) = 0$, máx. rel.; $f(0) = -4$, mín. rel.; $(-1, -2)$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, -2]$ e $[0, +\infty)$; decrescente em $[-2, 0]$; côncavo para baixo para $x < -1$; côncavo para cima para $x > -1$
15. $f(\frac{8}{5}) = \frac{839{,}808}{3.125}$, máx. rel.; $f(4) = 0$, mín. rel.; ponto de inflexão em $x = -2$ e $x = \frac{1}{5}(8 \pm 3\sqrt{6})$; crescente em $(-\infty, \frac{8}{5}]$ e $[4, +\infty)$; decrescente em $[\frac{8}{5}, 4]$; côncavo para cima para $-2 < x < \frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6})$ e $x > \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$; côncavo para baixo para $x < -2$ e $\frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$ **17.** não tem extremos relativos, $(4, -3)$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para cima para $x < 4$; côncavo para baixo para $x > 4$ **19.** $f(0) = 0$, mín. rel.; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, pontos de inflexão; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < -\frac{1}{3}$ e $x > \frac{1}{3}$; côncavo para cima para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$; $y = \frac{4}{3}$ é uma assíntota
21. $f(0) = 0$, máx. rel.; não tem pontos de inflexão; crescente em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0]$; decrescente em $[0, 2)$ e $(2, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -2$ e $x > 2$; côncavo para baixo para $-2 < x < 2$; $y = 5$, $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas **23.** $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(6) = 12$, mín. rel.; não tem pontos de inflexão; crescente em $(-\infty, 0]$ e $[6, +\infty)$; decrescente em $[0, 3)$ e $(3, 6]$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$; $x = 3$ e $y = x + 3$ são assíntotas **25.** $f(1) = 0$, mín. rel.; não tem pontos de inflexão; decrescente em $(-\infty, 1]$; crescente em $[1, +\infty)$; côncavo para cima para x **27.** não tem extremos relativos; (3, 1), ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$ **29.** $f(-1) = 0$, mín. rel.; $f(0) = 9$, máx. rel.; $f(3) = 0$, mín. rel.; pontos de inflexão em $x = \pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[0, 3]$; crescente em $[-1, 0]$ e $[3, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -\frac{3}{5}\sqrt{5}$ e $x > \frac{3}{5}\sqrt{5}$; côncavo para baixo para $-\frac{3}{5}\sqrt{5} < x < \frac{3}{5}\sqrt{5}$ **31.** $f(-\frac{1}{8}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $f(\frac{3}{8}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $(\frac{1}{8}\pi, 0)$, ponto de inflexão; decrescente em $[-\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{8}\pi]$ e $[\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$; crescente em $[-\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi]$; côncavo para cima para $-\frac{3}{8}\pi < x < \frac{1}{8}\pi$; côncavo para baixo para $\frac{1}{8}\pi < x < \frac{5}{8}\pi$;
33. $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$ **35.** $-\frac{13}{4}$ **41.** $\sqrt{A^2 + B^2}$ **43.** ponto de inflexão em (0,2); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$
45. $a = 2$, $b = -6$, $c = 3$ **51.** 6,6 **55.** 20 cm × 20 cm × 10 cm **57.** $\sqrt[3]{2k}$ cm × $\sqrt[3]{2k}$ cm × $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ cm **59.** 1.500 **61.** 12 km do ponto a partir do banco próximo **65.** \$1.800 **67.** 25 radios; \$525
69. $\frac{3}{2}$ s; a velocidade da partícula movendo-se horizontalmente é de 1 cm/s; a velocidade da partícula movendo-se verticalmente é de 3 cm/s
71. $(h^{2/3} + w^{2/3})^{3/2}$ m **73.** 9 m × 18 m **75.** o raio é $\frac{3}{2}r$ cm e a altitude é $3h$ cm **77.** o arame deve ser cortado ao meio
79. 1.000; \$11 **81.** (a) −0,16; (b) −0,64 **83.** 2π cm^3 **85.** um erro de aproximadamente $\frac{\pi^2}{1.610t}$ s **91.** 1,168 **93.** 1,9622

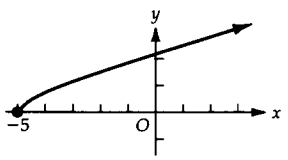


FIGURA 4-1

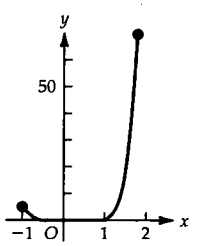


FIGURA 4-3

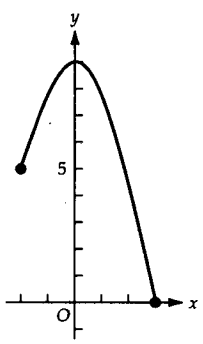


FIGURA 4-5

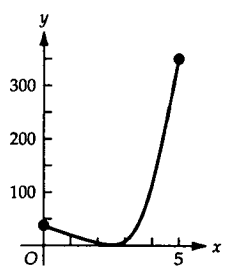


FIGURA 4-7

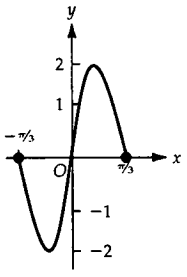


FIGURA 4-9

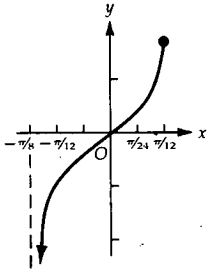


FIGURA 4-11

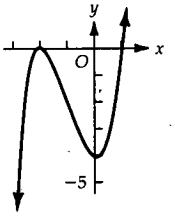


FIGURA 4-13

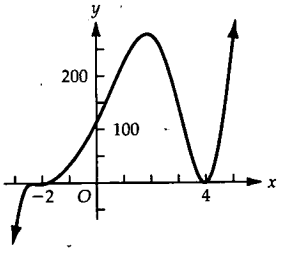


FIGURA 4-15

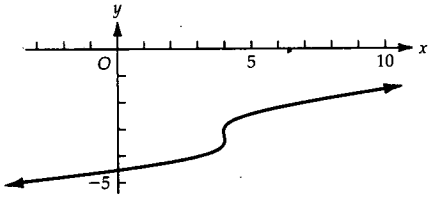


FIGURA 4-17

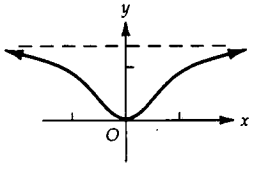


FIGURA 4-19

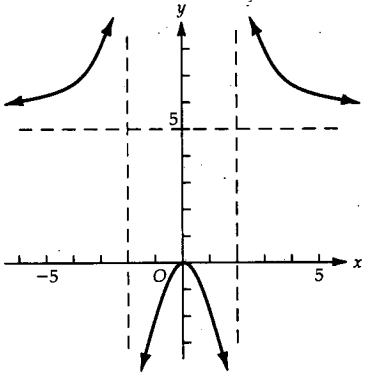


FIGURA 4-21

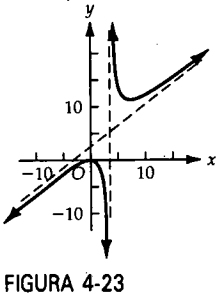


FIGURA 4-23

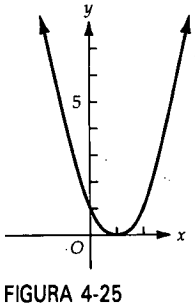


FIGURA 4-25

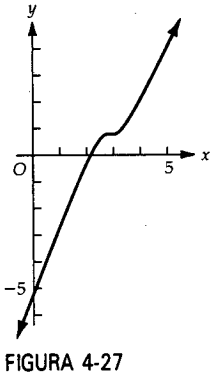


FIGURA 4-27

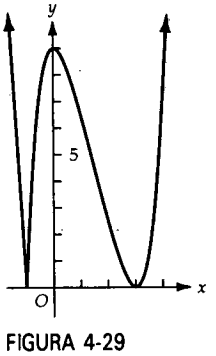


FIGURA 4-29

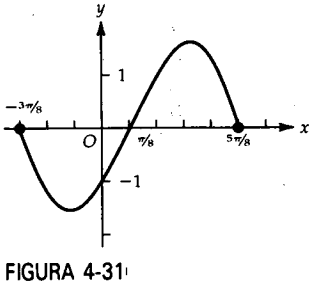


FIGURA 4-31

EXERCÍCIOS 5.1 (Página 294)

1. $\frac{3}{5}x^5 + C$ **3.** $-\frac{1}{2x^2} + C$ **5.** $2u^{5/2} + C$ **7.** $3x^{2/3} + C$ **9.** $\frac{9}{5}t^{10/3} + C$ **11.** $x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ **13.** $\frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$
15. $3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$ **17.** $\frac{8}{5}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$ **19.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ **21.** $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + C$
23. $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$ **25.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + C$ **27.** $\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **29.** $-3\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$
31. $\sec x + C$ **33.** $-4\operatorname{cosec} x + 2\operatorname{tg} x + C$ **35.** $-2\operatorname{cotg}\theta - 3\operatorname{tg}\theta + \theta + C$ **37.** $y = x^2 - 3x + 2$
39. $3y = -2x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ **41.** $12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27$ **43.** $C(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$
45. (a) $C(x) = 3x^2 + 8$; (b) \$800 **47.** (a) $R(x) = 15x - 2x^2$; (b) $p = 15 - 2x$ **49.** $117\pi\ \text{m}^3$ **51.** g não é diferenciável em $(-1, 1)$

EXERCÍCIOS 5.2 (Página 302)

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4y)^{3/2} + C$ **3.** $-\frac{3}{8}(6 - 2x)^{4/3} + C$ **5.** $\frac{1}{3}(x^2 - 9)^{3/2} + C$ **7.** $\frac{1}{33}(x^3 - 1)^{11} + C$ **9.** $-\frac{3}{8}(9 - 4x^2)^{5/3} + C$
11. $\frac{1}{32(1 - 2y^4)^4} + C$ **13.** $\frac{3}{11}(x - 2)^{11/3} + C$ **15.** $\frac{2}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$ **17.** $-\frac{2}{5}(1 - r)^{-5} + \frac{1}{3}(1 - r)^{-6} + C$
19. $-\frac{3}{4}(3 - 2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3 - 2x)^{7/2} + C$ **21.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta + C$ **23.** $-2\cos x^3 + C$ **25.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$

27. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec} 3y^2 + C$ **29.** $\frac{1}{6}(2 + \operatorname{sen} x)^6 + C$ **31.** $-2\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$ **33.** $-\frac{3}{2}(1 + \cos x)^{4/3} + C$ **35.** $-\frac{1}{3}\cos^3 t + C$

37. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + C$ **39.** $-\frac{1}{3}\sqrt{1 - 2\operatorname{sen} 3x} + C$ **41.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$ **43.** $-\frac{1}{4(3x^4 + 2x^2 + 1)} + C$

45. $\frac{3}{4}(3 - y)^{4/3} - 18(3 - y)^{1/3} + C$ **47.** $\frac{3}{5}(r^{1/3} + 2)^5 + C$ **49.** $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$ **51.** $\cos(\cos x) + C$

53. (a) $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C$; (b) $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + C$ **55.** (a) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C$; (b) $\frac{2}{3}(\sqrt{x} - 1)^3 + C$

57. (a) $\operatorname{sen}^2 x + C$; (b) $-\cos^2 x + C$; (c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **59.** $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x + 4} + \frac{38}{5}$ **61.** $p = \frac{4x + 22}{x + 5}$ **63.** $\frac{1}{6}$ coulombs

65. \$325 **67.** 3,1 μm^3

EXERCÍCIOS 5.3 (Página 310)

1. $y = 2x^2 - 5x + C$ **3.** $y = x^3 + x^2 - 7x + C$ **5.** $y = \frac{-2}{3x^2 + C}$ **7.** $2\sqrt{1 + u^2} = 3v^2 + C$ **9.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y + y = C$

11. $y = \frac{5x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$ **13.** $s = -\frac{1}{9}(\operatorname{sen} 3t + \cos 3t) + C_1t + C_2$ **15.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$

17. $4 \operatorname{sen} 3x + 6 \cos 2y + 7 = 0$ **19.** $u = 3v^4 + 4v^3 + 2v^2 + 2v$ **21.** $s = \frac{1}{3}(2t + 4)^{3/2} - \frac{8}{3}$

23. $v = 2 + 5t - t^2$, $s = 2t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$ **25.** $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 4$, $s = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 4t + 1$

27. $v = -2\sqrt{2} \operatorname{sen}(2t - \frac{1}{4}\pi)$, $s = \sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$ **29.** $1.600s = v^2 + 1.200$ **31.** $5s^2 + 4s = v^2 + 12$ **33.** (a) 4 s; (b) 20 m/s; (c) 2 s; (d) 20 m **35.** (a) $\sqrt{33} \approx 5{,}7$ s ; (b) $10\sqrt{33} \approx 57$ m/s **37.** (a) 6,6 s; (b) 65,7 m/s

39. (a) $v^2 = -20s + 1.600$; (b) 35,8 m/s **41.** $\frac{3}{2\pi}$ cm à direita da origem **43.** 1,62 m/s^2 **45.** (a) 3,47 s; (b) 48,22 m

47. 20 m/s ou 72 km/h **49.** $x^2 + 2y^2 = C$

EXERCÍCIOS 5.4 (Página 322)

1. 51 **3.** 147 **5.** 2.025 **7.** $\frac{73}{12}$ **9.** $\frac{63}{4}$ **11.** $\frac{7}{12}$ **13.** 10.400 **15.** $2^n - 1$ **17.** $\frac{100}{101}$ **19.** $n^4 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$

21. $\frac{8}{3}$ unidades quad. **23.** 15 unidades quad. **25.** $\frac{5}{3}$ unidades quad. **27.** 9 unidades quad. **29.** $\frac{3}{5}$ unidades quad. **31.** $\frac{17}{4}$ unidades quad.

33. $\frac{27}{4}$ unidades quad. **35.** $\frac{1}{2}m(b^2 - a^2)$ unidades quad. **37.** $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ unidades quad. **39.** 9 unidades quad. **41.** 15 unidades quad.

43. 9 unidades quad. **45.** 1,0349 unidades quad. **47.** 1,1682 unidades quad. **49.** 1,8530 unidades quad. **51.** 1,5912 unidades quad.

EXERCÍCIOS 5.5 (Página 330)

1. $\frac{247}{32}$ **3.** $\frac{1.469}{1.320}$ **5.** 0,835 **7.** $\frac{1}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})\pi$ **9.** 9 **11.** $\frac{8}{3}$ **13.** $\frac{15}{4}$ **15.** 66 **17.** 4 **19.** 20 unidades quad.

21. 44 unidades quad. **23.** $\frac{5}{3}$ unidades quad. **25.** $\frac{305}{6}$ unidades quad. **27.** $\frac{31}{4}$ unidades quad. **29.** 0,2672 **31.** 2,6725

33. $\int_0^2 x^2\,dx$ **35.** $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

EXERCÍCIOS 5.6 (Página 340)

1. 12 **3.** $4\sqrt{5}$ **5.** -5 **7.** 15 **9.** 0 **11.** -21 **13.** $-\frac{3}{2}$ **15.** $4 + \pi$ **17.** $\frac{33}{2}\pi$ **19.** [24, 56] **21.** [0, 64] **23.** [0, 27]

25. [0, 576] **27.** $[\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{12}\sqrt{3}\pi]$ **29.** [0, 6] **31.** $[-3, \frac{3}{2}]$ **33.** $[-3\sqrt{3}\pi, 0]$ **35.** $\geqslant$ **37.** $\leqslant$

EXERCÍCIOS 5.7 (Página 343)

1. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **3.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{30}$ **5.** $-2 + \sqrt{21}$ **7.** 0 **17.** O valor médio é $\frac{1}{2}$ em $x = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{2}{\pi}$; 0,69 **21.** $v = 32t$; 32 **23.** π

EXERCÍCIOS 5.8 (Página 351)

1. 12 3. 36 5. $\frac{3}{2}$ 7. $\frac{3}{16}$ 9. $\frac{134}{3}$ 11. -8 13. 1 15. $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$ 17. $2 - \sqrt[3]{2}$ 19. $\frac{104}{5}$ 21. $\frac{29}{2}$ 23. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
25. $\frac{256}{15}$ 27. $\frac{5}{6}$ 29. $\frac{6.215}{12}$ 31. $\frac{11}{6}$ 33. 0 35. $\frac{3}{2}$ 37. $\sqrt{4 + x^6}$ 39. $-\sqrt{\text{sen } x}$
41. $\frac{2}{3 + x^2}$ 43. $3x^2\sqrt[3]{x^6 + 1}$ 45. 1 47. O valor médio é 6 em $x = \sqrt{3}$ 49. 27 51. $\frac{4}{\pi}$ 55. $\frac{188}{3}$

EXERCÍCIOS 5.9 (Página 359)

1. $\frac{32}{3}$ unidades quad. 3. $\frac{22}{3}$ unidades quad. 5. $\frac{52}{3}$ unidades quad. 7. $\frac{343}{6}$ unidades quad. 9. 1 unidade quad. 11. 1 unidade quad.
13. $\frac{32}{3}$ unidades quad. 15. $\frac{32}{3}$ unidades quad. 17. $\frac{1}{6}$ unidades quad. 19. $\frac{12}{5}$ unidades quad. 21. $\frac{9}{2}$ unidades quad.
23. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ unidades quad. 25. $\frac{5}{12}$ unidades quad. 27. $\frac{27}{10}$ unidades quad. 29. $\frac{64}{3}$ unidades quad. 31. $\frac{253}{12}$ unidades quad.
33. $\frac{37}{12}$ unidades quad. 35. $(\sqrt{2} - 1)$ unidades quad. 37. $\frac{7}{3}$ unidades quad. 39. 12 unidades quad. 41. $\frac{128}{5}$ unidades quad.
43. 64 unidades quad. 45. $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades quad. 47. $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad. 49. $\frac{16}{3}p^2$ unidades quad. 51. 32 53. $\frac{3}{22}K$

EXERCÍCIOS 5.10 (Página 368)

1. aproximado: 4,250; exato: 4 3. aproximado: 0; exato: 0 5. aproximado: 0,696 7. 0,880 9. 0,248 11. 3,689
13. $-0,5 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0$ 15. $-0,161 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0,161$ 17. $-0,007 \leqslant \epsilon_T \leqslant -0,001$ 19. 4,000 21. 0,693 23. 0,6045 25. 0
27. $-0,0005 \leqslant \epsilon_S \leqslant 0$ 29. 0,237 31. 1,569 33. 1,402 35. 3,090 37. (a) 15,95; (b) 16,03 39. 26,6 unidades quad. 41. 5,9 km
43. 4,109 unidades quad. 45. 56 47. 222

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5 (Página 369)

1. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ 3. $2y^2 + 4y^{3/2} + C$ 5. $-\frac{1}{3}\cos 3t + C$ 7. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ 9. $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{x} + C$
11. $\frac{5}{54}(2 + 3x^2)^9 + C$ 13. $\frac{2}{3}x\sqrt{3x} + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + C$ 15. $-\frac{1}{24(x^4 + 2x^2)^6} + C$ 17. $\frac{1}{6}(2s + 3)^{3/2} - \frac{3}{2}(2s + 3)^{1/2} + C$
19. $\frac{1}{3}\text{tg } 3\theta - \theta + C$ 21. $5 \text{ sen } x - 3 \sec x + C$ 23. $\frac{1}{420}(4x + 3)^{3/2}(30x^2 - 18x + 79) + C$ 25. 6 27. $-\frac{27}{4}$ 29. 0
31. $\frac{5}{4}$ 33. $\frac{1}{2}$ 35. $\frac{652}{15}$ 37. $4 - \frac{1}{2}\pi$ 39. $y^2 = \frac{1}{2x^{-1} + C} + 1$ 41. $y = \frac{1}{15}(2x - 1)^{5/2} + C_1x + C_2$
43. (a) $\frac{1}{9}(x^3 + 1)^3 + C$; (b) $\frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + C$ 45. $y = 10x - 2x^2 - 9$ 47. (a) $R(x) = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$;
(b) $p = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 12$ 49. (a) $V = \frac{2}{3}(t + 1)^{3/2} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{74}{3}$; (b) 64 cm^3 51. 1,46 cm^3 53. \$5
55. $v = 3 \text{ sen } 2t + 3$, $s = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$ 57. $\frac{25\sqrt{817} - 625}{8}$ s $\approx$ 11,2 s 59. (a) 1 s; (b) -80 m/s
61. 4.100.656.560 67. $[0, \pi]$ 69. $\frac{313}{2}$ 71. $-(3x^2 - 4)^{3/2}$ 73. $\frac{1}{x}$ 75. 0 77. $\frac{42.304}{175}$ 81. 18 unidades quad.
83. $\frac{224}{3}$ unidades quad. 85. $\frac{1}{3}(40\sqrt{5} - 20)$ unidades quad. 87. 36 unidades quad. 89. $\frac{1}{12}$ unidades quad. 91. $2\sqrt{2}$ unidades quad.
93. $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades quad. 95. (b) 47°; (c) 60°; (d) 73°; (e) 75°; (f) 67,5°; (g) $60 + \frac{9}{\pi}(\sqrt{3} + 2)$ graus $\approx$ 70,7° 97. 2,977
99. 2,958 101. (a) 1,624; (b) 1,563 103. $\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi$ 105. 12; $\sqrt{3}$ 111. (b) 27

EXERCÍCIOS 6.1 (Página 381)

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúb. 3. $\frac{127}{7}\pi$ unidades cúb. 5. 64π unidades cúb. 7. $\frac{704}{5}\pi$ unidades cúb. 9. $\frac{384}{7}\pi$ unidades cúb. 11. $\frac{3.456}{35}\pi$ unidades cúb.
13. $\frac{256}{15}\pi$ unidades cúb. 15. $\frac{128}{5}\pi$ unidades cúb. 17. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúb. 19. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$ unidades cúb. 21. π unidades cúb.
23. $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades cúb. 25. $(4\pi - \frac{1}{2}\pi^2)$ unidades cúb. 27. $(\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\pi^2)$ unidades cúb. 29. $\frac{1.250}{3}\pi$ unidades cúb. 31. $\frac{64}{5}\pi$ unidades cúb.
33. $\frac{261}{32}\pi$ unidades cúb. 35. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúb. 37. 180π cm^3 39. $(\frac{8}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi)$ unidades cúb. 41. 2 43. $\frac{1.372}{3}\sqrt{3}$ cm^3
45. $\frac{686}{3}$ cm^3 47. $\frac{8}{3}r^3$ unidades cúb. 49. $\frac{2}{3}r^3$ cm^3

EXERCÍCIOS 6.2 (Página 387)

13. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{3}{10}\pi$ unidades cúb. **17.** $\frac{5}{6}\pi$ unidades cúb. **19.** $\frac{49}{30}\pi$ unidades cúb. **21.** 16π unidades cúb.
23. $\frac{512}{15}\pi$ unidades cúb. **25.** $\frac{32}{15}\pi p^3$ unidades cúb. **27.** $\frac{8}{5}\pi$ unidades cúb. **29.** $\frac{11}{10}\pi$ unidades cúb. **31.** $\frac{38}{15}\pi$ unidades cúb.
33. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{32}{15}\pi$ unidades cúb. **37.** $\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\pi$ unidades cúb. **39.** π unidades cúb. **41.** $\frac{224}{3}\pi$ unidades cúb. **43.** $\sqrt[7]{2.744}$

EXERCÍCIOS 6.3 (Página 393)

1. $\sqrt{10}$ **3.** $\sqrt{97}$ **5.** $\frac{14}{3}$ **7.** $\frac{33}{16}$ **9.** $\frac{1}{27}(97^{3/2}-125)$ **11.** 12 **13.** $\frac{22}{3}$ **15.** $\frac{9}{8}$ **17.** $\frac{8a^3-(a^2+3b^2)^{3/2}}{8(a^2-b^2)}$ se $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ se $b=a$
19. $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$ **21.** 2 **23.** 3,8203 **25.** 1,0894

EXERCÍCIOS 6.4 (Página 399)

1. 250 dinas **3.** 4.000 dinas **5.** $\frac{3}{2}$ m/s^2 **7.** $\frac{8}{3}$ kg **9.** 4 **11.** 6 **13.** 54 kg; $\frac{11}{3}$ m a partir de um extremo
15. 171 g; 5,92 mm a partir de um extremo **17.** 42 g; $\frac{44}{7}$ cm a partir de um extremo
19. 31,5 kg; $\frac{18}{7}$ m a partir do extremo com a maior densidade **21.** 16 kg; $\frac{16}{5}$ m a partir de um extremo
23. 1,2 m a partir do extremo com a maior densidade **25.** $\frac{20}{L^2}x^2$ g/cm **27.** 12 kg/m

EXERCÍCIOS 6.5 (Página 406)

1. $(2, \frac{1}{3})$ **3.** $\frac{29}{7}$ **5.** $(\frac{2}{3}, 1)$ **7.** $(0, \frac{8}{5})$ **9.** $(0, \frac{12}{5})$ **11.** $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$ **13.** $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ **15.** (2, 0) **17.** $\frac{5}{3}p$
21. O ponto no raio cuja distância do centro da circunferência é $\frac{4}{3\pi}$ vezes o raio.
23. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ unidades cúb. **25.** $\frac{1}{6}\sqrt{2}(4+3\pi)\,\pi r^3$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 6.6 (Página 412)

1. $\frac{158}{3}$ J **3.** $\frac{1.076}{15}$ ergs **5.** $\frac{1}{2}(3+\sqrt{393})$ **7.** 180 ergs **9.** 8 J **11.** 1.350 ergs **13.** 6.562,5w J
15. $256\pi w$ J **17.** 13.500 J **19.** 5.500 J **21.** $9.196.875\pi$ J **23.** $1.017.938\pi$ J **25.** $\frac{144w}{55}$ s **27.** $2\sqrt{3}$ cm

EXERCÍCIOS 6.7 (Página 417)

1. $320\rho g$ dinas **3.** $64\rho g$ N **5.** $2{,}25\rho g$ dinas **7.** 941.760 N **9.** 4.087.500 N **11.** $\sqrt[3]{16{,}31}$ m $\approx$ 2,54 m **15.** $14.000\rho g$ N
17. $100.000\rho g$ kg-m **19.** 12.978 N **21.** $250\sqrt{409}\rho g$ N **23.** $11.250\sqrt{3}\rho g$ N

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6 (Página 418)

1. $\frac{1}{9}\pi$ unidades cúb. **3.** π unidades cúb. **5.** π unidades cúb. **7.** 250π unidades cúb. **9.** 1.024 unidades cúb. **11.** 3π unidades cúb.
13. $\frac{25}{6}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ **17.** 558π cm^3 **19.** $\frac{1}{5.320}[\frac{1}{8}(10.999)^{3/2}-(2.251)^{3/2}] \approx 7{,}03$ **21.** $\frac{2}{13}$ **23.** $(\frac{3}{2}, 2)$
25. $\frac{104}{3}$ kg; $\frac{298}{65}$ m do extremo esquerdo **27.** $(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$ **29.** $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ **31.** $\frac{256}{3}\pi$ m^3 **33.** $\frac{128}{15}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{1.539}{20}\pi$ unidades cúb.
37. 6.000 ergs **39.** 400 joules **41.** 44.145.000 joules **43.** $\frac{2.752}{3}w\pi$ joules **45.** 4,5 $w\pi$J **47.** 90 m^3 **49.** $\frac{832}{3}\pi$ unidades cúb.
51. $\frac{1}{4}\pi^2$ unidades cúb. **53.** $\frac{18}{5}\rho g$ N **55.** $\frac{82.048}{3}$N

EXERCÍCIOS 7.1 (Página 430)

1. biunívoca **3.** não é biunívoca **5.** biunívoca **7.** biunívoca **9.** biunívoca **11.** biunívoca **13.** biunívoca
15. biunívoca **17.** não é biunívoca **19.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x+7)$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **21.** não tem inversa

23. $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **25.** $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$; domínio: $[0, +\infty)$, imagem: $[3, +\infty)$
27. $F^{-1}(x) = x^3 - 1$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **29.** não tem inversa
31. $f^{-1}(x) = \frac{1}{32}x^5$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **33.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 1\}$, imagem: $\{y \mid y \neq -1\}$
35. $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$; domínio: $[5, +\infty)$, imagem: $[0, +\infty)$ **37.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)$; domínio: $[0, 8]$, imagem: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
39. $F^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$; domínio: $[0, 3]$, imagem: $[0, 3]$ **41.** (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$ **43.** (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$
45. (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-1}{3-2x}$ **47.** $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ **51.** (b) $f_1(x) = x^2 + 4, x \geqslant 0$; $f_2(x) = x^2 + 4, x \leqslant 0$;
(c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$; domínio: $[4, +\infty)$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}$; domínio: $[4, +\infty)$
53. (b) $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; $f_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $-3 \leqslant x \leqslant 0$;
(c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$, domínio: $[0, 3]$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, domínio: $[0, 3]$ **55.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 81 \\ \frac{1}{729}x^2 & \text{se } x > 81 \end{cases}$

EXERCÍCIOS 7.2 (Página 438)

11. $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{1}{10}$ **15.** $\frac{1}{12}$ **17.** $\frac{1}{21}$ **19.** -2 **21.** $-\frac{1}{4}$ **23.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **25.** $-\frac{1}{4}$ **27.** $\frac{1}{3}$
29. (a) $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$; (b) nenhuma tem inversa; (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$
31. (a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$; (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$, domínio: $\{x \mid x \neq 0\}$; (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{y}$
33. (a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x}$; (b) não tem inversa; (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x-3y}{3x}$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{4x-3y}$ **35.** (b) 6; (c) $\frac{1}{6}$ **37.** $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ **39.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

EXERCÍCIOS 7.3 (Página 448)

1. $\dfrac{5}{4+5x}$ **3.** $\dfrac{5}{8+10x}$ **5.** $\dfrac{6}{3t+1}$ **7.** $\dfrac{6\ln(3t+1)}{3t+1}$ **9.** $-\dfrac{2x}{12-3x^2}$ **11.** $\dfrac{5\cos 5y}{\operatorname{sen} 5y}$ **13.** $-\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$ **15.** $2 \sec 2x$
17. $\dfrac{\sec^2 x}{2 \operatorname{tg} x} = \operatorname{cosec} 2x$ **19.** $-\dfrac{17}{2(2w-5)(3w+1)}$ **21.** $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ **23.** $\dfrac{1-2x-x^2}{3(x+1)(x^2+1)}$ **25.** $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$
27. $-\dfrac{xy+y}{xy+x}$ **29.** $x + y$ **31.** $\dfrac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x}$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 35 a 41 aparecem nas Figs. 7.3-35 a 7.3-41.)

43. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \ln 2$ **45.** $y = 40x - 40$ **47.** $-\frac{1}{2}$ **49.** (a) \$5 por \$1 no orçamento; (b) \$688

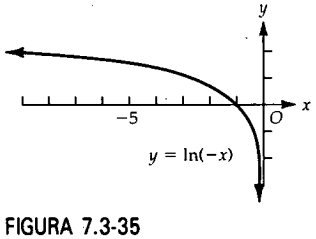


FIGURA 7.3-35

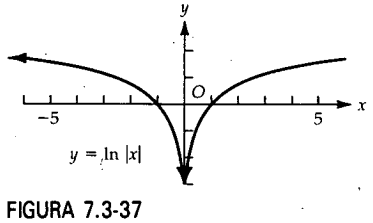


FIGURA 7.3-37

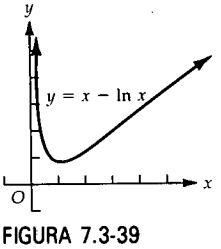


FIGURA 7.3-39

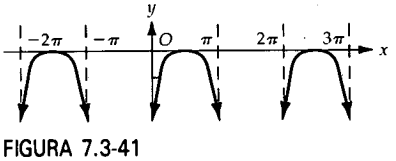


FIGURA 7.3-41

EXERCÍCIOS 7.4 (Página 454)

1. $\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ **3.** $-\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}$ **5.** $4 \sec 4x$ **7.** $\dfrac{4-x^2}{x(x^2+4)}$ **9.** $2x(x+1)^6(x-1)^2(6x^2-2x-1)$
11. $\dfrac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3 - 30x^2 - 6x + 16)$ **13.** $\dfrac{8x^9 - 4x^7 + 15x^2 + 10}{5(x^7+1)^{6/5}}$ **15.** $-\frac{1}{2}\ln|3 - 2x| + C$ **17.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + C$
19. $\frac{1}{5}\ln|5x^3 - 1| + C$ **21.** $\frac{1}{2}\ln|1 + 2\operatorname{sen} t| + C$ **23.** $\frac{1}{5}\ln(1 - \cos 5x) + C$ **25.** $\ln(1 + \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
27. $x^2 + 4\ln|x^2 - 4| + C$ **29.** $\ln|\ln x| + C$ **31.** $\frac{1}{3}\ln^3 3x + C$ **33.** $\ln|(\ln x)^2 + \ln x| + C$ **35.** $\ln|\sec(\ln x)| + C$
37. $\ln 5$ **39.** $4 + \ln 2$ **41.** $\frac{1}{2}\ln(4 + 2\sqrt{3})$ **43.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\frac{1}{4}\ln 5 \approx 0{,}402$ **49.** $2.000 \ln 2 \text{ N/m}^2 \approx 1.386 \text{ N/m}^2$
51. $\ln 4$ unidades quad. $\approx$ 1,386 unidades quad. **53.** $\pi(11 + 8\ln 2)$ unidades cúb. $\approx$ 51,978 unidades cúb. **55.** $\ln(2 + \sqrt{3})$

EXERCÍCIOS 7.5 (Página 462)

1. $5e^{5x}$ 3. $-6xe^{-3x^2}$ 5. $-e^{\cos x}\operatorname{sen} x$ 7. $e^{2x}\cos e^x + e^x \operatorname{sen} e^x$ 9. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\sec^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ 11. $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ 13. $2x$

15. $2e^{2x}\sec e^{2x}\operatorname{tg} e^{2x} + 2e^{2\sec x}\sec x \operatorname{tg} x$ 17. $-e^{y-x}$ 19. $-\dfrac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}$ 21. $-\frac{1}{5}e^{2-5x} + C$ 23. $e^x - e^{-x} + C$

25. $\dfrac{1}{6(1 - 2e^{3x})} + C$ 27. $e^x - 3\ln(e^x + 3) + C$ 29. e^2 31. 2 33. $\frac{1}{2}$ 35. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ 37. 2,67 39. 2,57

41. Veja Fig 75-41 43. $(e^2 - 1)$ unidades quad. 45. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ 47. $(e^3 + \frac{1}{2})$ m $\approx$ 20,586 m 49. $-46{,}97$ N/m^2/s

51. 0,0009 53. $\frac{1}{2}\pi w(e^{-2} - e^{-8})$ J 55. (b) 2,7181459; 2,7184177; 2,7182818 61. $f(1) = \dfrac{1}{e}$, max. rel.; $(2, 2e^{-2})$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, 1]$; decrescente em $[1, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 2$; côncavo para cima para $x > 2$. Veja Fig. 7.5-61

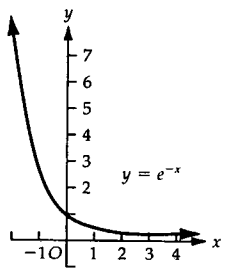


FIGURA 7.5-41

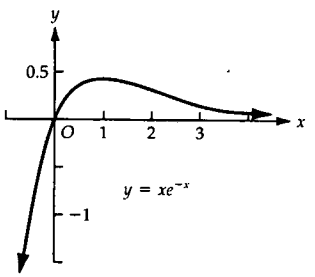


FIGURA 7.5-61

EXERCÍCIOS 7.6 (Página 468)

1. $(5\ln 3)3^{5x}$ 3. $4^{3t^2}(\ln 4)\,6t$ 5. $4^{\operatorname{sen} 2x}(2\ln 4)\cos 2x$ 7. $2^{5x}3^{4x^2}(5\ln 2 + 8x\ln 3)$ 9. $\dfrac{1}{x^2}\log_{10}\dfrac{e}{x}$ 11. $\dfrac{\log_a e}{2x\sqrt{\log_a x}}$

13. $\dfrac{(\log_{10} e)^2}{(x + 1)\log_{10}(x + 1)}$ 15. $3^{t^2}\sec 3^{t^2}\operatorname{tg} 3^{t^2}(2t\ln 3)$ 17. $x^{\sqrt{x}-(1/2)}(1 + \frac{1}{2}\ln x)$ 19. $z^{\cos z - 1}[\cos z - z(\ln z)\operatorname{sen} z]$

21. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}[1 + (\ln \operatorname{sen} x)\sec^2 x]$ 23. $x^{e^x-1}e^x(x\ln x + 1)$ 25. $\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$ 27. $\dfrac{a^t e^t}{1 + \ln a} + C$ 29. $\dfrac{10^{x^3}}{3\ln 10} + C$

31. $\dfrac{6^{e^y}}{\ln 6} + C$ 33. 0,621 35. 2,999 45. (a) 61 vendas por dia; (b) 2,26 vendas por dia 49. (a) $y = 200 \cdot 2^{t/10}$; (b) \$ 12,800;

(c) \$877 por ano 51. $\left(e - 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\right)$ unidades quad. $\approx$ 0,276 unidades quad. 53. $\left(\dfrac{4}{\ln 3} - 1\right)\pi$ unidades cúb. $\approx$ 8,297 unidades cúb.

EXERCÍCIOS 7.7 (Página 480)

1. 68,4 anos 3. 38.720 5. \$2.734 7. 16.000 9. (a) 96 %; (b) 66 % 11. 1.389 13. (a) \$52,59; (b) 10,52 %
15. 15,9 anos 17. 8,7 anos 19. 43,9 g 21. 11,6 kg 23. 6.451 anos atrás 25. (a) 34,7; (b) 55,5' 27. (a) 0,3401; (b) 0,3414 29. 0,8427

EXERCÍCIOS 7.8 (Página 491)

1. $y = \dfrac{C}{x}$ 3. $y = C\cos x$ 5. $y = (x + C)e^x$ 7. $y = [\ln(1 + e^x) + C]e^{-x}$ 9. $x = y + Cy^{-2}$ 11. $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x + C\operatorname{cosec}^2 x$

13. $y = \dfrac{x + C}{1 + x^2}$ 15. $x = \ln y(\ln|\ln y| + C)$ 17. $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 19. $y = x(e^{x-1} + 1)$ 21. $y = 5\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x$

23. $y = 8\operatorname{sen}^2 x - 2$ 25. 70 min 27. (a) 1 min 42 s; (b) 42,1° 29. (a) $i = 3 - 3e^{-5t}$; (b) 3 ampères 31. $i = \frac{1}{45}(e^t - e^{-8t})$
33. (a) $q = 8 - 4(1 + 0{,}01t)^{-1.000}$; (b) $i = 40(1 + 0{,}01t)^{-1.001}$; (c) 8 coulombs 35. $y = (\frac{1}{3}x^{-3} + Cx^6)^{-1/3}$
37. $y = \pm(\frac{1}{3}e^{-x^2} + Ce^{2x^2})^{-1/2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7 (Página 492)

1. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$; domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, +\infty)$ **3.** não tem inversa
5. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{3-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 3\}$; imagem: $\{y \mid y \neq 0\}$ **7.** (b) $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ **9.** $\frac{1}{4}$ **11.** $\frac{1}{12}$ **13.** $\dfrac{8 \ln x}{x}$
15. $(-4 \ln 2)2^{\cos 4x} \operatorname{sen} 4x$ **17.** $\dfrac{(4-x^2)e^{x/(4+x^2)}}{(4+x^2)^2}$ **19.** $\dfrac{\log_{10} e}{(1-x^2)\sqrt{\log_{10}\frac{1+x}{1-x}}}$ **21.** 0
23. $x^{x^{e^x}+e^{x-1}}(xe^x \ln^2 x + e^x \ln x + 1)$ **25.** $\frac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$ **27.** $\frac{1}{3}\left(e^{3x} + \dfrac{2^{3x}}{\ln 2} + C\right)$ **29.** $\frac{1}{6}\sqrt{1+e^{6x^2}} + C$
31. $\dfrac{2}{3\ln 2}\sqrt{3\cdot 2^x + 4} + C$ **33.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$ **35.** $\frac{3}{2}\ln 2$ **37.** $1 + 5\ln\frac{3}{4}$ **39.** $-\dfrac{ye^x + e^y + 1}{e^x + xe^y + 1}$ **41.** 5,004
43. $v = e^t - e^{-t} + 1$; $s = e^t + e^{-t} + t$ **45.** $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b})$; $\frac{1}{2}\pi$ **47.** 8.212 anos **49.** $g(x) = -e^x$; domínio: $(-\infty; +\infty)$
53. $3.000 \ln\frac{3}{2}$ ergs **55.** 8,66 anos **57.** 187.500 **59.** (a) 32; (b) 43,5; (c) 3,83 **61.** 8,63 min **63.** $(1, e)$ **71.** $\operatorname{sgn} t(1 - e^{-|t|})$
73. (a) $\ln\frac{4}{5} > \ln\frac{1}{2}$; (b) $\ln 2 > -\ln 2$; (c) $\ln 2 > \ln\frac{5}{4}$ **75.** $y = x + x^{-1} + Cx^{-2}$
77. $y = (x+2)(\sec x - \operatorname{tg} x)$ **79.** (a) $i = 10 - 10(1 + \frac{1}{3}t)^{-1.000}$; (b) 10 ampères **81.** 73,7°

EXERCÍCIOS 8.1 (Página 502)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **3.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{7}{6}\pi$ **5.** (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) $-\frac{1}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}\pi$; (d) $-\frac{1}{2}\pi$; (e) 0
7. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) 3 **9.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $-2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) -3
11. (a) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (b) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\sqrt{5}$; (e) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **13.** (a) $-\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (d) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; (e) $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$
15. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{6}\pi$; **17.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{2}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **19.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{3}\pi$
21. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $\frac{2}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **23.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{4}{3}\pi$; (d) $\frac{4}{3}\pi$ **25.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{5}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$
27. (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$ **29.** (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **31.** $\frac{119}{169}$ **33.** $\frac{2}{9}(1+\sqrt{10})$ **35.** $\frac{1}{27}(7\sqrt{5} + 8\sqrt{2})$ **37.** $\frac{1}{39}(48 - 25\sqrt{3})$
39. $\frac{1}{15}(4\sqrt{10} + \sqrt{5})$ **43.** Veja Fig. 8.1-43 **45.** Veja Fig. 8.1-45 **47.** Veja Fig. 8.1-47 **49.** Veja Fig. 8.1-49
51. (a) $\left\{t \middle| t = \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} - \frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right\} \cup \left\{t \middle| t = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + \frac{k}{2}\right\}$, onde k é um inteiro qualquer; (b) $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$

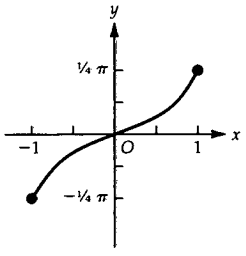


FIGURA 8.1-43

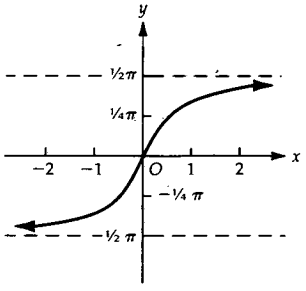


FIGURA 8.1-45

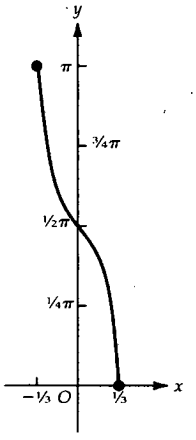


FIGURA 8.1-47

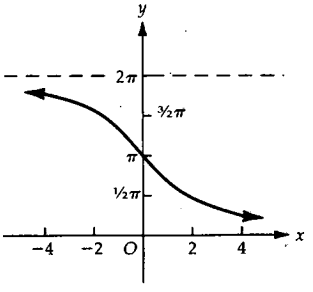


FIGURA 8.1-49

EXERCÍCIOS 8.2 (Página 509)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ **3.** $\dfrac{2}{1+4x^2}$ **5.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ **7.** 0 **9.** $-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ **11.** $\dfrac{4}{4+x^2}$ **13.** $\operatorname{sen}^{-1} 2y + \dfrac{2y}{\sqrt{1-4y^2}}$
15. $2x \sec^{-1}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ **17.** $-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$ **19.** $\dfrac{2x}{(1+x^4)\operatorname{tg}^{-1} x^2}$ **21.** $2\sqrt{4-x^2}$ **23.** $-\dfrac{3}{\sqrt{4e^{6x}-1}}$ **25.** $\operatorname{cotg}^{-1} x$

27. $-1-\dfrac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$ **29.** $\dfrac{(1+y^2)(3x^2+\operatorname{sen} y)}{1-x\cos y(1+y^2)}$ **31.** $2\sqrt{3}x-6y+2\pi-\sqrt{3}=0;\ 6\sqrt{3}x+6y-2\pi-3\sqrt{3}=0$

33. $\sqrt{10}$ m **35.** 0,078 rad/s **37.** $\frac{52}{3}\pi$ km/min **39.** 2,4 m/s **41.** $\dfrac{6}{x\sqrt{x^2-64}}$

EXERCÍCIOS 8.3 (Página 513)

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}2x+C$ **3.** $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^{-1}\frac{3x}{4}+C$ **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x-1}{2}+C$ **7.** $\frac{1}{16}\sec^{-1}\frac{x}{4}+C$ **9.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{10}}{2}x+C$

11. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3r^2}{4}+C$ **13.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{7}}+C$ **15.** $2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}+C$ **17.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$ **19.** $\cos^{-1}\frac{1-x}{4}+C$

21. $\cos^{-1}\frac{1+x}{2}-\sqrt{3-2x-x^2}+C$ **23.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1+x}{\sqrt{5}}-\sqrt{4-2x-x^2}+C$

25. $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{4}\ln(2x^2-4x+3)-\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{2}(x-1)+C$ **27.** $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\ln 2$ **29.** $\frac{1}{3}\pi$ **31.** $\operatorname{tg}^{-1}e-\frac{1}{4}\pi$

33. $\frac{1}{4}\pi$ **35.** π unidades quad. **37.** $\frac{1}{3}\pi$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 8.4 (Página 522)

17. $\frac{4}{5}\operatorname{sech}^2\frac{4x+1}{5}$ **19.** $2e^{2y}\cosh e^{2y}$ **21.** $-8\operatorname{sech}^2 4w\operatorname{tgh}4w$ **23.** e^{2x} **25.** $2\operatorname{cosech}2t$ **27.** $2x\operatorname{sech}x^2$

29. $x^{\operatorname{senh}x-1}(x\cosh x\ln x+\operatorname{senh}x)$ **35.** $\frac{1}{2}\cosh^2(e^t)+C$ **37.** $2\cosh\sqrt{x}+C$ **39.** $x-\frac{1}{3}\operatorname{cotgh}3x+C$ **41.** $\frac{1}{6}\operatorname{tgh}^6 x+C$

43. $\frac{1}{2}\ln^2\cosh x+C$ **45.** $\frac{4}{5}$ **47.** $\frac{1}{4}\operatorname{senh}^4 2$

49. sech(0) = 1, máx. rel; pts. de inflex. em $x=\pm\ln(1+\sqrt{2})$; crescente em $(-\infty, 0]$; decrescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima para $x<-\ln(1+\sqrt{2})$ e $x>\ln(1+\sqrt{2})$; côncavo para baixo para $-\ln(1+\sqrt{2})<x<\ln(1+\sqrt{2})$

51. $a^2\operatorname{senh}\frac{x_1}{a}$ unidades quad. **53.** $v=e^{-ct/2}[(B-\frac{1}{2}cA)\operatorname{senh}t+(A-\frac{1}{2}cB)\cosh t]$;

$a=e^{-ct/2}[(A-cB+\frac{1}{4}c^2A)\operatorname{senh}t+(B-cA+\frac{1}{4}c^2B)\cosh t]$; $a=K_1s+K_2v$, onde $K_1=1-\frac{1}{4}c^2$ e $K_2=-c$

EXERCÍCIOS 8.5 (Página 527)

9. (a) $\ln\frac{1}{4}(1+\sqrt{17})$; (b) $\frac{1}{2}\ln 3$ **11.** $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ **13.** $\dfrac{4}{1-16x^2}$ **15.** $-\dfrac{1}{2x+3x^2}$ **17.** $2x\left(\cosh^{-1}x^2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}\right)$

19. $|\sec x|$ **21.** $-\dfrac{\operatorname{cosec}x\operatorname{cotg}x}{|\operatorname{cotg}x|}$ **23.** $\dfrac{6z(\operatorname{cotgh}^{-1}z^2)^2}{1-z^4}$ **25.** $-e^x\operatorname{cosec}e^x$ **27.** $\operatorname{senh}^{-1}x$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8 (Página 527)

1. (a) $\frac{4}{5}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) $-\frac{3}{4}$ **3.** (a) $-\frac{120}{169}$; (b) $\frac{3}{4}$ **5.** $\dfrac{2^x\ln 2}{1+2^{2x}}$ **7.** $6\operatorname{senh}^2 2x\cosh 2x$ **9.** $\dfrac{x}{|x|(x^2+1)}$ **11.** $\dfrac{\operatorname{sech}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $-4e^{2x}\operatorname{cosech}e^{2x}\operatorname{cotgh}e^{2x}$ **15.** $(\cosh x)^{1/x}\left(\dfrac{x\operatorname{tgh}x-\ln\cosh x}{x^2}\right)$ **19.** $\dfrac{6xy-9y^4-x^4y^2}{3x^2+18xy^3+2x^5y}$ **21.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}x^2+C$

23. $x-\frac{1}{3}\operatorname{tgh}3x+C$ **25.** $\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{4t+3}{\sqrt{31}}+C$ **27.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}\sec^{-1}\frac{1}{4}\sqrt{2}e^x+C$ **29.** $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-2$ **31.** $2\sqrt{2}\operatorname{senh}\frac{1}{2}$

33. (a) $\left\{t\,\middle|\,t=\dfrac{k}{60}+\dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{E}{20}\right\}\cup\left\{t\,\middle|\,t=\dfrac{k}{60}-\dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{E}{20}\right\}$, onde k é um inteiro qualquer; (b) $\frac{1}{360}$; (c) 0,0035; (d) $\frac{1}{180}$; (e) 0,0048

37. $9\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\sqrt{2}$ unidades quad. **39.** $\frac{1}{4}\pi$ unidades cúb. **41.** (a) 120 rad/h; (b) 60 rad/h **43.** decrescente à taxa de 60 rad/h

45. $\frac{1}{10}\pi$ h; ele vai a pé **47.** $\ln(2+\sqrt{3})$ **49.** $2w\operatorname{senh}^{-1}2w+\dfrac{2w^2}{\sqrt{4w^2+1}}$ **51.** $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

EXERCÍCIOS 9.1 (Página 536)

1. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ 3. $x \sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$ 5. $x \ln x - x + C$ 7. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$

9. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1} x(x^2 + 1) - \frac{1}{2}x + C$ 11. $\frac{e^x}{x + 1} + C$ 13. $-\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$ 15. $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$

17. $-x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$ 19. $x^2 \cosh x - 2x \operatorname{senh} x + 2 \cosh x + C$ 21. $2\sqrt{z} \operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z} + \ln(1 + z) + C$

23. $2\sqrt{x} \operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ 25. $\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{16}{(\ln 3)^3}$ 27. $\frac{9}{16}$ 29. $\frac{1}{4}(3e^4 + 1)$ 31. $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4} + 1)$

33. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1$ 35. $(e^2 + 1)$ unidades quad. 37. $\frac{1}{2}\pi(3e^4 + 1)$ unidades cúb. 39. $(8 - 24e^{-2})$ unidades quad.

41. $2(1 - e^{-6})$ kg; $\frac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ m de um extremo 43. (0,267, 0,604) 45. $\frac{1}{4}(1 - 9e^{-8})\,w\pi$ joules 47. $C(x) = x \ln x - x + 6$

49. (b) $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$ 51. (b) $\frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x + C$ 55. (a) 0,4156; (b) −0,4133

57. (a) $i = \frac{3}{625 + 9\pi^2}(250 \operatorname{sen} 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t) + \frac{90\pi}{625 + 9\pi^2}e^{-1.000t}$ (b) $i \approx \frac{3}{625 + 9\pi^2}(250 \operatorname{sen} 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t)$.

EXERCÍCIOS 9.2 (Página 541)

1. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$ 3. $-\frac{1}{16}\cos^4 4x + C$ 5. $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$ 7. $\frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4z + C$

9. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$ 11. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$ 13. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$ 15. $\frac{1}{8}t - \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12t + C$

17. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{2/3} 3x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^{8/3} 3x + C$ 19. $\frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$ 21. $-\frac{1}{16}\cos 8y + \frac{1}{4}\cos 2y + C$

23. $t - \operatorname{sen} t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6t + C$ 25. $\frac{2}{3}$ 27. $\frac{3}{8}$ 29. $\frac{1}{8}$ 31. $\frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$

33. (a) $\operatorname{sen}^2 x + C$; (b) $-\cos^2 x + C$; (c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ 39. $\frac{1}{2}\pi$ unidades quad. 41. $\frac{3}{8}\pi^2$ unidades cúb. 43. $\frac{5}{8}\pi^2$ unidades cúb.

45. $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi)$ 49. 31.250.000 N

EXERCÍCIOS 9.3 (Página 545)

1. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + C$ 3. $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg} 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$ 5. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 t - \ln|\operatorname{sen} t| + C$

7. $\frac{1}{15}\operatorname{tg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - x + C$ 9. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$ 11. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$

13. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 e^x - \operatorname{tg} e^x + e^x + C$ 15. $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C$ 17. $-\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + C$

19. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x) + C$ 21. $2 \sec w - \operatorname{tg} w + C$ 23. $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3x - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3x + \frac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C$

25. $u - 2\operatorname{tg}\frac{1}{4}u + C$ 27. $-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$ 29. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4(\ln x) + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6(\ln x) + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8(\ln x) + C$ 31. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$ 33. $\frac{56}{15}$

35. $\frac{1}{5}$ 37. $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad. 39. $\frac{4}{3}\pi$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 9.4 (Página 550)

1. $-\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$ 3. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}\right| + C$ 5. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + C$ 7. $\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

9. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2}x - \frac{x}{2(x^2 + 4)} + C$ 11. $-\frac{x}{9\sqrt{4x^2 - 9}} + C$ 13. $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{\sqrt{t^4 + 25} - 5}{t^2}\right) + C$ 15. $\ln|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}| + C$

17. $\frac{x + 2}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$ 19. $\frac{\operatorname{tg} x}{4\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} + C$ 21. $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4(8 + \ln^2 w)} + C$ 23. $-\frac{e^t + 4}{9\sqrt{e^{2t} + 8e^t + 7}} + C$

25. $\frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$ 27. $\frac{1}{27}(6 - 2\sqrt{3})$ 29. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi$ 31. $\frac{625}{16}\pi$ 33. (a) $\sec^{-1}\frac{2}{3}x + C$; (b) $-\frac{5}{2}\sqrt{3 - 2x^2} + C$

35. $\ln\left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3\sqrt{2} - 3}\right) + \sqrt{10} - \sqrt{2}$ 37. $\frac{81}{16}\pi^2$ unidades cúb. 39. $\frac{392}{60 + 27\ln 3}$ cm do extremo esquerdo

41. $\left(\frac{20 - 15\cos^{-}\frac{3}{5}}{5\ln 3 - 4}, \frac{26}{225(5\ln 3 - 4)}\right)$ 43. $(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3})\,\rho g$ kg 45. $(\frac{512}{3}\pi + 192\sqrt{3})\,\rho$ g

EXERCÍCIOS 9.5 (Página 560)

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ 3. $\ln|C(x-2)^2(x+2)^3|$ 5. $\ln\left|\frac{C(w+4)^3}{2w-1}\right|$ 7. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{Cx^4(2x+1)^3}{2x-1}\right|$ 9. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C$

11. $2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C$ 13. $\frac{3}{x+1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$

15. $\frac{5}{16(z+2)} - \frac{7}{16(z-2)} + \frac{1}{32}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| + C$ 17. $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x-1} - \ln|x^2+2x-3| + C$

19. $-\ln[(3x+2)^{2/3}(x-1)^2] - \frac{1}{3(3x+2)} - \frac{3}{x-1} + C$ 21. $4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$ 23. $\ln\frac{27}{4} - 2$ 25. $13\ln 2 - 4\ln 5$ 27. $\ln\frac{7}{2} - \frac{5}{3}$

29. ln 4,5 unidades quad. 31. $2\pi(2 + 6\ln 3 - 2\ln 2)$ unidades cúb. 33. $\left(\frac{6\ln 3 - 2\ln 2 + 2}{2\ln 3 - \ln 2}, \frac{48\ln 2 - 48\ln 3 + 35}{24(2\ln 3 - \ln 2)}\right)$

35. (a) $f(t) = \frac{5.000}{1 + 4.999e^{-0,5t}}$; (b) 1.328; (c) 4.075; (d) 5.000 37. 50 % 39. \$11.201.100 41. $\frac{31}{19}$ 43. 7,4 g

EXERCÍCIOS 9.6 (Página 565)

1. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{Cx^2}{2x^2+1}\right|$ 3. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}2x + C$ 5. $\frac{1}{10}\ln|(t^2+1)(2t+1)^3| + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}t + C$

7. $\ln|x-1| + \operatorname{tg}^{-1}x + C$ 9. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ 11. $\ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x - \frac{x}{2(x^2+1)}$

13. $\frac{5}{2}\ln(z^2-2z+5) + \frac{65}{16}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{z-1}{2}\right) - \frac{47z-15}{8(z^2-2z+5)} + C$

15. $\frac{5}{162}\ln|9x^2+3x+1| - \frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5}{9\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ 17. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x + \frac{x}{4x^2+9} + C$

19. $\ln|\operatorname{tg}x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\operatorname{tg}x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$ 21. $6\ln 2$ 23. $\ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13}$ 25. $\frac{1}{4}\pi$ 27. $\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{8}\pi$

29. $\frac{3}{8}\ln\frac{125}{41}$ 31. $\frac{1}{16}$ unidades quad. 33. $(\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi\ln 3)$ unidades cúb. 35. $\frac{3}{50}\ln\frac{(t_1+2)^2}{4({t_1}^2+1)} - \frac{7}{5(t_1+2)} - \frac{4}{25}\operatorname{tg}^{-1}t_1 + \frac{7}{10}$

EXERCÍCIOS 9.7 (Página 569)

1. $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54\ln(3+\sqrt{x}) + C$ 3. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}\right| + C$ 5. $-2\sqrt{1+x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right| + C$

7. $\frac{3}{2}(x-2)^{2/3} - 3(x-2)^{1/3} + 3\ln|1+(x-2)^{1/3}| + C$ 9. $2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 4\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2}\right| + C$

11. $\frac{1}{9}\sqrt{1+2x^3}(2x^3+7) + C$ 13. $\frac{6}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$ 15. $\frac{\sqrt{15}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{15}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{15}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$

17. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x + C$ 19. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}}\right| + C$ 21. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+3}\right| + C$ 23. $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2}}\right| + C$

25. $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$ 27. $-\frac{1}{2}\ln|13 - \operatorname{tg}^2x| + C$ 29. $2\operatorname{tg}^{-1}(2+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x) + C$

31. $3\operatorname{tg}^{-1}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C$ 33. $4 - 2\ln 3$ 35. $\ln\frac{11}{10}$ 37. $\frac{1}{4}\ln 3$ 39. $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})$

41. $2\sqrt{3}\ln(1+\sqrt{3})$ 43. $\frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35}$ 45. $2\ln|\sqrt{x}-1| + C$

EXERCÍCIOS 9.8 (Página 574)

1. $\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}x + C = \ln\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4}) + C$ 3. $\frac{1}{2}\cosh^{-1}x^2 + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4-1}) + C$

5. $\begin{cases} -\frac{1}{12}\operatorname{tgh}^{-1}(\frac{3}{4}x) + C & \text{se } |x| < \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{12}\operatorname{cotgh}^{-1}(\frac{3}{4}x) + C & \text{se } |x| > \frac{4}{3} \end{cases} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4-3x}{4+3x}\right| + C$ 7. $\operatorname{senh}^{-1}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{3}} + C = \ln(\operatorname{sen}x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 3}) + C$

9. $\frac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}(\sqrt{5}e^t) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln(\sqrt{5}e^t + \sqrt{5e^{2t}-1}) + C$

11. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C & \text{se } |x+2| < \sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{cotgh}^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C & \text{se } |x+2| > \sqrt{6} \end{cases} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2+x}{\sqrt{6}-2-x}\right| + C$

13. $\begin{cases} -\operatorname{tgh}^{-1}(x+5) + C & \text{se } |x+5| < 1 \\ -\operatorname{cotgh}^{-1}(x+5) + C & \text{se } |x+5| > 1 \end{cases} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+6}{x+4}\right| + C$

15. $\frac{3}{2}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2\ln w}{3}\right) + C = \frac{3}{2}\ln(2\ln w + \sqrt{4\ln^2 w + 9}) + C$

17. $\ln\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}}$ 19. $\ln 3$ 21. $\frac{1}{3}\ln\frac{7+\sqrt{40}}{4+\sqrt{7}}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 (Página 575)

1. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen}16x + C$ 3. $-2\sqrt{4-e^x} + C$ 5. $(x+1)\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$ 7. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x + C$

9. $\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C$ 11. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}4x + C$ 13. $3\ln\left|\frac{x^{1/3}}{1+x^{1/3}}\right| + C$

15. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}3x + \frac{2}{3}\ln|\operatorname{tg}3x| + C$ 17. $2t + \ln\frac{t^2}{(t+2)^{10}} - \frac{15}{t+2} + C$ 19. $x - \operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

21. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\operatorname{sen}12x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C$ 23. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{r+2}{\sqrt{7}}\right) + C$ 25. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$

27. $\frac{2}{17}e^{t/2}(4\operatorname{sen}2t + \cos 2t) + C$ 29. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x) + C$ 31. $\begin{cases} \frac{1}{n}\left(-\cos nx + \frac{2}{3}\cos^3 nx - \frac{1}{5}\cos^5 nx\right) + C & \text{se } n \neq 0 \\ C & \text{se } n = 0 \end{cases}$

33. $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^3 x\operatorname{cotg}x - \frac{3}{8}\operatorname{cosec}x\operatorname{cotg}x + \frac{3}{8}\ln|\operatorname{cosec}x - \operatorname{cotg}x| + C$ 35. $2\ln|y-2| - 8(y-2)^{-1} - \frac{9}{2}(y-2)^{-2} + C$

37. $-\operatorname{tg}^{-1}(\cos x) + C$ 39. $2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(t-2)\sqrt{4t-t^2} + C$ 41. $\frac{1}{3}\ln|1-x^{-3}| + C$ 43. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{2}e^x) + C$

45. $-\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + C$ 47. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ 49. $\operatorname{tg}^{-1}(\cos x) + C$

51. $\frac{2}{3}\sec^{-1}(2\operatorname{sen}3t) + C$ 53. $-\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^2x^3} + C$ 55. $\sqrt{2t} - \sqrt{1-2t}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t} + C$

57. $\frac{4}{3}\sqrt{2+\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1} - 4) + C$

59. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x - \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg}x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1) + C$

61. $\begin{cases} \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & \text{se } n \neq -1 \\ \frac{1}{2}\ln^2 x + C & \text{se } n = -1 \end{cases}$ 63. 4 65. $\frac{1}{2} + 2\ln\frac{6}{5}$ 67. $\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$ 69. $\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ 71. $\frac{4}{3}$

73. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$ 75. $-a^2(\frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi)$ 77. $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{2} - \frac{1}{6}\pi$ 79. 5 81. $\frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}$ 83. $\frac{4}{3}$ 85. $1 - \frac{1}{2}\ln 3$ 87. $\frac{1}{24}\pi$

89. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$ 91. $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$ 93. $\frac{256}{15}$ 95. $\frac{1}{3}k(1-e^{-9})$ kg; $\frac{e^9-10}{3(e^9-1)}$ m de um extremo

97. $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2}\right)$ **99.** $\frac{1}{8}\pi$ unidades quad. **101.** $\pi(e^2 \ln 2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8})$ unidades cúb.

103. (a) $x = 300\left(\frac{18^t - 17^t}{3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t}\right)$; (b) 35,94 g **105.** $\left(0, \frac{32}{15\pi}\right)$ **107.** $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{2})$

109. (a) 4.824; (b) 8,18 semanas **111.** $3\rho g$ N

EXERCÍCIOS 10.1 (Página 585)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 7 aparecem nas Figs. 10.1-1 a 10.1-7.)

1. (0, 1); $y = -1$; 4 **3.** $(-2, 0)$; $x = 2$; 8 **5.** $(0, -\frac{1}{4})$; $y = \frac{1}{4}$; 1 **7.** $(\frac{9}{8}, 0)$; $x = -\frac{9}{8}$; $\frac{9}{2}$ **9.** $y^2 = 20x$

11. $x^2 = -8y$ **13.** $y^2 = 2x$ **15.** $y^2 = -6x$ **17.** $y^2 = 10x$ **19.** $x^2 = -y$ **21.** $x'^2 + y'^2 = 13$ **23.** $y'^2 = 6x'$

25. $y' = 2x'^3$ **27.** $(-3, \frac{1}{4})$; $(-3, -\frac{3}{4})$; $x = -3$; $y = \frac{5}{4}$ **29.** (1, −5); $(-\frac{1}{2}, -5)$; $y = -5$; $x = \frac{5}{2}$

31. $(\frac{2}{3}, 1)$; $(\frac{23}{24}, 1)$; $y = 1$; $x = \frac{25}{24}$ **33.** $y^2 + 20x - 8y - 24 = 0$ **35.** $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$

37. $x^2 - 6x - 6y - 3 = 0$; $x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$ **39.** $y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$ **41.** (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $x^2 = -10y$ **43.** 16,6 m

47. $\frac{64}{75}$ cm **49.** (a) $y = x$; (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (c) $2\sqrt{2}$ **53.** translada os eixos de forma que a nova origem seja $(\frac{1}{4}\pi, -3)$

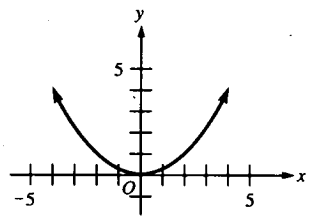


FIGURA 10.1-1

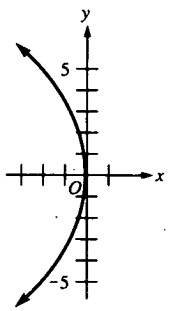


FIGURA 10.1-3

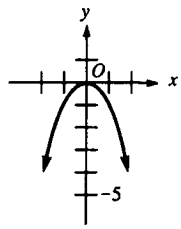


FIGURA 10.1-5

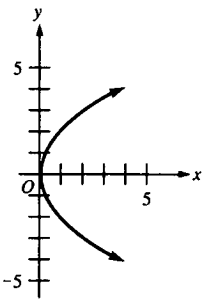


FIGURA 10.1-7

EXERCÍCIOS 10.2 (Página 593)

1. centro: (0, 0); vértices: (± 3, 0); focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$; extremidades do eixo menor: (0, ±2)

3. centro: (0, 0); vértices: (0, ±5); focos: $(0, \pm\sqrt{21})$; extremidades do eixo menor: (± 2, 0)

5. centro: (0, 0); vértices: (± 3, 0); focos: $(\pm\sqrt{3}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(0, \pm\sqrt{6})$

7. centro: (0, 0); vértices: $(0, \pm\frac{1}{2})$; focos: $(0, \pm\frac{1}{4}\sqrt{3})$; extremidades do eixo menor: $(\pm\frac{1}{4}, 0)$

9. centro: (2, 3); vértices: (−1, 3), (5, 3); focos: $(2 \pm \sqrt{3}, 3)$; extremidades do eixo menor: $(2, 3 \pm \sqrt{6})$

11. centro: $(0, \frac{1}{2})$; vértices: $(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17})$; focos: $(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{170})$; extremidades do eixo menor: $(\pm\frac{1}{10}\sqrt{255}, \frac{1}{2})$ **13.** ponto $(-\frac{5}{2}, 4)$

15. centro: (1, 0); vértices: $(1 \pm \sqrt{5}, 0)$; focos: $(1 \pm \sqrt{2}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(1, \pm\sqrt{3})$ **17.** ponto (1, −1)

Esboços dos gráficos dos Exercícios de 19 a 25 aparecem nas Figs. 10.2-19 a 10.2-25.)

19. $16x^2 + 25y^2 = 100$ **21.** $3x^2 + 2y^2 = 54$ **23.** $x^2 + 4y^2 = 4$ **25.** $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

27. $\frac{(y-3)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{48} = 1$ **29.** $2x + 3y - 12 = 0$ **33.** $\frac{42}{5}$ m **35.** $9x^2 + 25y^2 = 56.250.000$ **37.** 845π cm^3

39. $(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$ **41.** $18\pi\rho g$ g

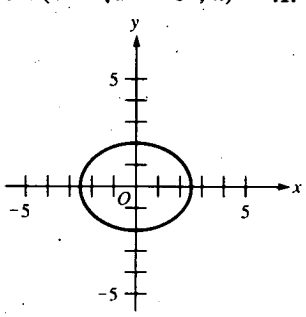


FIGURA 10.2-19

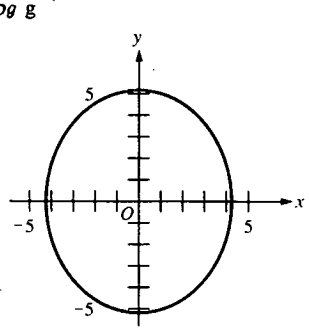


FIGURA 10.2-21

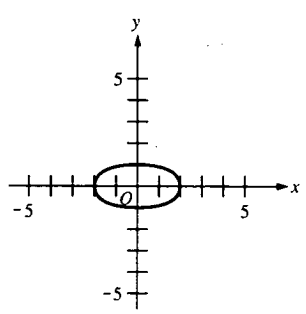


FIGURA 10.2-23

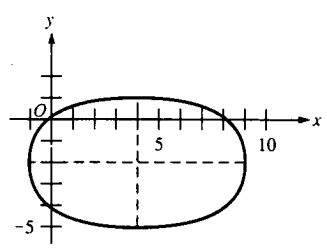


FIGURA 10.2-25

EXERCÍCIOS 10.3 (Página 603)

1. centro: (0, 0); vértices: $(\pm 2, 0)$; focos: $(\pm \sqrt{13}, 0)$; assíntotas: $y = \pm \frac{3}{2}x$

3. centro: (0, 0); vértices: $(\pm 5, 0)$; focos: $(\pm \sqrt{29}, 0)$; assíntotas: $y = \pm \frac{2}{5}x$

5. centro: (0, 0); vértices: $(0, \pm 2)$; focos: $(0, \pm 2\sqrt{5})$; assíntotas: $y = \pm \frac{1}{2}x$

7. centro: (0, 0); vértices: $(0, \pm \frac{1}{3})$; focos: $(0, \pm \frac{5}{12})$; assíntotas: $y = \pm \frac{4}{3}x$

9. centro: $(-4, -1)$; vértices: $(-10, -1)$, $(2, -1)$; focos: $(-4 \pm 6\sqrt{2}, -1)$; assíntotas: $x - y + 3 = 0$, $x + y + 5 = 0$

11. centro: $(-3, -1)$; vértices: $(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2})$; focos: $(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6})$; assíntotas: $\pm x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} \pm 3 = 0$

13. centro: $(-1, 4)$; vértices: $(-1, 4 \pm 2\sqrt{7})$; focos: $(-1, -3)$, $(-1, 11)$; assíntotas: $\pm 2x + \sqrt{3}y \pm 2 - 4\sqrt{3} = 0$

15. centro: $(1, -2)$; vértices: $(1, -5)$, $(1, 1)$; focos: $(1, -2 \pm \sqrt{13})$; assíntotas: $3x + 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 7 = 0$

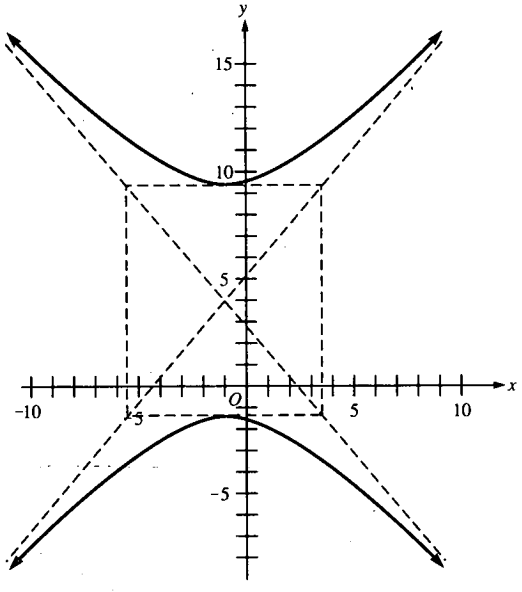


FIGURA 10.3-13

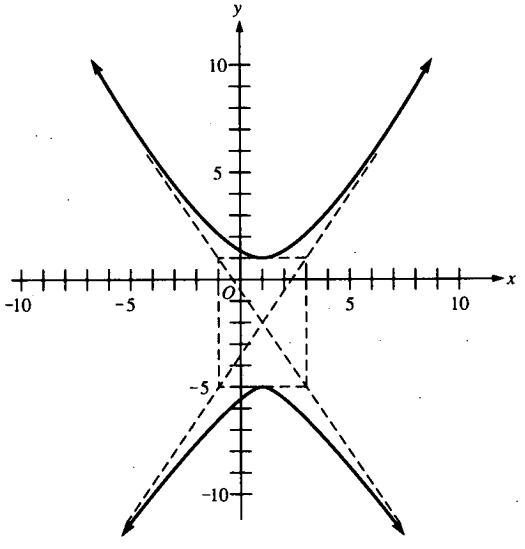


FIGURA 10.3-15

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 17 a 25 aparecem nas Figs. 10.3-17 a 10.3-25.)

17. $9x^2 - 4y^2 = 36$ **19.** $32y^2 - 33x^2 = 380$ **21.** $25x^2 - 144y^2 = 14.400$ **23.** $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$

25. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$ **27.** (a) $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$; (b) $2x - y + 3 = 0$, $2x + y + 5 = 0$

29. $2x - \sqrt{2y} + 1 = 0$ **31.** $7x^2 - 4y^2 = 28$ **33.** a parte direita da hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 14.400$ **35.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$ unidades cúb. **37.** (3, 4)

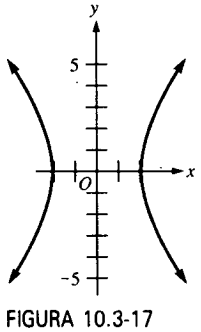


FIGURA 10.3-17

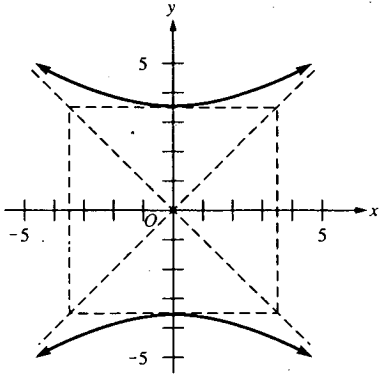


FIGURA 10.3-19

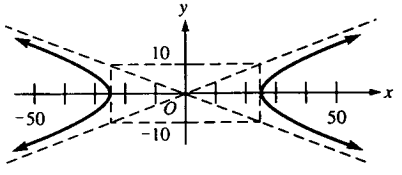


FIGURA 10.3-21

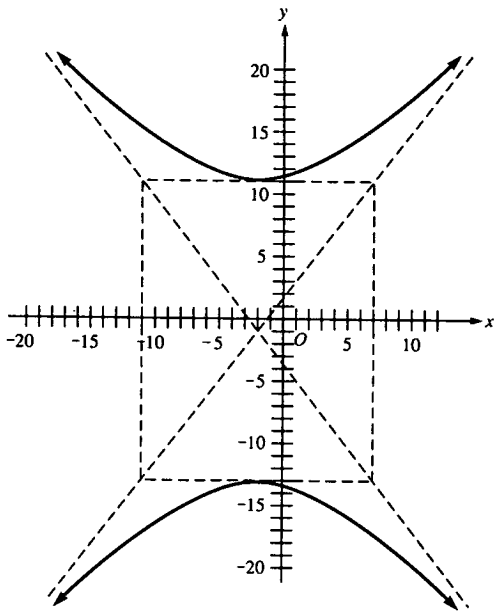


FIGURA 10.3-23

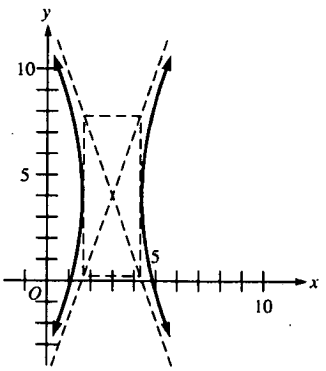


FIGURA 10.3-25

EXERCÍCIOS 10.4 (Página 608)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 21 aparecem nas Figs. 10.4-1 a 10.4-21.)

1. (a) $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$ **3.** (a) $\bar{x}\bar{y} = -4$ **5.** $16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36$ **7.** $\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} = 0$ **9.** $\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 32$
11. $9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$ **13.** $3\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = 18$ **15.** $\bar{x}'^2 + 4\bar{y}'^2 = 16$ **17.** $\sqrt{2}\bar{x}'^2 = \bar{y}'$
19. $\bar{x}'^2 - 4\bar{y}'^2 = 16$ **21.** $5\bar{x}^2 + 6\sqrt{5}\bar{y} = 0$

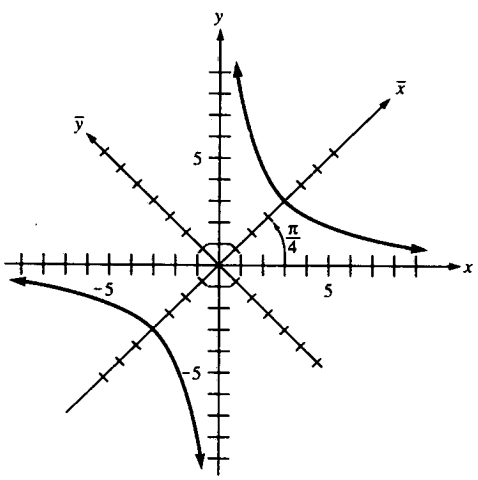


FIGURA 10.4-1

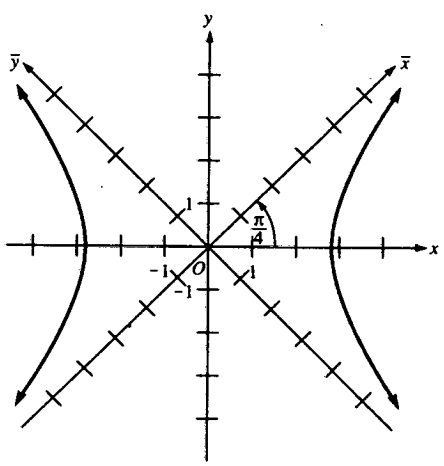


FIGURA 10.4-3

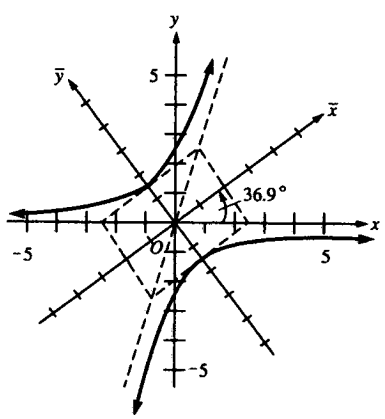


FIGURA 10.4-5

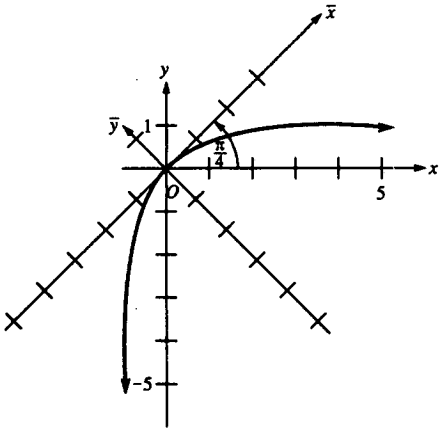


FIGURA 10.4-7

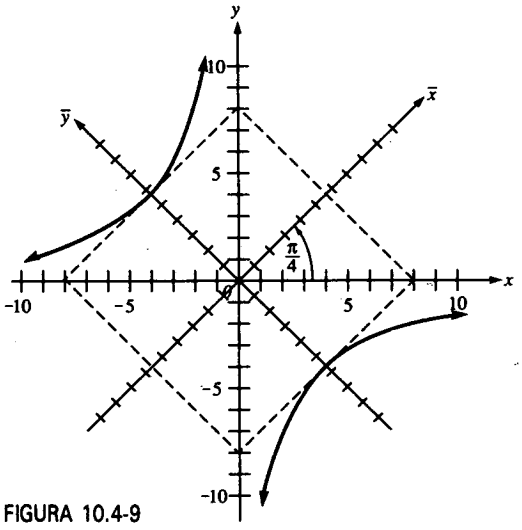


FIGURA 10.4-9

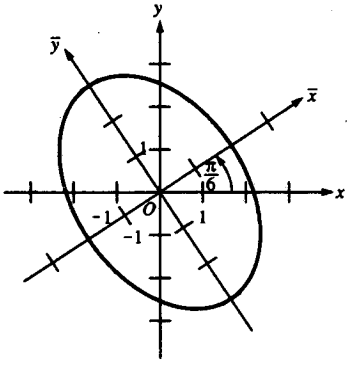


FIGURA 10.4-11

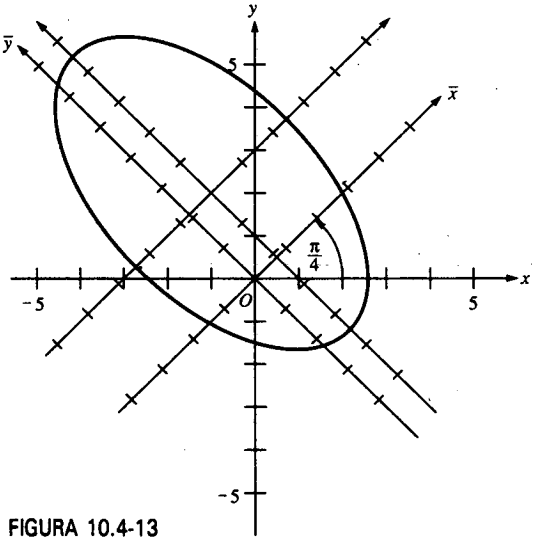


FIGURA 10.4-13

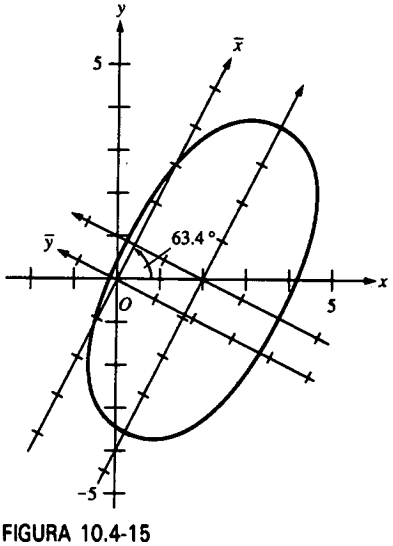


FIGURA 10.4-15

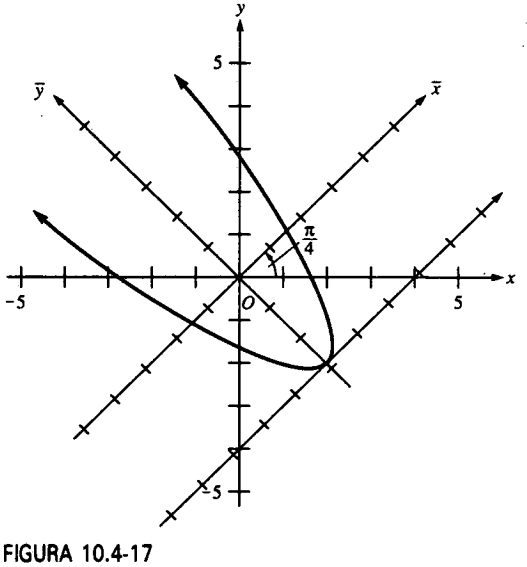


FIGURA 10.4-17

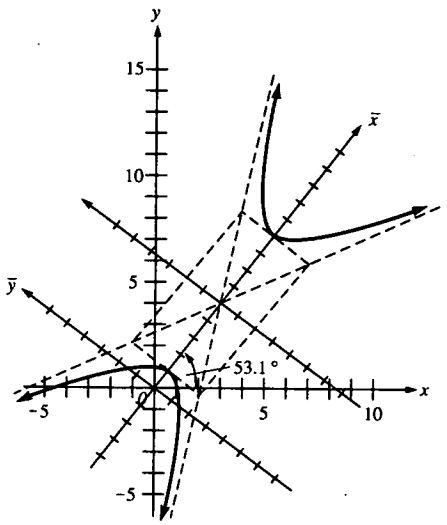


FIGURA 10.4-19

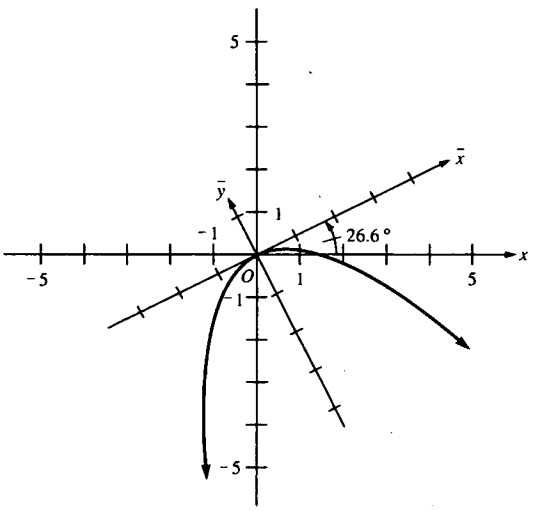


FIGURA 10.4-21

EXERCÍCIOS 10.5 (Página 613)

5. (a) $(-4, \frac{5}{4}\pi)$; (b) $(4, -\frac{7}{4}\pi)$; (c) $(-4, -\frac{3}{4}\pi)$ **7.** (a) $(-2, \frac{3}{2}\pi)$; (b) $(2, -\frac{3}{2}\pi)$; (c) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$ **9.** (a) $(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$; (c) $(-\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\pi)$ **11.** (a) $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$; (c) $(2, \frac{15}{4}\pi)$ **13.** $(3, \frac{4}{3}\pi)$; $(-3, \frac{1}{3}\pi)$ **15.** $(-4, -\frac{7}{6}\pi)$; $(4, -\frac{1}{6}\pi)$
17. $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; $(2, \frac{7}{4}\pi)$ **19.** $(2, 2\pi + 6)$; $(-2, 6 - \pi)$ **21.** (a) $(-3, 0)$; (b) $(-1, -1)$; (c) $(2, -2\sqrt{3})$; (d) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

23. (a) $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{6}\pi)$; (c) $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(5, \pi)$ **25.** $r = |a|$ **27.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **29.** $r = 6 \operatorname{sen}\theta$

31. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **33.** $r = \dfrac{3a \operatorname{sen} 2\theta}{2(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta)}$ **35.** $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ **37.** $(x^2 + y^2)^3 = x^2$ **39.** $y = x \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$

41. $x = -1$ **43.** $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

EXERCÍCIOS 10.6 (Página 624)

1. (a) reta que passa pela origem com inclinação $\sqrt{3}$; (b) circunferência com centro na origem e raio $\frac{1}{3}\pi$
3. (a) reta que passa pela origem com inclinação $\operatorname{tg}^{-1} 2$; (b) circunferência com centro na origem e raio 2
5. (a) reta paralela ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ e 4 unidades à direita deste; (b) circunferência tangente ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ com centro no ponto (0, 2)
7. (a) reta paralela ao eixo polar e 4 unidades abaixo dele; (b) circunferência tangente ao eixo polar com centro no ponto $(2, \frac{3}{2}\pi)$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 9 a 23 aparecem nas Figs. 10.6-9 e 10.6-23.)
25. espiral logarítmica contendo os pontos (r, θ) dados na seguinte tabela

r	1	$e^{\pi/2} \approx 5$	$e^{\pi} \approx 23$	$e^{3\pi/2} \approx 111$	$e^{2\pi} \approx 535$	$e^{5\pi/2} = 2.576$	$e^{3\pi} \approx 12.392$
θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

27. espiral recíproca contendo os pontos (r, θ) dados na seguinte tabela

r	$\frac{6}{\pi} \approx 1{,}9$	$\frac{3}{\pi} \approx 0{,}95$	$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}63$	$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$	$\frac{1}{3\pi} \approx 0{,}12$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$	$\frac{1}{6\pi} \approx 0{,}05$
θ	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π	3π	4π	6π

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 29 a 35 aparecem nas Figs. 10.6-29 a 10.6-35.)

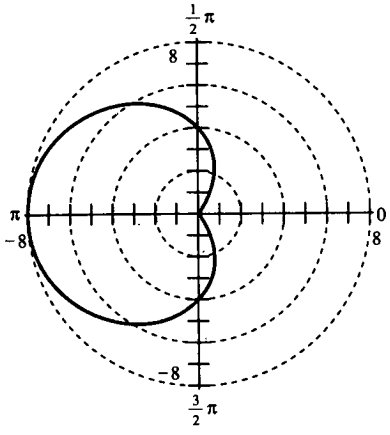


FIGURA 10.6.9 Cardióide

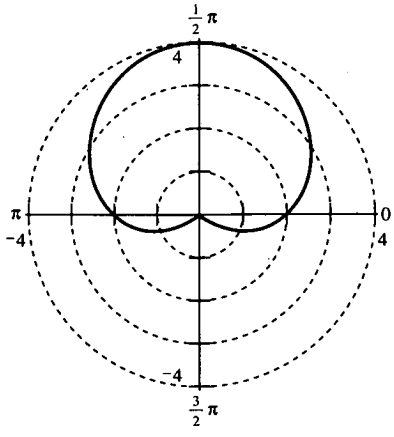


FIGURA 10.6.11 Cardióide

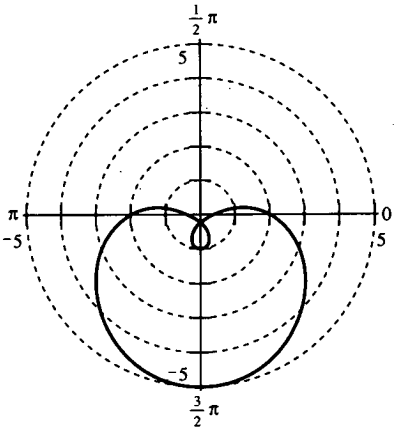


FIGURA 10.6.13 *Limaçon* com um laço

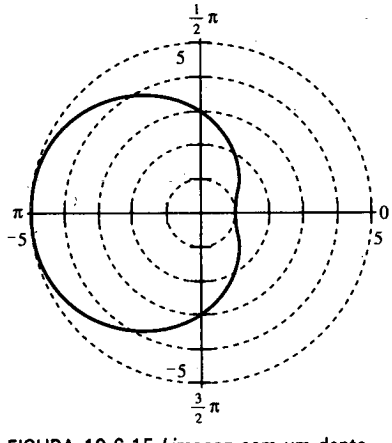


FIGURA 10.6.15 *Limaçon* com um dente

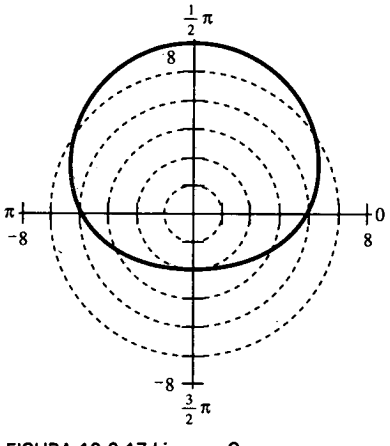


FIGURA 10.6.17 *Limaçon* Convexa

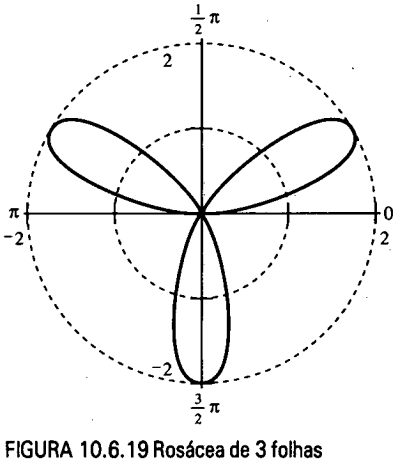


FIGURA 10.6.19 Rosácea de 3 folhas

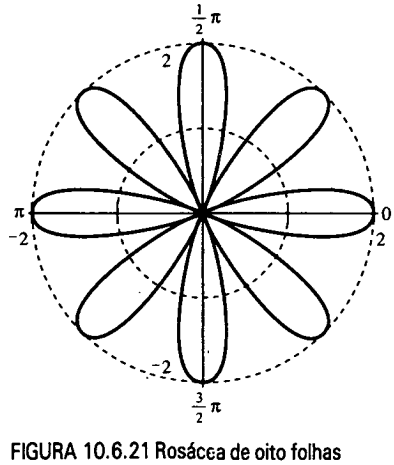


FIGURA 10.6.21 Rosácea de oito folhas

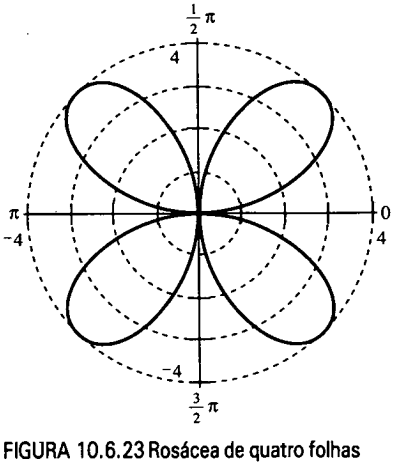


FIGURA 10.6.23 Rosácea de quatro folhas

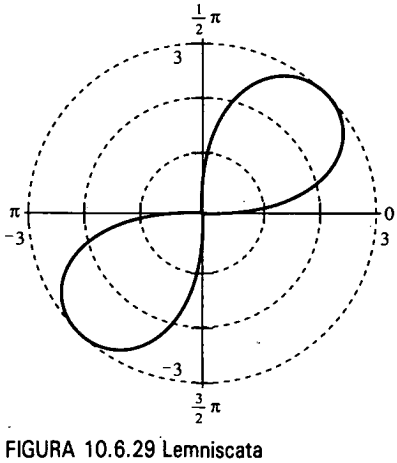


FIGURA 10.6.29 Lemniscata

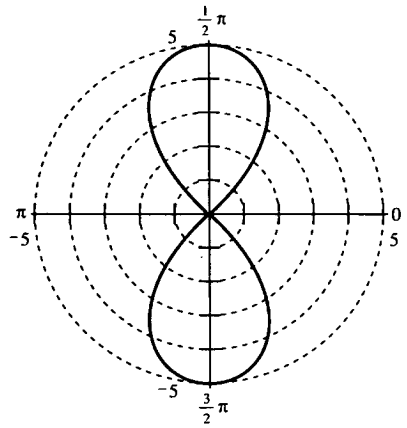


FIGURA 10.6.31 Lemniscata

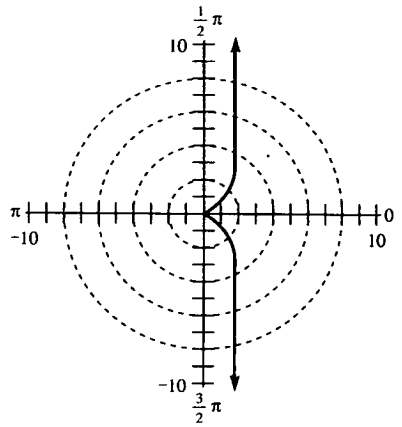


FIGURA 10.6.33 Cissóide

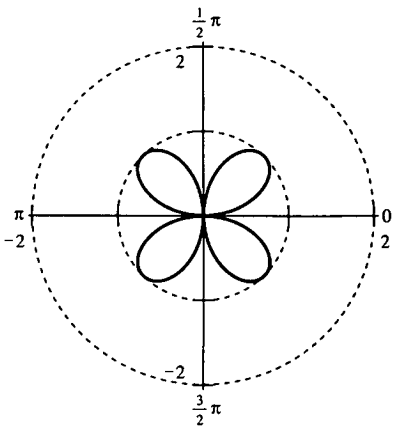


FIGURA 10.6.35 Rosácea de quatro folhas

37. $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi)$; $(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi)$ **39.** origem; $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ **41.** $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi)$ **43.** origem; $(\sqrt{15}, \cos^{-1}\frac{1}{4})$; $(\sqrt{15}, \pi - \cos^{-1}\frac{1}{4})$
45. $(3, \frac{1}{3}\pi)$; $(3, -\frac{1}{3}\pi)$ **47.** $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ **49.** $(1, \frac{3}{2}\pi)$; $(1, \frac{1}{2}\pi)$; $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi)$; $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi)$; origem; (0,22, 2,47); (0,22, 3,82)
51. origem; $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}(2n + 1)\pi)$, onde n é 0, 1, ..., 7 **55.** origem; $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{6}(2n + 1)\pi)$, onde n é 0, 1, 2, 3, 4, 5

EXERCÍCIOS 10.7 (Página 628)

1. $\frac{9}{4}\pi$ unidades quad. **3.** 4π unidades quad. **5.** 4 unidades quad. **7.** $\frac{9}{16}\pi^3$ unidades quad. **9.** $\frac{9}{8}\pi$ unidades quad.
11. $(\frac{11}{4}\pi - \frac{11}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})$ unidades quad. **13.** $(\frac{19}{3}\pi - \frac{11}{2}\sqrt{3})$ unidades quad. **15.** $(\frac{9}{2}\pi - 9)$ unidades quad. **17.** $a^2(2 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad.
19. $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ unidades quad. **21.** $\frac{1}{2}\pi a^2$ unidades quad. **23.** 4 unidades quad. **25.** $16a^2\pi^3$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 10.8 (Página 638)

1. (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$; focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{9}{5}\sqrt{5}$ **3.** (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{21}$; focos: $(0, \pm\sqrt{21})$; diretrizes: $y = \pm\frac{25}{21}\sqrt{21}$
5. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{29}$; focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{25}{29}\sqrt{29}$ **7.** (a) $e = \frac{5}{3}$; focos: $(\pm 5, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{9}{5}$ **9.** (a) parábola; (b) hipérbole; (c) elipse; (d) circunferência **11.** (a) 1; (b) parábola; (c) $r\cos\theta = -2$ **13.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) elipse; (c) $r\operatorname{sen}\theta = 5$
15. (a) $\frac{2}{3}$; (b) elipse; (c) $r\cos\theta = -3$ **17.** (a) $\frac{6}{5}$; (b) hipérbole; (c) $r\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{2}$ **19.** (a) $\frac{2}{7}$; (b) elipse; (c) $r\operatorname{sen}\theta = -5$
21. (a) $\frac{5}{4}$; (b) hipérbole; (c) $r\cos\theta = 2$ **23.** $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **25.** $r = \dfrac{36}{3 + 4\cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$
29. (a) $r = \dfrac{5}{1 - 3\cos\theta}$; (b) $r\cos\theta = -\frac{5}{3}$ **31.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}\pi$ unidades quad. **37.** (a) $r = \dfrac{40.000.000}{1 - \cos\theta}$; (b) 20.000.000 km
39. $r^2 = \dfrac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2\cos^2\theta}$

EXERCÍCIOS 10.9 (Página 646)

1. $\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{2} + 1$ **5.** $2\sqrt{3}$ **7.** $-\frac{7}{3}\sqrt{3}$ **9.** retas horizontais tangentes em $(7, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, (2, 3,87), (2, 5,55); retas verticais tangentes em (5,34, 0,46), (5,34, 2,68) **11.** retas horizontais tangentes em (4,73, 1,95), (4,73, 4,34); retas verticais tangentes em (2, 0), $(6, \pi)$
13. retas horizontais tangentes em $(2, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\pi)$
15. retas horizontais tangentes em (3,68, 0,98), (3,68, 5,31), (−0,68, 2,68), (−0,68, 3,61); retas verticais tangentes em (5, 0), $(-1, \pi)$, (1, 1,91), (1, 4,37) **17.** retas horizontais tangentes em $(-1, \frac{1}{2}\pi)$, $(-1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{2}{3}, 0{,}42)$, $(\frac{2}{3}, 2{,}72)$, $(\frac{2}{3}, 3{,}56)$, $(\frac{2}{3}, 5{,}86)$; retas verticais tangentes em (1, 0), $(1, \pi)$, $(-\frac{2}{3}, 1{,}15)$, $(-\frac{2}{3}, 1{,}99)$, $(-\frac{2}{3}, 4{,}29)$, $(-\frac{2}{3}, 5{,}13)$
19. retas horizontais tangentes em (0, 0), $(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$, $(-\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$
21. $\chi = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = 1 + \frac{3}{4}\pi$ **23.** $\chi = 2{,}68$; $\alpha = 2{,}29$ **25.** $\chi = 0{,}67$; $\alpha = 2{,}25$ **27.** $\chi = \frac{5}{6}\pi$; $\alpha = 0$ **29.** 90° **31.** 60°
33. 0° na origem; 90° em (1,0); 90° em $(1, \pi)$ **35.** 0° em $(0, \frac{1}{2}\pi)$; 90° em (0, 0); 79°6′ em $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\pi)$; 79°6′ em $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10 (Página 647)

1. $x^2 = -12y$; (b) 12 **3.** (a) $y^2 = 4x$; (b) 4 **5.** (a) $(0, \frac{3}{2})$; (b) $y = -\frac{3}{2}$ **7.** (a) (2, 3); (b) $y = 3$; (c) (0, 3); (d) $x = 4$
9. $(x - 5)^2 = 8(y - 1)$ **11.** 9π cm **13.** centro: (0, 0); vértices: $(\pm 5, 0)$; focos: $(\pm \sqrt{21}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(0, \pm 2)$
15. centro: (0, 0); vértices: $(\pm 3, 0)$; focos: $(\pm 5, 0)$; assíntotas: $y = \pm \frac{4}{3}x$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 17 a 23 aparecem nas Figs. 10-17 a 10-23.)
17. centro: $(-3, 8)$; vértices: $(-3, 4)$, $(-3, 12)$; focos: $(-3, 8 \pm 2\sqrt{3})$; extremidade do eixo menor: $(-5, 8)$, $(-1, 8)$
19. centro: $(-1, 3)$; vértices: $(-2, 3)$, $(0, 3)$; focos: $(-1 \pm \sqrt{26}, 3)$; assíntotas: $5x + y + 2 = 0$, $5x - y + 8 = 0$
21. $\frac{x^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$ **23.** $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ **25.** $r^2(4\cos^2\theta - 9\operatorname{sen}^2\theta) = 36$ **27.** $r = 9\cos\theta - 8\operatorname{sen}\theta$

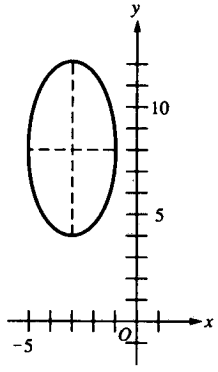


FIGURA 10-17

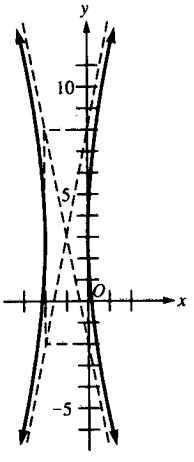


FIGURA 10-19

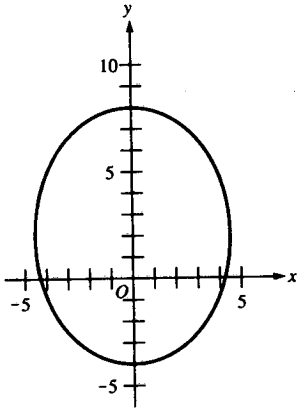


FIGURA 10-21

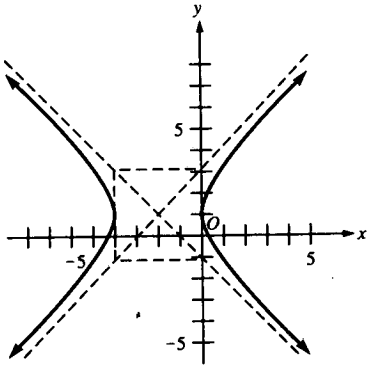


FIGURA 10-23

29. $4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 + 36x^3 + 36xy^2 - 81y^2 = 0$ **31.** $(x^2 + y^2)^2 = 4x^3 - 12xy^2$ **39.** a origem
41. (a) $(16\pi - 24\sqrt{3})$ unidades quad.; (b) $(32\pi + 24\sqrt{3})$ unidades quad. **43.** $a^2(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ unidades quad. **45.** $\frac{e^{4k\pi} - 1}{4k}$ unidades quad.
49. $r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2$ **51.** (a) $e = \frac{1}{2}$; (b) elipse; (c) $r\operatorname{sen}\theta = -2$ **53.** (a) $e = \frac{3}{2}$; (b) hipérbole; (c) $3r\cos\theta = 4$
55. $r = \frac{8}{1 - 3\cos\theta}$ **57.** $r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **59.** $21\bar{x}'^2 - 49\bar{y}'^2 = 72$ **61.** (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{34}$; focos $(\pm\sqrt{34}, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{9}{34}\sqrt{34}$
63. $4\sqrt{3}\pi\ a^2b$ unidades cúb. **65.** 600 km **67.** $(3 \pm \frac{3}{4}\sqrt{6})$ milhões de km **69.** $r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$
71. a parte esquerda da hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 1.440.000$ **77.** parábola no primeiro quadrante
79. retas horizontais tangentes em $(6, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{9}{2}, \frac{7}{6}\pi)$, $(\frac{9}{2}, \frac{11}{6}\pi)$ **81.** $3\sqrt{3}$
83. $\frac{1}{2}\pi$ na origem; $\frac{1}{6}\pi$ em $(3, \frac{2}{3}\pi)$, $\frac{1}{6}\pi$ em $(3, \frac{4}{3}\pi)$ **85.** $\chi = 1{,}98$, $\alpha = 0{,}93$

EXERCÍCIOS 11.1 (Página 659)

1. $\frac{4}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}\pi$ **5.** $-\frac{11}{4}$ **7.** 1 **9.** 2 **11.** $+\infty$ **13.** $-\frac{1}{8}$ **15.** $\ln\frac{2}{3}$ **17.** $\frac{1}{6}$ **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 1
25. $\frac{3}{5}$ **27.** 2 **29.** -1 **31.** $\frac{Et}{L}$ **33.** $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$ **37.** (b) $f'(0) = -\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 11.2 (Página 664)

1. 0 **3.** 0 **5.** 1 **7.** 0 **9.** 0 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** 1 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 1 **19.** e^2 **21.** e^a **23.** 1 **25.** e^2
27. $e^{-1/3}$ **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** 1 **35.** 1 **37.** $\frac{1}{\ln 3}$ **41.** $f(e) = e^{1/e}$, máx. rel.; $y = 1$ é uma assíntota **43.** (a) 0; (b) 0; não

EXERCÍCIOS 11.3 (Página 672)

1. 1 3. $-\dfrac{1}{2 \ln 5}$ 5. $\dfrac{1}{(\ln 2)^2}$ 7. divergente 9. divergente 11. $\frac{1}{3}\pi$ 13. 2 15. 1 17. divergente 19. (a) divergente; (b) 0
21. (a) 0 23. $\frac{1}{2}\pi$ 25. $\frac{1}{2}\pi$ 27. (a) 0,565; (b) 0,287 29. (a) 0,203; (b) 0,188 31. $\dfrac{1}{k}$
33. $\dfrac{1.000}{0{,}08 + \ln 2} \approx \$1.293{,}41$ 37. $n > 1$ 39. $\frac{1}{3}; \frac{1}{9} \ln \frac{32}{27}$

EXERCÍCIOS 11.4 (Página 676)

1. 2 3. -4 5. $\frac{1}{3}\pi$ 7. divergente 9. divergente 11. divergente 13. divergente 15. divergente 17. 0 19. divergente
21. 0 23. $\frac{1}{3}\pi$ 25. 0 27. $n > -1$; $\dfrac{1}{n+1}$ 29. $n > -1$; $\dfrac{2}{(n+1)^3}$ 31. sim; 6π

EXERCÍCIOS 11.5 (Página 684)

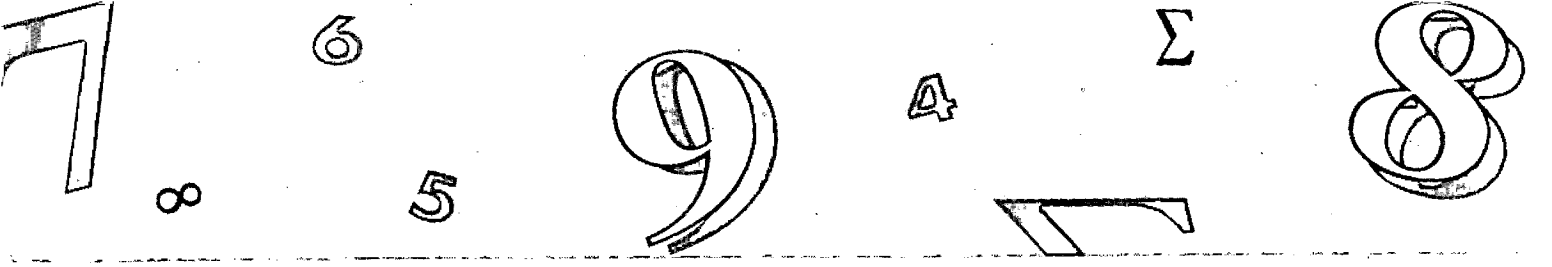
1. $P_3(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3$; $R_3(x) = \dfrac{(x-1)^4}{(\xi - 2)^5}$, ξ entre 1 e x
3. $P_3(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2 - \frac{1}{128}(x-4)^3$; $R_3(x) = \dfrac{3(x-4)^4}{128\xi^{5/2}}$, ξ entre 4 e x
5. $P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3$; $R_3(x) = \frac{1}{24}\operatorname{sen}\xi(x - \frac{1}{6}\pi)^4$, ξ entre $\frac{1}{6}\pi$ e x
7. $P_4(x) = x + \frac{1}{6}x^3$; $R_4(x) = \frac{1}{120}(\cosh \xi)x^5$, ξ entre 0 e x 9. $P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$;
$R_3(x) = -\frac{1}{4}\xi^{-4}(x-1)^4$; ξ entre 1 e x 11. $P_3(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - 2(x - \frac{1}{3}\pi)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3$;
$R_3(x) = -\frac{1}{12}(3\sec^4 \xi - 2\sec^2 \xi)(x - \frac{1}{3}\pi)^4$, ξ entre $\frac{1}{3}\pi$ e x 13. $P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$;
$R_3(x) = \frac{3}{128}(1 + \xi)^{-5/2}x^4$, ξ entre 0 e x 15. 2,71828 17. $|\text{erro}| < \dfrac{(0{,}1)^4}{24} < 0{,}000005$ 19. 0,515 21. 0,1823
23. $\dfrac{55\sqrt{2}}{672}$, $|\text{erro}| < \frac{1}{7.680}\sqrt{2}$ 27. $x \approx \dfrac{\pi}{2(1+m)}$ 29. $2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11 (Página 684)

1. $+\infty$ 3. $\frac{1}{3}$ 5. $+\infty$ 7. 1 9. $-\frac{1}{2}$ 11. e^{12} 13. 0 15. 1 17. e 19. divergente 21. $\frac{1}{2}$
23. divergente 25. $\dfrac{32}{\ln 2}$ 27. divergente 29. $\frac{1}{4}\pi$ 31. divergente 33. (b) $f'(0) = -1$ 35. (a) não; (b) 0
37. (a) divergente; (b) 0 39. $P_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$; $R_6(x) = \frac{1}{5.040}(\operatorname{sen}\xi)x^7$, ξ entre 0 e x
41. $P_4(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9) + \frac{1}{648}(x-9)^2 - \frac{5}{34.992}(x-9)^3 + \frac{35}{2.519.424}(x-9)^4$; $R_4(x) = -\frac{63}{256}\xi^{-11/2}(x-9)^5$, ξ entre 9 e x
43. $+\infty$ 45. $\frac{64}{3}$ 47. 1 49. (a) 0,148; (b) 0,699; (c) 0,018 51. \$152.500

EXERCÍCIOS A.1 (Página A.4)

1. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\ln|2 + 3x| + C$ 3. $x + \dfrac{36}{6 - x} + 12\ln|6 - x| + C$ 5. $\frac{1}{30}(3x-1)(1+2x)^{3/2} + C$
7. $2\sqrt{1+2x} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{\sqrt{1+2x} + 1}\right| + C$ 9. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| + C$ 11. $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x}| + C$
13. $\sqrt{9x^2+4} - 2\ln\left|\dfrac{2 + \sqrt{9x^2+4}}{3x}\right| + C$ 15. $\sqrt{9 - 4x^2} - 3\ln\left|\dfrac{3 + \sqrt{9 - 4x^2}}{2x}\right| + C$
17. $\dfrac{1}{3}(x^2 - x - 6)\sqrt{4x - x^2} + 4\cos^{-1}\left(\dfrac{2-x}{2}\right) + C$ 19. $-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$
21. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x\operatorname{cotg} x - \frac{5}{24}\operatorname{cosec}^3 x\operatorname{cotg} x - \frac{5}{16}\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x + \frac{5}{16}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$
23. $t^4\operatorname{sen} t + 4t^3\cos t - 12t^2\operatorname{sen} t - 24t\cot t + 24\operatorname{sen} t + C$ 25. $x\sec^{-1} 3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + C$
27. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$ 29. $\dfrac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$ 31. $\dfrac{x^4}{16}(4\ln 3x - 1) + C$
33. $\frac{2}{29}e^{2x}\operatorname{sen} 5x - \frac{5}{29}e^{2x}\cos 5x + C$ 35. $\frac{3}{5}y\cosh 5y - \frac{3}{25}\operatorname{sen} 5y + C$ 37. $\frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$ 39. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$
41. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$ 43. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ 45. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 47. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ 49. 0 51. $\frac{1}{8}(e^2 + 3)$



Índice Remissivo

Abel, Niels, 277
Abscissa, 13
Ação das massas, lei de, 558
Aceleração instantânea, 207
Adição. *Veja* Soma.
Alfabeto grego, A-5
Altura de um cilindro, 374
Ângulo, 45
  de inclinação, 49
  entre duas retas, 50
Antiderivada, 286
Antidiferenciação, 286-295
  regra da cadeia para, 296
Apolônio, 577
Arco do gráfico de uma função, 388-393
Arco retificável, 390
Área, 312-323
  de uma região em coordenadas polares, 625-629
  de uma região plana, 352-359
Arquimedes, XV, 344
Assíntota(s), de um gráfico, 597
  de uma hipérbole, 598
  horizontal, 94
  oblíqua, 254
  vertical, 86
Axioma, 2
  do completamento, 5

Barra, centro de massa de uma, 394-400
  homogênea, 396
  momento de massa de uma, 398
Barrow, Isaac, XV
Bernoulli, Jakob, XV
Bernoulli, Johann, XV, 450
Bernoulli, James, 491
Bolzano, Bernhard, XV

Cable, Charles A., 385
Cálculo, teoremas fundamentais, 344-352
Cardióide, 619
Catenária, 520
Cauchy, Augustin L., XV, 653
Centro, de massa, 396
  de uma barra, 394-400
  de uma lâmina, 403
  de uma circunferência, 25
  de uma elipse, 588
  de uma hipérbole, 596
Centróide de uma região plana, 400-407
Cilíndro, 374
  altura de, 374
  circular reto, 374
  como um sólido, 374
  reto, 374
Circunferência, 25
  centro de, 25
  degenerada, 583
  equação de, forma centro-raio, 26
    forma geral, 26
  raio de, 25
Cissóide, 625
Competição perfeita, 268
Completamento, axioma, 5
Comprimento de arco, de curvas, 388-393
Concavidade, 241
  para baixo, 242
  para cima, 242
Conclusão, 2
Concóide de Nicomedes, 625
Condições iniciais, 292
Condições laterais, 292
Cone, elemento de, 578
  folha de, 578
  geratriz de, 578
  vértice de, 578
Cônica central, 588, 596
  excentricidade de, 629
Conjunto(s), 3
  iguais, 3
  intersecção de, 3
  união de, 3
  vazio, 3
Conjunto-solução de uma desigualdade, 6
Constante, de integração, 348
  vezes uma função, derivada, 158
Continuidade
  de uma função trigonométrica, 119-122
  de uma função, 98-107
    à direita, 109
    à esquerda, 109
    em um intervalo, 109-111
    em um número, 98-107
Coordenadas
  cartesianas retangulares, 13
  polares, 608-614
Corte, volume de um sólido por, 375
Crescimento
  exponencial, 476
  limitado, 477
  logístico, 557
  natural, lei do, 470
Curva, comprimento do arco de, 388-393
  do aprendizado, 477
  em coordenadas polares, retas tangentes a, 638-647
Custo, marginal, 169
  médio, 169

Dandelin, G.P., 578
Decaimento, exponencial, 476
  natural, lei do, 470
Decimais, 3
  não-periódicos, 3
  periódicos, 3
Dedekind, Richard, XV
Delta δ, 57
Delta Δ, 139
Densidade linear, 396
Derivação, 148. *Veja também* Derivadas.
  implícita, 195-199
Derivada(s). *Veja também* Derivação.
  à direita, 152
  à esquerda, 152
  como taxa de variação, 167

da inversa de uma função, 433
da soma de duas funções, 159
das funções exponenciais de base a, 464
das funções exponenciais naturais, 459
das funções hiperbólicas inversas, 526
das funções logarítmicas de base a, 466
das funções logarítmicas naturais, 441
das funções trigonométricas, 173-181
das funções trigonométricas inversas, 503
das funções vetoriais, 808
de cos u, 174
de $\cos^{-1} u$, 504
de cosec u, 176
de $\text{cosec}^{-1} u$, 507
de cosech u, 518
de $\text{cosech}^{-1} u$, 526
de cosh u, 515
de $\cosh^{-1} u$, 526
de cotg u, 175
de $\text{cotg}^{-1} u$, 506
de cotgh u, 518
de $\text{cotgh}^{-1} u$, 526
de funções potências para expoentes racionais, 190-194
de ordem superior, 205-212
de sec u, 175
de $\sec^{-1} u$, 507
de sech u, 518
de $\text{sech}^{-1} u$, 526
de sen u, 173
de $\text{sen}^{-1} u$, 504
de senh u, 515
de $\text{senh}^{-1} u$, 526
de tg u, 175
de $\text{tg}^{-1} u$, 505
de tgh u, 518
de $\text{tgh}^{-1} u$, 526
de uma constante vezes uma função, 158
de uma constante, 156
de uma função, 142
de uma função composta, 183
definição de, 142
do produto de duas funções, 160
do quociente de duas funções, 161
enésima, 205
lateral, 152
notação de, 144, 145
primeira, 205
segunda, 205
terceira, 205
Descartes, René, XV, 13
Descontinuidade, essencial, 102
removível, 101
Desigualdade(s)
estrita, 4
não-estrita, 4
seqüência de, 4
triangular, 11
Diferença de funções, 36
Diferenciação, logarítmica, 450
Diferencial, 269-277
Dina, 395, 408
Diretriz, de uma cônica, 632
de uma parábola, 578
Disco, no cálculo de volumes, 377
Discriminante, 606
Distância,
de um ponto a uma reta, 269
entre dois pontos, 15
não-orientada, 14
orientada, 14
Divisão, 2
Domínio de uma função, 32

e (base dos logaritmos naturais), 456
Eixo, de revolução, 376
de uma hipérbole, 596
de uma parábola, 579
maior de uma elipse, 588
menor de uma elipse, 588
polar, 609
principal, de uma elipse, 588
de uma hipérbole, 596
transverso de uma hipérbole, 596
Eixos, coordenados, 13
rotação de, 604-608
translação de, 581
Elementos, de um conjunto, 3
Elipse, 586-594
centro de, 588
definição de, 586
degenerada, 591
eixo maior de, 588
eixo menor de, 588
eixo principal de, 588
focos de, 586
vértices de, 588
Épsilon ε, 57
Equações, de uma circunferência, 26
de um gráfico, 25
de uma reta em R^2, 18
forma ponto-inclinação, 18
forma inclinação-intercepto, 18
gráfico de, 20
lineares, 20
polares, 612
Equações cartesianas, 612
Equações diferenciais, com variáveis separáveis, 304
de Bernoulli, 491
lineares de primeira ordem, 481-491
Erg, 408
Erro de arredondamento, 362
de truncamento, 362
Espiral, 621, 625
Euler, Leonhard, XVI, 456
número de Euler, 456
Excentricidade de uma cônica, 629
Expoentes racionais,
derivadas de funções potências para, 190-194
Extremos,
absolutos, 220
aplicações, 224-230, 260-269
de um intervalo, 6
relativos, 217, 983
teste da derivada primeira para, 238
teste da derivada segunda para, 250

Família de funções,
dependente de dois parâmetros, 306
dependente de um parâmetro, 304
Fator de integração, 483
Fermat, Pierre de, XV
Foco de uma parábola, 578
Focos, de uma elipse, 586
de uma hipérbole, 594
Forma, centro-raio, da equação de uma circunferência, 26
de Lagrange do resto, 678
inclinação-intercepto da equação de uma reta, 18
ponto-inclinação da equação da reta, 18
Formas indeterminadas, 651-665
Fórmula de Maclaurin, 678
Fórmula de Taylor, 677-684
com forma integral do resto, 683
com forma de Lagrange do resto, 678
Fórmula prismoidal, 369
Fórmulas de Geometria, F-1
Fórmulas de Trigonometria, F-2
Frações, 2
parciais, integração por, 551-566
Função(ões), 31-40
algébrica, 39
derivação de, 156-163
antiderivada, 286
biunívoca, 423
co-secante, 48
derivada, 176
integral, 453
inversa, 502
derivada, 507
co-secante hiperbólica, 516
derivada, 518
inversa, 524
derivada, 526
co-seno, 46
derivada, 174
integral, 291
integração de uma função racional, 567
inversa, 498
derivada, 504
co-seno hiperbólico, 515
derivada, 515
integral, 519
inversa, 524
derivada, 526
co-tangente, 48
derivada, 175
integral, 452
inversa, 500
derivada, 506
co-tangente hiperbólica, 516
derivada, 518

inversa, 524
derivada, 526
composta, 36
derivada, 183
comprimento de arco, 392
constante, 38
contínua, 99
crescente, 236
cúbica, 39
custo, marginal, 169
médio, 169
total, 169
de identidade, 39
decrescente, 237
definição, 32
densidade,
de probabilidade normal padrão, 478
de probabilidade, 670
exponencial, 670
derivável, 148
em um intervalo aberto, 148
descontínua, 99, 927
domínio, 32, 908
escada, 77 n.24
exponencial de base a, 463
derivada de, 464
integral de, 464
exponencial natural, 455-463
aplicações, 469-481
definição, 455
derivada, 458
integral, 460
hiperbólica, 514-523
hiperbólica inversa, 523-527
identidade, 39
imagem, 32
ímpar, 37
integrável, 325
inversa, 422-431
linear, 38
logarítmica de base a, 465
derivada de, 466
logarítmica natural, 439-449
definição, 440
derivada, 441
inversa, 455
maior inteiro, 43
monótona, 237
operações, 36
par, 37
periódica, 47
polinomial, 39
potência, 190
derivada, para expoentes racionais, 190-194
para expoentes reais, 467
quadrática, 39
racional, 39
rendimento marginal, 170
rendimento total, 170
secante, 48
derivada, 174
integral, 453
inversa, 502
derivada, 507
secante hiperbólica, 516
derivada, 518
inversa, 524
derivada, 526
seno, 46
derivada, 173
integral, 291
integração de uma função racional, 567
inversa, 496
derivada, 504
seno hiperbólico, 515
derivada, 515
integral, 519
inversa, 523
derivada, 526
sinal, 74
suave, 390
tangente, 48
derivada, 175
integral, 452
inversa, 499
derivada, 505
tangente hiperbólica, 516
derivada, 518
inversa, 524
derivada, 526
transcendental, 39
valor absoluto, 41
valor médio de uma função, 342
zeros de, 277
Funções trigonométricas, 45-52
continuidade, 119-122
derivadas, 173-181
integrais que resultam em, 510-514
integrais, 291, 452, 453
inversas, 496-503
derivadas, 503-510
integrais que resultam em, 510-514

Geometria, analítica, 13
fórmulas, F-1
Geratriz de um cone, 578
Gráfico(s)
de equações em coordenadas polares, 614-625
de uma equação em R^2, 20
de uma função, 33, 40-44
esboços, 254
reflexão, 428
simetria, 29
Gravidade, aceleração devida à, 309
Gudermaniana, 528
Gudermann, Christoph, 528

Hermite, Charles, 456
Hipérbole, 594-604
assíntotas de, 598
centro de, 596
conjugada, 599
definição de, 594
degenerada, 601
eixo principal de, 596
eixo transversal de, 596
eixos conjugados de, 596
eqüilátera, 597
focos de, 594
retângulo auxiliar de, 599
unitária, 521
vértices de, 596
Hipótese, 2

Identidade fundamental de Pitágoras, 47
Identidades trigonométricas fundamentais, 49
Imagem de uma função, 32,
Inclinação, 49
Incremento, 139, 144
Índice da somatória, 313
Inflexão, ponto de, 244
Integração. *Veja também* Integrais.
constante de, 348
de funções racionais de seno e co-seno, 567
de funções racionais por frações parciais, 551-566
o denominador contém fatores quadráticos, 561-566
o denominador tem somente fatores lineares, 551-561
de potências de seno e co-seno, 537-542
de potências de tangente, co-tangente, secante e co-secante, 542-545
limites de, 326
por partes, 531-537
fórmula de, 531
por substituição trigonométrica, 545-551
substituições, 566-570
técnicas de, 529-576
numérica, 359-369
Integrais. *Veja também* Integração.
definidas, 324-331
aplicações, 373-420
definição, 326
propriedades, 331-340
impróprias, 665-677
com extremos infinitos de integração, 665, 673
convergente, 666, 674
divergente, 666, 674
indefinida, 326, 348
Integrando, 326
Inteiros, 2
Intercepto de uma reta, 18, 19
Intersecção de conjuntos, 3
Intervalo
aberto, 6
extremos, 6
fechado, 6
partição de, 324
semi-aberto à direita, 6
semi-aberto à esquerda, 6

Invariante, 606
Inversa de uma função, 425
  derivada de, 433
Invólucro cilíndrico, no cálculo de volumes, 383

Joule, 408
Juros compostos continuamente, 475

Kirchhoff, Gustav, 488

L'Hôpital, Guillaume François de, 650
Lados de um ângulo, 45
  final, 45
  inicial, 45
Lagrange, Joseph, XV, 144, 678
Lâmina, 401
Lâmina homogênea, 403
Laplaciano, 1063
Latus rectum da parábola, 579
Lei de ação das massas, 558
Lei de Hooke, 409
Lei do crescimento natural, 470
Lei do decaimento natural, 470
Lei do resfriamento de Newton, 487
Leibniz, Gottfried Wilhelm, XV, 145, 344
Lemniscata, 621, 625
Libby, Willard, 481
Limaçon, 618
  com um dente, 619
  com um laço, 619
  convexa, 619
Limite(s)
  à direita, 73
  à esquerda, 74
  no infinito, 88-98
  bilateral, 74
  de uma função, 56-63
    teoremas, 64-73, 131-134
  de uma soma de Riemann, 325
  inferior, de integração, 326
    de uma somatória, 313
  infinitos, 78-88
  laterais, 73-78
  superior, de integração, 326
    de uma somatória, 313

Maclaurin, Colin, 678
Marginal, conceito de variação, 169
Massa, 394
  centro de, 394-400, 403, 1023
  momento de, 395, 398, 402, 403
Média de variação, 169
Medida, 317
Medida em radianos, 45
Meia-vida, 472
Método de aproximação de Newton, 277-281
Método dos anéis circulares, para volume, 379
Momento de massa, 395, 398, 402, 403
Monopólio, 268
Movimento
  curvilíneo, 832
  harmônico simples, 209
  retilíneo, 163-166, 207-209, 307-310
Multiplicação, 2
Negativo, 2
Newton, 394
Newton, Sir Isaac, XV, 145, 277, 344
Nicomedes, concóide de, 625
Norma de partição, 324
Notação construtiva de conjunto, 3
Número(s)
  críticos, 217
  irracionais, 3
  racionais, 2
  reais, 2
  transcendentais, 456

Operações inversas, 286
Ordem de uma equação diferencial, 303
Ordenada, 13
Origem, 5, 13

Par ordenado, 13
Parábola, 28, 578
  degenerada, 584
  diretriz de, 578
  eixos de, 579
  foco de, 578
  latus rectum de, 579
  vértice de, 28, 579
Paralelepípedo retangular, 374
Partição
  de um intervalo, 324
  norma de, 324
  regular, 327
Período de uma função, 47
Plano numérico, 13
Polinômio de Maclaurin, 678
Polinômio de Taylor, 678
Pólo, 609
Ponto, 13
  de inflexão, 244
  médio de um segmento de reta, 16
  reflexão de, 428
  simetria em relação a, 29
Pontos colineares, 21
Posição padrão de um ângulo, 45
Pressão líquida, 413-418
Primeiro teorema fundamental do Cálculo, 345
Princípio de Pascal, 414
Produto, 2
  de funções, 36
  de duas funções, derivada de, 159
Propriedade transitiva da ordem, 4
Prova, 2

Quadrantes, 13
Quociente de funções, 36
  de duas funções, derivada de, 160

R^2, 13
  gráfico de uma equação em, 20
Radiano hiperbólico, 522
Raio de uma circunferência, 25
Recíproco, 2
Reflexo, de um gráfico, 428
  de um ponto, 428
Regra da cadeia, 183
  para a antidiferenciação, 296
Regra de L'Hôpital, 652, 656, 660, 661
Regra de Simpson, 365
Regra do trapézio, 361
Regra parabólica, 363
Rendimento marginal, 170
Repetição periódica, 3
Resto na fórmula de Taylor, forma integral, 683
    forma de Lagrange, 678
Reta(s)
  equações em R^2, 18
    forma ponto-inclinação, 18
    forma inclinação-intercepto, 18
  inclinação, 17
  normal, 142
  numérica, 5
  numérica real, 5
  paralelas, 20
  perpendiculares, 21
  polar, 609
  secante, 139
  simetria em relação a, 29
  tangente, 140, 981
    a um gráfico, inclinação de, 140
    a curvas em coordenadas polares, 638-647
Retângulo auxiliar de uma hipérbole, 599
Revolução,
  eixo de, 376
  sólido de, 376
    volume de, 376-388
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 324
Rolle, Michel, 230
Rosácea, 620
Rotação de eixos, 604-608

Secção cônica, 577
Segmento de reta, ponto médio de, 16
Segunda lei de Kirchhoff, 488
Segundo teorema fundamental do Cálculo, 347
  de desigualdades, 4
Séries infinitas, de Maclaurin, 678
Sigma Σ, 312
Simetria, de um gráfico, 29
  teste, 29
Sistema de coordenadas polares, 608
Sistema numérico real, 2
Sólido de revolução, 376
  volume, 376-388
Solução completa de uma equação diferencial, 304, 482
Soma, 2
  de duas funções, derivada de, 158
  de funções, 35
  limites de, 313
  Riemann, 324

Somatória, índice, 313
Stirling, James, 678
Subconjunto, 3
Substituição trigonométrica,
integração por, 545-551
Subtração, 2

Tabela de integrais, F-3
Taxa de variação, derivada como, 167
relativa, 172
instantânea, 167
Taxa efetiva de juros, 475
Taxa relativa de variação, 172
Taxas relacionadas, 199-205
Taylor, Brook, 677
Teorema, 2
Teorema da função inversa, 432, 433
Teorema da unicidade, 63
Teorema de existência, 698
Teorema de Green, 1082-1095
Teorema de Rolle, 231
e teorema do valor médio, 230-236
Teorema do sanduíche, 114
Teorema do valor extremo, 222
Teorema do valor intermediário, 111
Teorema do valor médio, 232
para integrais, 341
e o teorema de Rolle, 230-236
Teorema do valor médio de Cauchy, 653
Teoremas fundamentais do Cálculo, 344-352
primeiro, 345
segundo, 347
Teste(s)
da derivada primeira para extremos relativos, 238
da derivada segunda para extremos relativos, 250
Trabalho, 407-413
Translação de eixos, 581
Trigonometria, fórmulas, F-2

União de conjuntos, 3

Valor absoluto, 8
Valor máximo de uma função, 217-224
absoluto, 220
relativo, 217
Valor médio de uma função, 342
Valor mínimo de uma função, 217-224
absoluto, 220
relativo, 217
Variáveis, 3, 32
dependentes, 32
independentes, 32
Velocidade instantânea, 165
Vértice, de um ângulo, 45
de um cone, 578
de uma parábola, 28, 579
Vértices, de uma elipse, 588
de uma hipérbole, 596
Volume
de um sólido de revolução, 376-388
por invólucros cilíndricos, 383-388
por discos, 377
por anéis circulares, 379
de um sólido por corte, 375

Wallis, John, XV
Weierstrass, Karl, XV

Zeros de uma função, 277

Impressão e acabamento:
GRÁFICA PAYM
Tel. (011) 4392-3344

ISBN 85-294-0094-1

99,00

9 788529 400945